韓國數學教育學會誌 시리즈 C
<初等數學敎育>
2009. 5. 제 12권, 제 1호, 1-20

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. C:
Education of Primary School Mathematics
May. 2009, Vol. 12, No. 1, 1-20

수학 문제해결 과정에 나타난 초등학생들의 직관적 사고 분석

유 대 현 (서울혜화초등학교)
강 완 (서울교육대학교)

초등학생들의 수학문제해결과정에서 나타나는 직관적 사고는 오류를 일으키기도 하지만 강력한 문제해결 방법으로 작용하기도 한다. 이에 초등학생의 문제 해결과정에서 나타나는 직관적 사고를 관찰하여 분석하여 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

첫째, 학생들은 문제해결 과정에서 문제의 계산 절차나 알고리즘을 알고 있는 경우, 직관적 사고에 의존하기 보다는 알고리즘에 의한 풀이에 의존하려는 경향을 보였다. 둘째, 학생들은 직관적 사고를 통한 시각적 모델을 구안하여 문제를 해결하는 능력이 떨어지며, 시각적 모델을 사용하여 문제를 해결한다 하더라도 자신의 답에 대한 확신감이 떨어진다. 셋째, 문제해결 과정에서 직관적 사고와 논리적 사고 사이에 상호 보완 관계가 나타났다. 넷째, 확률의 개념과 확률에 관한 문제해결 과정에서 학생들은 자신의 주관적 해석을 통한 인식론적 장애를 일으켰다.

I. 서 론

1. 연구의 필요성 및 목적

학교 교육현장에서 학생들을 지도할 때 학생들이 수학적 개념습득이나 문제해결을 수행하며 많은 어려움을 겪는 것을 목격 할 수 있다. 그들의 개념습득에 도움을 주기 위해 교사들은 구체물과 반구체물을 활용하여 학생들에게 활동을 해 보도록 한다. 때때로 이 과정에서 학생들은 수학적 개념에 대한 "아하!"를 경험한다. 여기서 말하는 "아하!"는 학생들이 논리적 증명이나 추론 없이 개념을 직관하는 것이다. 문제해결 활동에서도 마찬가지로 학생들은 문제에 주어진 정보나 조건만으로 문제해결의 단서나 해결방법 또는 그 결과를 즉각적으로 떠올리기도 하는데 이러한 사고를 직관적 사고라 할 수 있다.

수학적 사고를 구분하는 방법은 여러 가지이다. 사람마다, 시대마다 다른 방법으로 수학적 사고를 분석하고, 분류하여 왔다. 하지만 역사적으로 살펴보면, 수학적 사고를 크게 직관적 사고와 논리적 사고로 구분할 수 있다. 우정호는 직관에 대하여 다음과 같이 기술하고 있다.

> 수학의 중요한 분야가 생겨난 수세기 동안 대부분 그에 대한 논리적 전개는 이루어지지 않았으며, 수 체계, 대수학, 해석학의 논리적 기초는 19세기 후반까지 확립되지 않았다는 점은 매우 중요하다. 위대한 수학자의 직관은 논리보다 더 강력하였던 것이다. 직관적인 의미를 갖는 자연수, 분수, 도형 등의 개념은 수용되었으며, 덜 직관적인 무리수, 음수, 복소수, 문자변수, 미적분의 기본개념 등은 창안되거나 수용되는 데 몇 세기가 걸렸다. 수학자들이 그러한 개념을 수용하게 한 것은 논리가 아니라 유추, 물리학적인 의미, 바른 과학적 결과의 획득 등에 의한 논거, 곧 직관적인 증거이었다(우정호, 2000, p. 133).

이는 수학을 공부하는 학생들과 수학교육을 연구하는 사람들에게 많은 시사점을 줄 수 있다. 역사 발생적 원리에 따른 수학교육의 입장에서 보면, 이전에 수학자들이 겪은 어려움을 학생들 또한 똑같이 어려움을 느끼며 수학의 기본 개념을 습득한다고 말할 수 있다. 역사적으로 인류가 음수 개념을 생각해 내는 데 천 년이 걸렸고, 수학자들이 음수 개념을 수용하는 데 천

* 접수일(2009년 4월 13일), 게재확정일(2009년 5월 23일)
* ZDM분류 : A73
* MSC2000분류 : 97D50
* 주제어 : 직관적 사고, 수학문제해결

년이 걸렸다는 사실은 학생들이 수학자들이 하였던 것과 마찬가지로 음수개념에 점진적으로 친숙해짐으로써, 그리고 그것을 다루는 데 있어 직관적인 측면을 이용하여 어려움을 극복해야 한다는 것을 말해준다.

김정환(1974)에 의하면 직관이 교육에 있어 본격적으로 거론되기 시작한 것은 Pestalozzi에 의해서이다. Pestalozzi는 직관이 인식의 절대적인 기초임을 역설하면서, 직관에 호소하는 교육방법이 지적 영역뿐 아니라, 신체적·도덕적 영역에도 확장되어야 한다고 주장하였다. 그는 종래의 학교가 직관을 교육 방법의 기초로 삼고 있지 않고, 인식 수단의 원형을 제공하지 못했으며, 어린이의 자립성을 무시했다고 비판하였고, 이런 폐단을 극복하기 위하여 직관을 교육의 기초에 놓아야 한다고 주장하였다.

