Maple을 활용한 미분방정식 학습

Learning of Differential Equations using Maple

하 준 홍*, 심 재 동*

Jun-Hong Ha*, Jea-Dong Shim*

요 약

미분방정식의 학습에서 최대의 장애요소는 “풀이에 많은 시간이 소요된다는 점”과 “미분방정식의 해를 수작업으로 시각화하기 어렵다는 점”이다. 이러한 장애요소를 해결하지 않는다면, 교과목의 목표인 “미분방정식의 이해와 활용”을 달성하기 곤란하다. 본 연구에서는 이러한 장애요소를 제거하기 위한 방편으로 Maple의 활용에 대한 당위성을 설명하고, 또한 Maple을 보다 쉽게 사용할 수 있도록 개발된 단계별 Maple 실행코드를 소개한다.

Key Words : CAS, Maple, Differential Equations

ABSTRACT

In the study of differential equation the most obstacle is that you have to spend lots of times and the plots of solutions are not easy by hand. If we do not solve these kinds of problem, it is difficult to achieve the goal of the object which is the understanding and the practical use of the differential equation. In this paper we explain what should be Maple’s usefulness in the method of removing these obstacles, and introduce the stepwise executing codes of Maple which is developed for student’s easy application.

Ⅰ. 서 론

미분방정식의 해법 및 응용 능력은 공학학습을 위한 소양이다. 따라서 공학학습자는 미분방정식의 교과과정을 통하여 물리적•공학적 현상에 대한 모델링 방법, 모델링을 통하여 얻어진 방정식의 해를 구하는 방법을 이해 및 숙지해야 하고, 역으로 방정식과 그 해를 이용하여 현상을 분석할 수 있는 능력을 갖추어야 한다. 대학 2학년 교과과정에서 배우게 되는 미분방정식의 교과내용은 수학적 모델링, 방정식의 분류 및 해법, 해법을 활용한 현상의 분석(응용) 등으로 구성되어 있다[1]. 대부분의 학생들이 미분방정식을 처음 접하기 때문에, 다음 세 가지에 중점을 두고 교육한다. ① 물리법칙을 이용하여 현상을 모델링하여 미분방정식 유도하기 ② 미분방정식을 분류하고 분류된 방정식에 대한 해법을 이해하고 숙지하기 ③ 미분방정식의 해를 물리적 현상에 적용하여 제시된 문제를 해결하기. 이러한 것들을 학습하는데 장애가 되는 몇 가지 요소가 있다. 그 가운데 세 가지만 언급하면 ① 많은 양의 풀이과정으로 인해 학습시간이 과다하게 소요되며 ② 계산실수의 가능성이 높아 엉뚱한 답을 유도하며 ③ 해곡선의 그래프를 손으로 그리기 어렵다는 점이다[2]. 해곡선을 그리지 못하면 모델링에 대한 이해는 물론이고 분석력을 키울 수가 없음은 자명하다. 자연스럽게 컴퓨터를 활용하여 해곡선을 그릴 수밖에 없다. 해곡선을 컴

* 한국기술교육대학교 교양학부(hjh@kut.ac.kr, sjd@kut.ac.kr)
제1저자 (First Author) : 하준홍
교신저자 : 하준홍
접수일자 : 2009년 11월 20일
수정일자 : 2009년 12월 18일

퓨터 스크린에 그리기 위해서는 그래픽과 관련된 소프트웨어를 사용해야 한다. 해곡선만 그리려고 한다면 보편화된 소프트웨어를 사용해도 되지만, 미분방정식과 연관해서 사용하기에는 불편한 점들이 많다. 왜냐하면 대부분의 소프트웨어는 대수(algebra)의 계산이 자유롭지 못해 수치적으로 접근하기 때문이다. 이는 미분방정식의 해를 수치적으로 계산할 수 있도록 각 소프트웨어 맞게 코딩해야 하는 불편함이 있고, 한정된 수업시간에 이것들을 모두 다루기 쉽지 않다. 따라서 강의의 연장선상에서 많은 시간의 소용없이 미분방정식의 기본적인 개념과 해법을 익힐 수 있는 소프트웨어의 활용이 바람직하다[3].