Poincaré(1905, 1906, 1908)는 그의 수학연구에 대한 경험에 비추어, 수학분야에서의 발견·발명의 과정에 직관과 논리가 중요한 역할을 하고 있음을 밝히고 있다. 그는 많은 수학자들의 논문을 조사한 후에, 수학자를 기하학자와 해석학자로 나누고 있는데, 기하학자는 직관에, 해석하자는 논리에 바탕을 두고 연구를 수행한다고 말하고 있다. Poincaré는 직관과 논리를 양분된 관계로 보지 않고, 문제해결 과정에서 이들이 상호 보완적인 역할을 한다고 강조하고 있다.

20세기 전반기에 걸쳐 논의 되어온 '직관'은 1950년대 이후로 교육에서의 논의가 사실상 사라졌었다. 그 이유 중의 하나로 이용률, 성현경(1992)은 1950년대부터 시작된 수학교육 현대화 운동의 수학이 갖는 논리적 구조를 중시하여 논리적 엄밀성과 구조 위주의 수학교육을 강조하였기 때문이라고 보았다. 그 이후의 학교 수학교육은 수학 자체를 완성된 지식 체계로서의 수학적 개념 · 원리 · 법칙의 총체로 보고 형식적이고 정형화된 패턴 속에서 수학을 지도함으로써, 수학지식의 형성 과정에서 중요한 역할을 하는 직관을 경시하고 논리적인 측면을 강조해왔다(Nodding & Shore, 1984). 그 결과 학생들은 수학을 공식을 외워 수치를 대입하여 결과 값을 구하는 지루하고 따분한 과목으로 인식하게 되었고, 자신이 학습한 수학적 사실들을 현실 상황에 응용하지 못하는 결과를 초래하게 되었다.

하지만 1980년대 이후의 수학교육은 문제해결의 강조와 실제 현상에서 부딪치는 제반 문제를 학생들이 스스로 분석하고 해결하는 능력을 배양하는 방향으로 전환하였다. 즉, 학생들의 직관, 통찰, 이해, 사고의 원천을 열어 놓으면서 점진적인 형식화가 이루어지도록 함으로써, 결과적으로 현실상황을 수학적 수단으로 조직할 수 있는 응용 가능한 수학 학습이 이루어지도록 하는 수학화를 강조하고 있다(김응태, 박한식, 우정호, 1995; 교육부, 1997).

이와 같이 수학교육에서 직관의 의미가 다시 재조명되고 있음에도 불구하고 인간의 사고 방식중 하나인 직관에 대한 심층적인 연구가 부족한 현실이다.

수학분야에서 직관에 관한 체계적인 연구는 Fischbein(1987)에 의해 이루어졌다. 그는 직관을 자명하고 즉각적인 특별한 형태의 인지작용으로, 생산적인 문제해결 과정에서 필수적인 요소로 간주하고, 논리적 추론의 형식적 구조의 계발과 더불어 직관적 사고의 계발의 중요성을 강조하고 있다. 그의 문제해결과정에서 학생들의 직관적 사고의 분석에 관한 연구는 주로 무한 직관과 관련되어 있다. 또한 Fischbein(1987)의 연구에서 형식적 조작기 이후에도 그 이전의 형성된 직관적 모델이 지속적으로 영향을 미친다는 연구에서 알 수 있듯이, 구체적 조작기에 해당하는 11세-12세까지의 아동들의 직관적 모델이 차후 수학학습에 많은 영향을 미친다. 하지만 선행 연구를 살펴보면 수학 문제해결 과정에서 초등학생들의 직관적 사고분석은 부족한 현실이다.

이에 본 연구에서는 초등학생들의 수학문제 해결과정에서 직관적 사고에 대한 보다 많은 정보를 얻기 위해 예측 직관, 의미론적 직관, 관계적 직관, 무한 직관과 관련된 수학 문제를 해결할 때, 초등학생들의 직관적 사고를 분석하기 위해 질적 연구 방법을 이용하여 학생들의 사고를 분석하고, 분석 결과를 바탕으로 수학교육에서 직관적 사고와 관련된 교수학적 시사점을 도출해 보고자 한다.

2. 연구 문제

본 논문에서 해결하고자 하는 연구 문제는 다음과 같다.

(1) 수학 문제해결 과정에서 초등학교 학생들의 직관적 사고의 발현상태는 어떠한가?

(2) 수학 문제해결 과정에서 초등학교 학생들의 직

관적 사고로 인한 오류의 원인은 무엇인가?

II. 이론적 배경

직관적 사고의 분석을 위한 문헌 고찰로는 Fischbein이 연구를 토대로 직관의 특징과 분류, 직관적 사고의 발현에 중요한 역할을 하는 시각화와 직관적 모델에 대해서 알아본다. 또한 직관적 사고의 오류를 분석하기 위해 직관적 사고의 오류를 일으키는 여러 가지 원인에 대해서도 알아본다.

1. 직관의 특징

직관의 특징은 자명성(Self-evidence), 내재적 확실성(Intrinsic certainty), 고집성(Perseverance), 강제성(Coeriveness), 이론적 위상(Theory ststus), 외삽성(Extrapolativeness), 전체성(Globality), 암묵성(Implicitness) 등을 들 수 있다(Fischbein, 1987, pp. 43-56).

(1) 자명성

자명성은 어떤 진술이 정당화에 대한 필요 없이 스스로 참이라고 느껴지는 성질이다. '전체는 부분보다 크다', '모든 자연수는 연속하는 다음수를 가진다.', '두 점은 하나의 직선을 결정한다.'라는 진술은 형식적인 증명이나 외재적인 정당화가 필요 없이 즉각적으로 받아 들여 지는 자명한 진술이다.