본 연구에서는 CAS(Computer Algebra System)를 사용하여 위에서 언급된 세 가지 문제점들을 동시에 해결하고자 한다([4,5,6,7,8]). CAS는 컴퓨터에서 대수간의 연산이 가능한 연산체계를 갖춘 프로그램 언어를 지칭하는 용어이다. CAS의 기능을 갖춘 언어 가운데 가장 범용성 있게 사용되고 있는 소프트웨어는Maple과 Mathematica이다. 두 가지는 기능면에서는 유사하나 공학도가 사용하기에는 Maple이 편리할 수 있다. 이러한 이유로 우리 대학은 미분방정식을 교육함에 있어 Maple이 제공하는 해법과 그래픽의 기능을 적극 사용하도록 권장하고 있다. 그러나 불행히도 Maple은 그 사용법이 매우 간단함에도 불구하고, 많은 학생들은 이를 잘 사용하지 못하고 있다. 그 이유는 자유롭게 사용할 수 있는 환경 또는 콘텐츠가 부족한 탓일 수 있다. 이를 개선하기 위해 학생들에게 유익한 미분방정식들을 선별하여 이들에 대한 해를 구하는 과정 및 유용한 그래픽 과정을 포함한 단계별 Maple 코드를 작성하였다. 본 연구에서는 이 코드의 제작 목적과 제작품, 사용법을 설명한다.

Ⅱ. Maple 코드 제작 목적과 과정

대학 2학년을 대상으로 교육하는 미분방정식의 핵심교과내용은 현상에 대한 수학적 모델링, 모델링을 통하여 만들어지는 미분방정식의 해법, 해법을 통한 현상의 역(inverse) 분석이다. 해법을 익히기 위해서는 문제를 많이 풀어야 하는데, 풀이과정이 매우 길어 풀이에 많은 시간이 소요된다. 또한 풀이과정이 너무 긴 탓에 풀이도중 오류가 많이 발생하곤 한다. 예를 들어, 단위게이트를 전위로 갖는 RLC회로의 전류는

$$L\frac{dI}{dt}+RI+\frac{1}{C}\int_0^t I(\tau)\,d\tau = E_0\,[u(t-a)-u(t-b)]$$

에 의해 기술된다. 해를 구하기 위해서 다음 3단계의 풀이과정이 필요하다.

〔1 단계〕 라플라스변환을 적용하여 $J[s]$를 구함

〔2 단계〕 $J[s]$를 부분분수로 전환

〔3 단계〕 라플라스역변환을 적용하여 $I(t)$를 구함

여기서 $J(s)$는 $I(t)$에 대한 라플라스변환이다. 강의에서 경험한 바에 의하면, 각 단계별 계산에 함몰되어 미분방정식이 가지는 개념을 이해하지 못하는 결과를 초래함을 알았다. 더욱이 모델링으로 얻어진 문제의 해를 손으로 풀고 그 해곡선의 그래프를 손으로 그리는 것은 상당히 어렵다. 왜냐하면 현상계에서 만들어진 미분방정식은 다수의 변수를 포함하고 있기 때문이다. 비교적 이해가 쉬운 예를 가지고 이 부분을 자세하게 설명하여 보자. 시각 t에서 발사체의 물체의 속도벡터와 궤도벡터를 각각

$\vec{v}(t) = \langle v_1(t), v_2(t) \rangle$ 및 $\vec{x}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle$

라 두고(평면운동으로 가정함), 뉴턴역학을 이용하여 이들을 수학적으로 모델링하면 다음 미분방정식을 얻는다.

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = mg\vec{j} - c\vec{v},\ \ \vec{v}(0) = \langle v_0\cos\theta, v_0\sin\theta \rangle \quad (1)$$

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v},\ \ \vec{x}(0) = \langle 0,0 \rangle \quad (2)$$

여기서 g는 중력, m은 질량, c는 공기저항, v_0는 초기속도, θ는 발사각도이다. 초기치문제 (1)과 (2)에 대한 해는 다음과 같다.

$$x(t) = \frac{m}{c}v_0\cos\theta\left(1-e^{-\frac{c}{m}t}\right) \quad (3)$$

$$y(t) = -\frac{mg}{c}t + \frac{m}{c}\left(v_0\sin\theta + \frac{mg}{c}\right)\left(1-e^{-\frac{c}{m}t}\right) \quad (4)$$