그러나, $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$와 같이 잘 알려진 공식은 자명하지 않다. 이 공식은 대수체계에서 논리적으로 정당화 될 수 있지만, 즉각적으로 받아들여지지 않는다. 이와 같이, 자명성은 제시된 진술을 개개인이 논리적으로 또는 경험적으로 정당화 될 수 있는 사실이 아니다. Fischbein(1987)은 자명성의 근원에 대하여 행동적 의미, 불변성의 인식, 변형의 내적 평형, 자명한 진술의 분석적 특징을 들고 있다.

(2) 내재적 확실성

내재적 확실성은 어떤 진술이 '확실한 것'으로 받아들여진다는 특징이다. 자명성과 확실성이 밀접하게 관련되어 있지만, 같은 의미는 아니다. 피타고라스 정리와 같이, 학교에서 배운 수학의 정리들은 참이라고 확신하지만 자명한 것이 아니듯, 진술이 자명함에 대한 느낌 없이 옳다고 확신되는 경우가 있다.

확신의 느낌은 공식이나 정리, 법칙들이 증명에 의하여, 또한 교과서나 교사의 권위에 의해 얻어진 사실은 내재적 확실성으로 느껴지지 않으며, 직관적으로 받아들여지지 않는다. 반면에, 유클리드 기하의 공리는 가르쳐지기 때문에 받아들여지는 것이 아니라, 내재적으로 확실하기 때문에 직관적으로 받아들여진다. 직관은 개개인에게 내재적으로 확실하게 나타나는 정도에 따라 결정된다.

(3) 고집성

고집성은 한 번 세워진 직관이 매우 강하여 그 직관이 계속해서 유지되는 특징이다. 학생들에게 제공되는 형식 교육은 그들의 직관적인 해석에 거의 영향을 주지 않는다.

예를 들면, 우리가 사는 지구가 구의 모양을 하고 있으며 오랜 기간 동안 공전과 자전을 해 왔고, 지금 이 순간에도 지구는 돌고 있다는 것을 우리는 학교에서도 배웠고, 위성사진, 낮과 밤, 계절의 변화 등을 통해서 알고 있다. 그러나 이것을 직관적으로 받아들이기는 쉽지 않다. 오히려 코페르니쿠스나 갈릴레오 이전의 사람들이 생각했던 것과 같은 지구의 육면체설, 천동설, 수평선의 낭떠러지설이 우리의 직관에 더 적합할 지도 모른다. 가르쳐진 것에 동의할 수는 있지만 쉬게 그것을 내면화 할 수는 없다.

(4) 강제성

강제성은 개개인의 추론 방식에 강제적인 효과를 발휘하여, 어떤 사실이 논리적으로 증명이 된 후에도 이를 받아들이기를 꺼리는 특징이다.

예를 들면, '어떤 직선 밖에 있는 한 점에서 그 직선에 평행한 직선은 오직 하나이다'라는 유클리드 공준은 자명하게 받아들여진다. 따라서 비유클리드 기하에서와 같이 평행선을 하나도 그을 수 없거나 무한히 많이 그을 수 있다든지 하는 것은 직관적으로 받아들여지지 않는다.

(5) 이론적 위상

직관은 하나의 이론이다. 이것은 단순히 주어진 사실에 대한 지각이 아니다. '만나는 두 직선의 맞꼭지각은 같다'라는 명제는 자명하게 인식된다. 그러나 만나

는 두 직선의 상을 인식하면서 맞꼭지각의 크기가 같다는 것을 받아들이는 것은 지각이지, 직관이 아니다. 직관적으로 아는 것은 머릿속에 떠올린 상이 아니라, 특별한 실체를 통하여 불변의 법칙, 원리, 관계의 보편성을 아는 것이다.

(6) 외삽성

외삽성은 어떤 영역에서 타당하다고 입증된 개별 명제나 일반적인 법칙, 명제, 또는 이론 전체를 타당성이 확정되지 않고 단지 가정되어 있는 다른 영역에 적용하는 것이다. Westcott(1968)는 "직관은 개개인의 그 결론에 도달하기 위하여 보통 덜 명확한 정보의 기초 위에서 결론에 도달할 때 일어난다."(Fischbein, 1987, p. 50에서 재인용)라고 쓰고 있다.

(7)전체성

직관은 분석적 사고와는 반대로 전체적이고 종합적인 사고이다. 즉, 직관은 어떤 상황의 전체적인 관점을 제공하는 구조화된 사고이다. 전체성의 특징은 형태심리학의 개념과 유사하다. 직관의 전체성이 형태심리학의 법칙으로부터 유도되었다고 생각하는 것은 전체적인 이미지에 의해 한 상황에서 다른 상황으로 전이가 이루어지기 때문이다. 예를 들면, 각 기둥의 부피가 '밑넓이 × 높이'가 된다는 사실은 각기둥보다 한 차원 낮은 직사각형의 넓이가 '밑변 × 높이'가 된다는 사실에 의하여 얻을 수 있다. 이 경우에 현 상황에서 다른 상황으로의 전이는 전체적으로 공통적인 상황 때문에 일어난다.