강의에서는 (1)과 (2)의 유도과정(수학적 모델링) 및 (3)과 (4)의 유도과정(분류에 따른 해법 적용과정)을 교육한다. 여기서 식 (1)-(4)의 과정을 배웠다고 만족하는 학생은 없을 것이다. 식 (3)-(4)을 이용하여 물체가 날아가는 양상을 시각적으로 관찰하고자 할 것이다. 더 나아가 식에 포함되어 있는 각종 변수의 변화에 대한 해의 반응은 어떻게 나타나는지를 관찰하고자 할 것이다. 이를 위해서는 변수의 변화에 의존하여 변하는 해곡선을 시각화할 수 있어야 한다. 즉, 변수 m, c, v_0, θ에 어떤 특정한 값을 대입하였을 때 $x(t)$, $y(t)$의 그래프를 쉽게 그릴 수 있도록 해야 한다. Maple을 사용하면 이러

한 일련의 문제를 쉽게 해결할 수 있다. 참고로, Maple에서 제공하는 dsolve라는 함수를 사용하여 해를 구할 수도 있다. 해법에 대한 충분한 지식을 가지고 있는 경우에는 dsolve를 사용하여 미분방정식의 해를 구하여 활용해도 좋을 것이다. 물론 여러 가지 컴퓨터 언어(C++, JAVA 등)로 해곡선을 그리는 것이 가능할 수 있지만(실제로, 많이 나와 있음), 유연성(방정식의 형태를 자유롭게 바꾸어 실행하는 작업) 등에 문제가 있을 수 있다. 반면, Maple은 화이트보드에서 강의를 하듯이 워크시트에서 식의 계산, 문서작성, 그림그리기 등을 자유롭게 다룰 수 있다.

변수의 선택에 따른 궤도를 분석하기 위해 미분방정식의 해를 구하는 과정과 해의 그래프를 동시에 해결하는 Maple 코드의 제작과정을 설명한다. Maple에서는 모든 과정을 독립적으로 시행하여 결과를 얻을 수 있고, 시행한 결과가 필요한 곳에서는 간단하게 그 결과를 인용할 수 있다. 미분방정식 (1)-(2)를 입력하여 해를 구하고, 발사체가 지면과 만나는 시간을 구한 후, 각 해의 그래프를 그리는데, 이전의 단계에서 구한 결과를 차례로 사용할 수 있다. 이러한 절차를 proc라는 명령어를 사용하여 동시에 실행할 수도 있는데 지금부터 이 과정을 설명한다. proc를 사용하여 m, c, v, θ를 변수로 갖는 함수 proj의 정의할 수 있다. proj의 내부는 미분방정식의 풀이(dsolve), 지면에 닿는 시간의 수치계산(fsolve), 해곡선의 그래프를 그리기(plot)의 과정으로 구성한다.

```
proj:=proc(m,c,v,θ)
  local g, eq1, eq2, x, z, tf:
  g:=9.81:
  eq1:=diff(x(t),t$2)=-(c/m)*diff(x(t),t)):
  eq2:=diff(y(t),t$2)=-g-(c/m)*diff(y(t),t)):
  dsolve({eq1,x(0)=0,D(z)(0)=v*cos(θ)},x(t)):
  x:=unapply(rhs(%),t):
  dsolve({eq2,y(0)=0,D(y)(0)=v*sin(θ)},y(t)):
  y:=unapply(rhs(%),t):
  tf:=fsolve(y(t),t=1):
  plot([x(t),y(t),t=0..tf],scaling=constrained):
  return(%):
end proc:
```

proc내의 과정은, 강의에서 미분방정식의 해법을 설명하는 순서와 동일하고(풀이만 없음), 심볼의 표기 방법도 동일함을 알 수 있다. Maple 12는 미분과 적분의 기호를 바로 인식하므로 미·적분의 명령어를 기억할 필요조차도 없다. 따라서 학생들은 Maple 언어를 배워야만 한다는 특별한 부담감을 가질 필요 없이 고전적인 학습방법(연필과 종이만을 사용해서 학습하는 방법)과 병행해서 사용할 수 있다.

지금까지 학생들은 dsolve의 역할을 손으로 담당하느라 수많은 시간을 소비해야 했다. 그 때문에 미분방정식의 교육이 지혜로까지 발전시키지 못했다. 물론, 소프트웨어의 노예가 되지 않게 위해서는 어느 정도의 고전적인 작업은 반드시 필요하다고 생각한다. 대학 2학년 교과과정에서 배우는 미분방정식의 해와 그 해곡선은 위와 거의 동일한 수준 또는 더 간단한 수준의 코딩으로 얻을 수 있다.