(8) 암묵성

직관의 외삽성의 대부분이 무의식적인 방법으로 일어나듯이, 직관은 암묵적인 과정의 구조화된 표현이다. 예를 들면, 동전던지기 시행에서 연속하여 3번의 앞면이 나온 뒤에 4번째 시행에서 앞면이나 뒷면이 나올 가능성에 대하여, 뒷면이 나올 가능성이 앞면이 나올 가능성보다 높다고 판단한다. 이것은 확률적으로 같다는 사실에도 불구하고, 동일한 시행에서 항상 같은 결과가 나타나는 현상은 그렇지 않은 경우보다 나타나기 어렵다는 것이 암묵적으로 내재되어 혼란을 야기하기 때문이다.

2. 직관의 분류

Fischbein(1987)은 직관 인지의 영역을 명확하게 하기 위하여 역할과 기원에 기초하여 직관을 분류하였다. 그는 역할에 의한 직관의 분류로 단정 직관, 추측 직관, 예측 직관, 결정 직관을 들고 있고, 기원에 의한 직관의 분류로 제1직관, 제2직관을 들고 있다. 본 연구에서는 역할과 기원에 기초한 Fischbein의 분류를 살펴보고자 한다(Fischbein, 1987, pp. 57-71).

(1) 역할에 의한 직관의 분류

단정 직관은 '전체는 각각의 부분보다 크다'와 같이 확실하고 자명하게 받아들여지는 사실의 표현과 해석이다. 단정 직관은 의미론적 직관, 관계적 직관, 추론적 직관으로 세분할 수 있다(Fischbein, 1987).

의미론적 직관은 개념 의미와 관련 있다. 예를 들면, 기하에서 직선의 개념은 "직선은 폭이 없는 길이다"와 같이, 주어진 공리 체계에 따라 반 직관적인 공리적 의미를 다룬다. 그러나 두 점 사이의 거리가 가장 짧은 길이라든가, 불빛과 관련된 직선의 개념은 직관적인 의미를 가진다.

관계적 직관은 서로의 관계를 표현하는 자명하고 자기 일관적인 진술로 표현된다. 예를 들면, 서로의 관계를 나타내는 '전체는 각각의 부분보다 크다'와 같은 진술은 자명하고 확실하게 받아 들여 진다.

추론적 직관은 연역적이거나 귀납적인 구조를 갖는다. 귀납적인 추론적 직관의 예를 들면, 어떤 성질이 '자연수 n에 대하여 성립 한다'라고 할 때, n=1, n=2, n=3인 경우에 성립하면, 이 경우를 자연수 전체로 일반화 하려는 것이다. 연역적인 추론적 직관의 예는 Poincaré(1905)에 의해 언급된 직관을 들 수 있다. "점 C가 점 A와 B사이에 있고, 점 D가 점 A와 C사이에 있다면, 점 D는 점 A와 점 B사이에 있을 것이다."(Poincaré, 1905; 김형보, 1983, p. 65) 이 진술은 논리적 추론에 근거하지만, 전제와 결론사이의 관계가 자명하게 받아 들여 진다.

또한, Fischbein(1987)은 단정 직관을 근원 직관과 개인적 직관으로 구분하고 있다. 근원 직관은 공간이나 시간 표상, 기본적인 물리적 성질과 관련된 직관과 같이, 사람에게 자연적으로 계발 될 수 있는 표현과 해석이다. 개인적 직관은 개인의 생활이나 삶과 관련

하여 취득한 것으로 보는 직관이다.

추측 직관은 미래의 사건에 대하여, 또는 어떤 현상의 과정에 대하여 본연의 가정에 의해 표현된다. 이러한 추측은 확신의 느낌과 결합할 때만 비로소 직관이 된다. 추측 직관은 '그는 성공할 것이다'와 같이 일상적인 경험에 기반을 둔 비 전문가적 직관과 특별하고 전문적인 영역에 기반을 둔 전문가적 직관으로 나눌 수 있다.

예측 직관은 문제에 대한 완전한 해를 산출하는 예비적이고 전체적인 견해를 나타낸다. 예측 직관은 문제해결 영역에서 자주 언급되어진다. 단정 직관이 직선의 개념이나 유클리드의 제5공준과 같이 자명함으로써 받아들여지는 사실의 표현이나 해석인 반면에 예측 직관은 발견으로서, 문제에 대한 해법으로서, 그리고 사전에 문제해결에 대한 노력의 갑작스런 결과로서 나타난다. 또한, 추측 직관은 체계적인 문제해결 활동에 포함되지 않는 평가나 추측인 반면에, 예측 직관은 문제해결 과정에서 나타난다.

예측 직관은 문제를 해결하려고 노력하는 도중에, 통찰의 순간으로 그리고, 확실하고 명백하며 포괄적인 진리로서 나타난다.

결정 직관은 앞서 노력한 문제의 해에 대한 전체적이고 체계화된 통찰력이다.

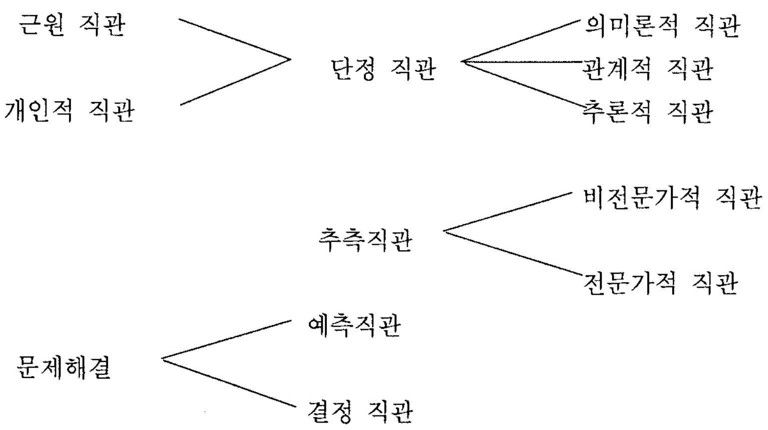
이상에서, Fischbein(1987)에 의해 제시된, 역할에 따른 직관의 분류를 <그림 Ⅱ-3>와 같이 정리 할 수 있다.

(2) 기원에 따른 직관의 분류

제1 직관은 일상적인 개인의 경험에 바탕을 두고 발전하는 직관으로, 개인이 독자적이고, 독립적으로 발전시키는 인지적 신념과 관련된다. 따라서, 제1 직관에는 근원 직관이나 개인적 직관이 포함되어진다. 제1 직관은 주로 Piaget의 용어로 전 조작적이거나 조작적인 것이다. 5세 아동이 원소의 수를 비교할 때, 열의 길이에 의하여 판단을 하지, 일대일 대응에 의하여 판단하지 않는 것은 전 조작적 직관의 예이다. 또한 6-7세 이후에 나타나는 새로운 직관을 소유한 아동들은 같은 문제의 경우에 일대일 대응 관계를 직관적으로 이해하고 사용한다. 이러한 해석은 아동의 반응이 전 조작적이거나 조작적이라 할지라도 아동에게 자명하게 받아들여진다(이대현, 2001).

제2 직관은 본래의 근원이 없는 새로운 직관을 계발 할 수 있다는 가정을 함의하며, 개인의 경험에서 나타나는 직관이 아니다. 제2 직관은 학교교육을 통하여 직관을 계발 할 수 있다는 사실을 시사한다. 만약 수학자들에 의해 '무한 집합과 그의 진 부분 집합은 동치이다'라는 진술이 하나의 신념으로 받아들여진다면, 그 진술은 내재적으로 확실한 개념으로 받아들여져서 제2 직관이 형성된 것이다.

제1 직관과 제2 직관의 구별은 절대적인 것이 아니다. 이것은 기본적이고 자연스럽게 요구된 개념의 직관으로부터 아주 복잡하고 반 직관적인 개념들의 직관까지 연속적인 것으로 보아야 한다.



<그림 Ⅱ-3> 직관의 분류(Fischbein, 1987, p. 64)

3. 직관의 오류

문제해결 과정에서 나타나는 학생들의 오류는 직관에 의해 나타나는 오류 외에 여러 가지 원인이 있을 수 있으나, 본 연구에서는 직관적 사고의 오류를 분석하는 것이 목적인 바, 이대현(2001)이 분석한 직관적 사고에 의한 오류의 원인으로 들고 있는 직관 자체의 특징으로 인해 나타나는 오류, 시각화의 영향으로 나타나는 오류, 인식론적 장애로 인한 오류, 교수학적 영향으로 인한 오류를 살펴보도록 한다.

Ⅲ. 연구 방법

본 연구의 목적은 수학 문제해결과정에서 초등학교 학생들의 직관적 사고와 직관적 사고의 오류를 분석하는 것이다. 이를 위하여 지필 검사와 면담 조사를 실시하였다.

지필 검사를 위하여, 초등학교 학생들의 직관적 사고를 분석하기 위한 '직관적 사고 검사 문항'을 제작하였다. '직관적 사고 검사 문항'은 학생들이 검사 문항에 자유롭게 반응하도록 하였고, 학생들의 지필 검사 문항을 해결하는 과정을 캠코더를 이용하여 녹화하며, 관찰록을 이용하여 연구 대상의 행동을 기록하였다. 지필 검사지와 관찰록에 나타난 결과를 분석한 후에 개별 면담을 실시하였으며, 개별 면담자료는 초등학교 학생들의 직관적 사고를 분석하는 데 활용하였다.

1. 연구 대상

연구 대상은 서울 소재 K초등학교 6학년 학생 4명을 선정하였다. 문항의 특성상 확률(문항 7번)을 계산할 수 있어야 하므로 6학년 아동을 선정하였다.

2. 연구 절차

가. 연구 시기

· 지필 검사 및 면담 검사 : 2006년 2월 6일 - 2006년 2월 7일

· 자료 수집 및 정리 : 2006년 2월 8일 - 2006년 2월 15일

<표 III-1> 직관적 사고 검사 문항의 구성

번호	문항선정의도
1	도형의 회전을 이용하여 직관적으로 문제해결의 단서를 파악할 수 있는가?
2	$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\cdots$ 을 직관적 모델을 이용하여 해결할 수 있는가?
3	도형의 회전을 이용하여 직관적으로 문제해결의 단서를 파악할 수 있는가?
4	교수학적인 영향에 의해 학생들이 분수의 통분을 사용하는 직관의 오류가 발생하는가?
5	시각적으로 제시된 문제의 조건이 학생들에게 직관의 오류를 일으키는가?
6	시각적 모델을 사용하여 문제해결의 단서를 직관적으로 발견할 수 있는가?
7	동전 던지기의 무작위 과정을 통해 직관적 사고에 의해 어떤 오류를 일으키는가?
8	교수학적필요에 의해 도입된 동수 누가 모델이 직관적 사고에 끼친 영향은 무엇인가?
9	토너먼트 경기에서 총 경기 수는 우승팀을 제외한 팀의 수와 같다는 직관적 사고가 발현되는가?
10	같은 높이를 갖는 두 도형에서 길이성분의 변화가 직관적 사고에 의해 어떤 오류를 일으키는가?