이제 함수 proj(m, c, v, θ)에 적당한 변수의 값을 대입하면 그 변수에 대응하는 해와 해곡선의 시각화한 그림을 쉽게 얻을 수 있다. 예로, $m=1$, $c=1$, $v=10$, $\theta=\pi/4$에 대한 해곡선은 Maple 워크시트에 다음과 같이 입력하여 실행(Enter키를 누름)하면 얻을 수 있다([그림 1]).

```
>proj(1,1,10,π/4)
```

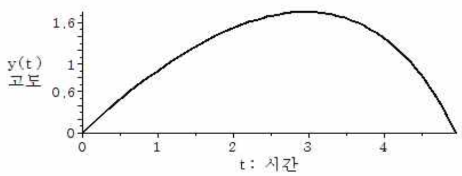

그림 1. $m=1$, $c=1, v=10$, $\theta=\pi/4$에 대한 해곡선

함수 proj(m, c, v, θ)는 수학적 감각으로 정의되어 있기 때문에 변수의 변화에 대한 해곡선의 변화도 쉽게 관찰할 수 있다. 예를 들어, 발사각 θ의 변화에 따른 궤도의 변화도 쉽게 관찰할 수 있다. Maple 워크시트에 다음과 같이 입력하고 실행하면 [그림 2]를 얻는다.

```
>display([seq(proj(1,1,10,θπ/20),θ=1..10)])
```

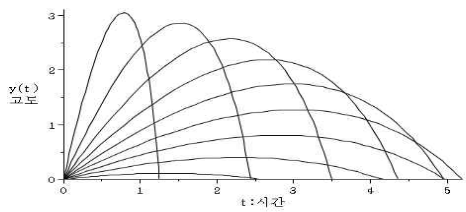

그림 2. 발사각 θ에 대응하는 궤도

이러한 시각화([그림 2])를 통하여 발사각이 크면 클수록, 날아간 거리가 줄어든다는 것을 알 수 있다.

대단히 간단하고 이해하기 쉬운 코딩으로 많은 정보를 얻을 수 있는 Maple은 학습보조도구로써 손색이 없다고 생각한다.

본 연구의 목표는 학생들이 강의에서 자유롭게 사용할 수 있는 proj와 같은 Maple코드를 개발, 이를 미분방정식의 교육에 유익하게 활용하는 것이다.

Ⅲ. Maple 학습보조자료 사용법

본 연구에서는 개체군의 변동, 온도의 변화, 혼합물의 농도변화, 발사체 또는 낙하물체의 궤도, 스프링-질량계의 진동현상, RLC-전기회로, 진자운동, 열전도현상, 파동현상, 라플라스변환, 멱급수, 푸리에급수에 대한 단계별 Maple코드와 각 코드의 사용법을 설명한다.

수업시간에 제공되는 DiffEq.mw를 클릭하면 다음과 같은 창이 나타난다. 워크시트에 총 7개의 마크 ▶(섹션붕괴 마크)가 있고, 그 내부에 17개의 마크 ▶를 포함하고 있다.

▶제1장 1계 미분방정식

(1) 미분방정식의 해를 구하는 과정을 익힌다.
(2) 미분방정식에 포함되어 있는 파라미터의 역할을 이해한다.

▶제2장 2계 선형미분방정식

(1) 과감쇠, 임계감쇠, 부족감쇠 현상을 이해한다.
(2) 이상적인 공진현상, 실용적인 공진현상을 이해한다.

▶제3장 선형연립미분방정식

(1) 연립미분방정식의 해를 구하는 방법을 익힌다.
(2) 행렬의 고유치 및 고유벡터 구하는 방법을 익힌다.
(3) 수치해를 구하는 방법을 익히다.

▶제4장 라플라스변환

(1) 라플라스변환을 구하는 방법을 익힌다.
(2) 라플라스변환으로 미분방정식의 해를 구하는 방법을 익힌다.
(3) 충격이 가해진 미분방정식의 해를 구하는 방법을 익힌다.

▶제5장 멱급수 해법

(1) 멱급수의 의미를 이해한다.
(2) 르장드르급수의 의미를 이해한다.

▶제6장 푸리에급수

(1) 함수와 푸리에 급수와의 관계를 부분합을 통하여 이해한다.
(2) 수치적분의 필요성을 이해한다.

▶제7장 편미분방정식

(1) 일차원 열전도방정식의 동태를 이해한다.
(2) 일차원 파동방정식의 동태를 이해한다.
(3) 횡단파동의 개념을 이해한다.