· 자료 분석 및 목록화 : 2006년 2월 15일 - 2006년 4월 30일

나. 지필 검사

지필 검사는 초등학교 학생들의 직관적 사고를 분석하기 위한 '직관적 사고 검사 문항'을 제작하였다. '직관적 사고 검사 문항'은 학생들이 검사 문항에 자유롭게 반응하도록 하였고, '직관적 검사 사고 문항'에 답을 하고, 그 답에 대한 이유나 과정을 설명하는 과정으로 실시하였다.

본 검사에서 사용된 검사 문항은 Fischbein(1987), Fischbein, Tirosh & Hess(1979), Fischbein, Tirosh & Melamed(1981)의 연구에서 이용된 문항과 연구자가 개발한 문항으로 구성된 '직관적 사고 검사 문항'이다. (부록1) 제작된 '직관적 사고 검사 문항'의 구성은 <표 Ⅲ-1>와 같다.

다. 관찰록

참여 관찰록은 연구 대상자들이 수학 문제해결과정에서 보이는 행동이나 대화, 검사 장소나 주위 환경을 기록하는 것으로써, 질적 연구에 있어서 타당도를 높여주는 하나의 방법인 삼각 검증법의 자료를 제공해준다. 본 연구에서의 관찰록은 참여 관찰록이 아니라 연구 대상자들의 수학 문제해결과정에서 나타나는 행동을 주된 관심을 두고 작성한 것이므로 관찰록이라 한다. 관찰록은 면담만으로는 알 수 없는 행동이나 행동을 통한 사고 과정을 유추 해 볼 수 있게 한다. 관찰록의 서술적 부분에는 다음과 같은 항목들이 바람직하다고 한다.(Bogdan & Biklen, 1992)

· 연구 대상자(들)의 묘사 : 신체적 특징, 행동적 특성 등

· 대화의 재구성 : 현장 연구에서 연구자와 연구 참여자가 나눈 대화를 기록하는 것

· 장소의 묘사 : 연구 현장에 대한 기술

· 사건이나 활동의 서술 : 일어난 사건이나 활동에 대해서 누가 관련 되었고, 어떤 일이 일어났는지 등을 기술

· 연구자의 행동 기록 : 연구자가 연구를 수행하면서 나타낸 행동 등

라. 면담 조사

지필 검사만으로는 초등학교 학생들의 직관적 사고 과정을 파악하는데 어려움이 있다고 판단하여 임상적 개별 면담을 실시하였다. 연구 대상자들의 사고 과정의 파악을 위하여 지필 검사가 끝나면 10분의 휴식 후 면담 조사를 실시하였다. 면담자는 학생들의 지필 검사 문항의 응답을 확인 후 관찰록에 기술한 내용을 바탕으로 연구 대상자들에게 질문을 하고, 응답하는 형태로 이루어 졌으며, 모든 과정은 캠코더로 녹화 후 자료를 분석하였다.

3. 자료 분석 방법

자료 분석은 Bogdan 과 Biklen(1982, pp.146-169)의 질적연구 방법론을 기초로 하였다. 즉 예비 코드 만들기(developing preliminary codes), 목록화 및 코드 분류하기(listing and sorting codes), 범주화 하기(reducing and categorizing codes)의 3단계를 거쳤으며, 질적 연구의 타당성을 높이기 위해 삼각 검증법(Triangulation)을 이용하였다.

가. 1차 분석 및 예비 코드 (Developing Preliminary Codes)

대상 아동 4명의 지필 검사지를 문항별로 읽어 보았다. 문제들 사이에 발생하는 분석관점에 주는 영향을 최소화하기 위해 하나의 문항의 분석이 끝난 후 다음 문항의 분석을 실시하였다. 체계적인 분석을 위하여 면담 내용을 문서화한 자료에 예비 코드를 부여하였다. 예비 코드의 체계는 다음과 같다.

<표 Ⅲ-2> 예비 코드 체계

J	S	-	01	001
학생의 이니셜	S : 학생의 반응 T : 연구자의 질문		문항번호	반응의 순서

나. 목록화 및 코드 분류하기(Listing and Sorting Codes)

각 문항별로 부여한 예비 코드를 기준으로 한 분석 내용 중 '직관적 사고'를 검사하기 위한 문항과 '직관적 사고의 오류'를 검사하기 위한 문항으로 나누어 면담 자료를 컴퓨터에 각각 개별적인 폴더를 만들어 분류하

였다. 문항별 하위 폴더를 만들어 학생들의 반응에서 반복적으로 나타나는 사고의 특성을 분류하였다. 이는 문항 간 또는 문항별로 유사한 반응을 살피기 위함이다.

다. 범주화 하기(Reducing and Categorizing Codes)

학생별, 문항별로 분류한 코드를 학생들이 발현한 직관의 종류에 따라 범주화를 실시하였다. 학생들의 '직관적 사고' 를 검사하기 위한 문항 1, 2, 3, 6, 9번 문항을 직관적 사고의 유형에 따라 범주화 한 내용을 아래 <표 Ⅲ-3>에 정리하였다.