이제 ▶의 내부에 있는 내용을 실행하는 방법을 설명한다. 대표적으로, 파동방정식의 해를 구하는 과정에 대하여 설명한다. 편미분방정식에 대한 해를 구하는 방법은 여러 가지가 있는데, 여기서는 푸리에 급수를 이용한다. Maple을 사용한 또 다른 풀이방법은 참고문헌 ([2])을 참조하라.

위에서 ▶제7장 편미분방정식 섹션을 클릭하면 다음과 같은 마크 ▼(섹션펼치기 마크)로 바뀌면서 부분섹션들이 나타난다(3개의 부분섹션이 있다).

▼제7장 편미분방정식

▶일차원 열전도방정식(동차 디리끄레 경계조건을 갖는 경우)

▶일차원 파동방정식(동차 디리끄레 경계조건을 갖는 경우)

▶일차원 파동방정식(횡단파동, 경계조건 없음)

초기조건을 만족하는 파동방정식의 해의 그래프까지 그리기 위해서는 다음과 같이 4단계의 코딩과정이 필요하다.

〔1 단계〕 초기조건을 지정하는 단계
〔2 단계〕 푸리에 계수를 구하는 단계
〔3 단계〕 급수의 부분합을 계산하는 단계
〔4 단계〕 해의 그래프를 그리는 단계

▶일차원 파동방정식을 클릭하면 위의 4단계 과정에 대한 실행코드를 포함하고 있는 테이블이 나타난다. 즉, 마크 ▼로 바뀌면서 〔표 1〕과 같은 화면이 나타난다. 〔표 1〕의 왼쪽 칸에는 실행코드에 대한 설명이고, 오른쪽 칸은 Maple 실행코드이다. 실행코드를 차례로 클릭하면 각 행에 대한 실행결과가 그 행에 출력된다.

표 1. 단계별 실행코드

단계별 설명	Maple 코드
파라미터의 값을 할당한다.	$L := 1 : k := 0.1 :$
초기함수를 입력한다.	$g := x \rightarrow piecewise\left(0 < x \text{ and } x < \frac{1}{2}, x, \frac{1}{2} < x \text{ and } x < 1, 1 - x\right)$ $h := 0$
프리에계수 A(j)을 입력한다.	$A := j \rightarrow \frac{2}{L} \cdot \left(int\left(g(x) \cdot \sin\left(\frac{j \cdot \pi \cdot x}{L}\right), x = 0..L \right)\right)$
프리에계수 B(j)을 입력한다.	$B := j \rightarrow \frac{2}{j \cdot \pi \cdot k} \cdot \left(int\left(h(x) \cdot \sin\left(\frac{j \cdot \pi \cdot x}{L}\right), x = 0..L \right)\right)$
부부합을 계산한다.	$SumU := n \rightarrow sum\left(\left(A(j) \cdot \cos\left(\frac{j \cdot \pi \cdot k \cdot t}{L}\right) + B(j) \cdot \sin\left(\frac{j \cdot \pi \cdot k \cdot t}{L}\right)\right) \cdot \sin\left(\frac{j \cdot \pi \cdot x}{L}\right), j = 1..n\right)$
부분합의 그래프, 즉 시간-공간에서 열의 이동을 부분합의 그래프를 이용하여 확인한다.	$plot3d(SumU(10), x = 0..1, t = 0..30)$
애니메이션을 위해 plots를 include한다.	$with(plots) :$
애니메이션을 실행한다.	$animate(plot, [SumU(10), x = 0..1], t = 0..30)$
워크시트를 초기화 한다.	$restart :$

〔표 1〕의 3번 째 4번 째 행은 2번 째 행에서 입력된 함수에 대한 푸리에 계수 A(j), B(j)를 자동적

으로 계산한다. 실제로, 위의 워크시트에서 3번 째 행의 오른쪽에 마우스를 두고 클릭한 후 워크시크에 다음과 같이 쓴 다음 실행버튼을 눌러보라. 다음과 같은 결과를 손쉽게 얻을 수 있다.

>simplify(A(j))

$$\frac{2\left(2\sin\left(\frac{1}{2}\,j\,\pi\right)-\sin(j\,\pi)\right)}{j^2\,\pi^2}$$

(적분에 자신이 없어) 푸리에 계수를 구하는 문제 때문에 푸리에 급수를 이해하지 못하는 경우가 종종 있다. 하지만, 적분계산을 CAS로 해결하도록 한다면 푸리에 급수의 개념을 학습하도록 하는 데는 아무런 문제가 없을 것이다(적분은 그 다음에 익히면 됨).

sumU를 클릭하면 파동방정식의 급수해의 부분합이 계산되고, 그 다음 plot3D를 클릭하면 파동방정식의 급수해에 대한 부분합의 그래프가 나타난다〔그림 3〕.