<표 Ⅲ-3> 직관적 사고의 유형에 따른 분석 대상 문항

문항	예측 직관	무한 직관	관계적 직관	결정 직관
1	○	-	○	-
2	○	○	-	-
3	○	-	○	-
6	○	-	-	○
9	○	-	○	-

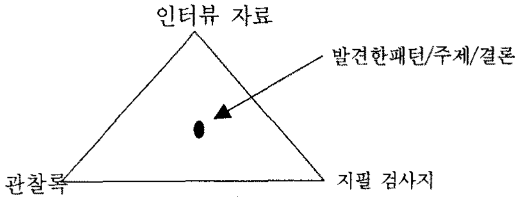
또한 직관적 사고의 오류를 분석하기 위한 문항 또한 학생별, 문항별로 분류하고 '직관적 사고의 오류'의 종류에 따라 범주화 하였다. 범주화한 내용을 <표 Ⅲ-4>에 정리하였다.

<표 Ⅲ-4> 직관적 사고의 오류에 따른 분석 대상 문항

문항	직관의 특징의 영향	시각화의 영향	인식론적 장애의 영향	교수학적 영향
4	-	-	○	○
5	-	○	-	○
7	○	-	-	
8	○	-	-	○
10	○	○	-	-

라. 삼각 검증법(Triangulation)

질적 연구에서는 객관적인 통계적 자료가 아니라 모든 자료가 의미와 주관성을 지니는 낱말이나 문단이므로 발견한 패턴이나 주제 또는 결론에 대해서 어떻게 타당성 있는 증거 자료를 제시해야 하는가가 중요한 문제이다. 이를 해결하기 위해서 서로 다른 여러 종류의 자료를 제시해야 한다. 본 연구에서는 지필 검사지, 관찰록, 인터뷰 자료를 통하여 분석 및 논의 한다.



<그림Ⅲ-1> 삼각 검증법의 과정

이러한 삼각 검증법은 다음과 같은 장점을 가지고 있다(조정수, 2002).

(1) 다양한 증거 자료의 제시로 어떤 특정한 자료 수집 방법이 지닐 수 있는 결점을 메워준다.

(2) 여러 증거 자료가 동일한 결론을 지지하고 있다면, 그 결론에 대한 신뢰성을 증가한다.

(3) 여러 증거 자료가 동일한 결론을 지지 하지 못하고 있다면, 추후 연구를 위한 중요한 의문점을 제공한다.

Ⅳ. 분석 및 논의

본 장에서는 지필검사와 면담조사, 관찰록 등에서 얻은 자료를 바탕으로 초등학교 학생들의 수학문제해결 과정에서의 직관적 사고를 연구문제에 따라 두 범주로 나누어 분석하였다.

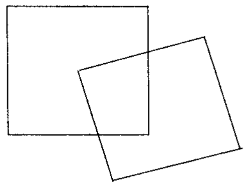
1. 수학문제해결과정에서 초등학생들의 직관적 사고 분석

수학 문제해결 과정에서 초등학생들의 '직관적 사고'의 특징을 알아보기 위한 문항은 1, 2, 3, 6, 9 번 문항이다. 문항별로 학생들의 반응을 분석하면 다음과 같다.

가. 문항 1

(문제) 정사각형 모양의 종이가 있습니다. 이 정사각형의 두 대각선이 만나는 점 위에 같은 크기의 정사

각형의 한 꼭지점이 오도록 놓으면, 겹처지는 부분의 넓이는 원래 정사각형 넓이의 몇 배입니까?



이 문항의 정답은 "1/4배" 이다. 이 문항의 선정 의도는 시각적 모델로 제시되어 있는 문제해결과정에서 학생들이 직관적으로 문제해결의 단서를 발견할 수 있는가와 직관적 사고를 통항 학생들의 시각적 모델 사용 경향을 알아보기 위한 것이다.

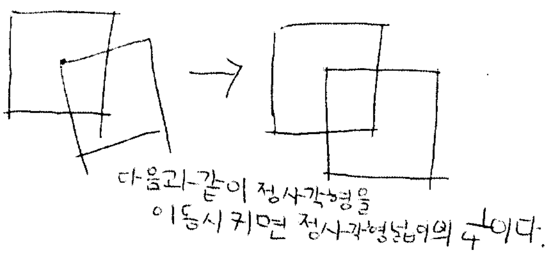
이 문항에서 학생들이 문제를 읽고 즉시 도형의 회전을 이용하여 산술적 풀이 없이 답이 "1/4배"라는 것을 알아내면, 예측직관을 사용하여 문제를 해결하였음을 예상할 수 있다. 그런데 실제 학생들의 반응을 살펴보면, 4명의 응답자 중 3명이 "1/4배"라는 답을 직관적 사고를 이용하여 즉시 구했음을 알 수 있다 (KS-01001, JS-01001, MS-01001). 다음은 이와 같은 반응을 보인 J군과의 면담내용과 J군의 지필검사지의 반응이다 (<그림 Ⅳ-1> 참조).

JT-01001 : 문제를 보는 순간 답을 바로 1/4 배라고 적었는데, 문제를 읽고 바로 해결 할 수 있었니?

JS-01001 : 네, 도형을 돌리면 바로 알 수 있어요.

JT-01002 : 답이 확실하다고 생각하니?

JS-01002 : 네.



<그림 Ⅳ-1> 문항 1에 대한 J군의 반응

또한 문제해결의 단서는 예측직관에 관련된 직관으로서 완전히 형식적이지는 않을지라도, 내재적 확실성의 느낌과 즉시성과 관련지어진다(Fischbein, 1987). 이 문항에서 학생들이 사용한 직관적 사고의 방법에 대하여 문제의 답이 확실한가를 재차 묻는 물음에 자신이 답이 확실하다고 답하는 것(KS-01004, JS-01002, MS-01002)으로 보아 직관적 사고인 예측 직관을 사용한 문제해결은 내재적 확실성이 강한 것으로 나타났다.