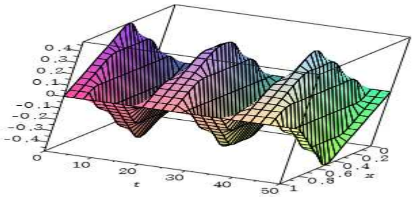

그림 3. 파동방정식의 급수해

더 나아가, animate를 클릭하면 시간에 대한 파동의 위치적 변화를 애니메이션으로 관찰할 수 있다.

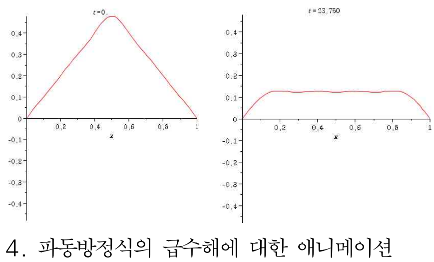

그림 4. 파동방정식의 급수해에 대한 애니메이션

Ⅳ. 결 론

본 연구에서는, 미분방정식의 학습에서 Maple 활용에 대한 장점(당위성)을 언급하였고, 또한 17개의 자율학습용으로 개발된 Maple실행코드와 그 사용법을 설명하였다. Maple은 미분방정식의 학습에서 겪는 장애요소를 극복할 수 있는 방안이 될 수 있음을 알았다. 물론, 전적으로 Maple에 의존하는 학습법은 좋지 못하다는 것을 지적해 둔다. 개발된 단계별 Maple 코드는 프로그램에 대한 지식이 아주 없어도 되므로 수업에 활용하는 데는 전혀 문제가 없다고 생각한다. 또한 조건들은 바꾸거나 또는 식을 조작하는 작업들이 대단히 간단하여 여러 가지 미분방정식들에 대한 시뮬레이션을 쉽게 실행해 볼 수 있다. 실제로, 〔표 1〕에서 초기조건을 자유롭게 바꾸어 가면서 시뮬레이션해 볼 수 있다(파동방정식에서 초기조건이 중요하다는 사실을 알고 있다면 더욱 더 흥미로울 것이다). 이러한 과정을 통하여 학생들은 미분방정식의 학습에 관심을 가지게 될 것이고, 나아가 미분방정식의 이해력과 응용력은 자연스럽게 향상될 것이라 생각한다.

참 고 문 헌

〔1〕 심재동, 이경희, 하준홍, "미분방정식과 응용", *경문사*, 2003.

〔2〕 K. Donnelly, Solving differential equations analytically with Maple's assistance, http://saintjoe.edu/~karend/DEMplae.

〔3〕 하준홍, 심재동, 미분방정식의 이해력 향상을 위한 Maple 학습자료 개발, *2009년 한국실천공학교육학회 학술발표대회 논문집*. Vol.1, No.1, pp. 210-220, 2009.

〔4〕 G. A. Articolo, Partial Differential Equations & Boundary Value Problems with Maple, *Elsevier*, 2009.

〔5〕 B. Barnes and G. R. Fulford, Mathematical Modelling with Case Studies: A Differential Equations Approach using Maple and MATLAB, *Chapman & Hall/CRC*, 2008.

〔6〕 M. B. Monagan and etal. Maple Introductory Programming Guide, Maplesoft, *a division of Waterloo Maple Inc*, 1996-2009.

〔8〕 D. Richards, Advanced Mathematical Methods with Maple, *Cambridge Univ.* 2002.

〔8〕 R. J. Soukup, Engineering according to Maple, *International Conference on Engineering Education*, Aug. 6-10, 2001, Oslo, Norway.

하 준 홍 (Junhong Ha)

1991년 2월 : 부산대학교 대학원 수학과(이학석사)
1996년 9월 : 일본고베대학 자연과학연구과(이학박사)
1999년 3월~현재 : 한국기술교육대학교 교양학부 교수
관심분야 : 최적제어, 역문제

심 재 동 (Jeadong Shim)

1980년 2월 : 성균관대학교 수학과(이학사)
1990년 5월 : Univ. of S. Florida(Ph..D)
1992년 3월~현재 : 한국기술교육대학교 교양학부 교수
관심분야 : 최적제어