나. 문항 2

(문제) 분자가 1인 단위분수를 다음과 같이 끝없이 더하였을 때, 답을 얼마라고 추측할 수 있겠습니까?

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} \cdots\cdots$$

이 문항의 정답은 "2"이다. 이 문항의 선정 의도는 문제해결 과정에서 시각화를 이용한 직관적 모델을 구안할 수 있는가와 학생들의 실 무한 개념과 잠재적 무한 개념에 대한 사고를 분석하기 위한 것이다. 또한 초등학교에서는 학생들에게 무한에 대한 개념을 가르치고 있지는 않지만 학생들이 이미 실생활과 서적을 통하여 잠재적으로 무한의 개념을 접한 상황이기 때문에 무한 직관이 초등학생들에게 어떻게 나타나는가를 알아보기 위해 실시하였다.

이 문항의 방응을 분석한 결과 이대현(2001)과 박현주(2004)의 연구 결과에서는 보이지 않던 정답 유형을 알아 낼 수 있었다. 이대현의 연구에서 고등학교에 재학 중인 215명과, 박현주의 연구에서 초등학교 5, 6학년 학생 500명에서 볼 수 없었던 반응인 직관적 모델을 구안한 학생이 K군과 J군이 있었다. K군은 산술적 풀이로 문항을 해결하지 못하자 직관적 모델을 구안하여 답을 구하였다(<그림 Ⅳ-2>참조).

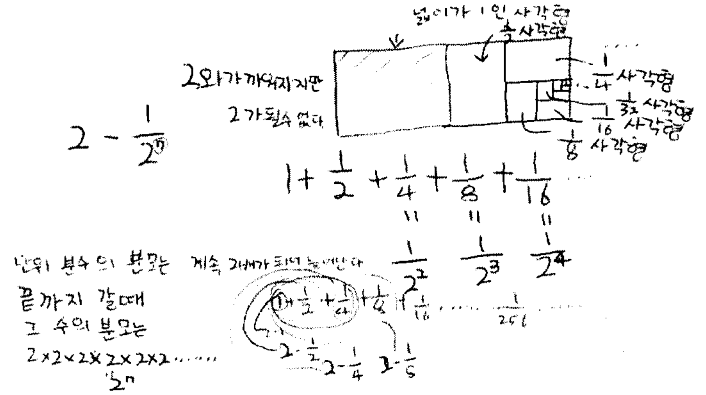
다음은 면담과정에서 보인 K군의 반응 중 일부분과 지필검사지에 나타난 응답이다.

KT-02010: 식을 세워서 이유를 설명하다가 끝까지 하지 못하고 그림을 그려 설명을 했는데 왜 그랬니?

KS-02010: 식으로는 답에 대한 이유를 설명할 수가 없어서요. 그래서 그림으로 식으로 쓴 이유를 뒷받침 하려고요.

KT-02011: 그림을 사용하고 나니깐 답에 대한 확신이 들었니?

KS-02011: 네.



<그림 IV-2> K군의 직관적 모델

K군은 산술적으로 주어진 식의 합이 "$2-\dfrac{1}{2^n}$"라는 식을 세웠으나, 자신의 풀이의 타당성을 주장하기 위해 풀이를 쓰려하다가 포기하고, 위에서 보이는 것처럼 시각적 모델을 사용하여 "2"에 가까워짐을 증명하였다. 이는 논리적 사고와 직관적 사고의 상호 보완 관계를 잘 보여준다. 또한 J군은 면담과정에서 문제 해결의 충분한 시간을 주자 직관적 모델을 구안하였다 (JS-02005). 다음은 J군의 면담과정에서 나타난 반응 중 일부분과 지필검사지에 나타난 시각적 모델이다 (<그림 IV-3> 참조).

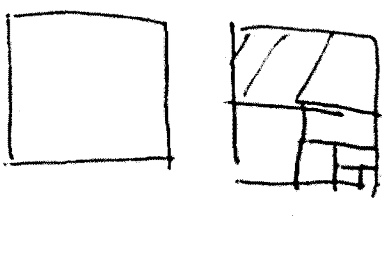
JT-02005: 그럼 다른 방법으로 이 문제를 풀 수 있는 방법은 없을까?

JS-02005: 그림으로 풀 수 있을 것 같아요.

(그림을 이용하여 풀이과정을 설명함)

JT-02006: 그런 그림대로 계속 더해 나간다면 2가 될 수 있을까?

JS-02006: 될 것 같아요. 그런데 계속 더 해가니깐...



<그림 IV-3> J군의 직관적 모델

이는 학생들에게 다양한 사고의 기회를 부여해 주기만 한다면, 학생들은 다양한 직관적 사고의 발현과 직관적 모델을 구안할 수 있음을 시사한다.

또한 이 문항의 경우 응답자들이 문제의 제시 방법이 식으로 주어져 있어 문제를 해결하기 위한 첫 시도를 대부분 산술적인 방법으로 해결하려 하였다 (KS-02001, JS-02001, LS-02002). 이는 문제의 제시 방법이 학생들의 문제 접근 방법에 영향을 미침으로써 학생들의 직관적 사고를 방해 할 수 있음을 보여 준다. 또한 학생들은 '끝이 계속 커질 것이다.'라는 잠재적 무한 개념이 성립되어 있음을 확인했다(KS-02002, JS-02006, LS-02005). 다음은 잠재적 무한 개념이 성립되어 있음을 보여주는 면담과정의 반응들이다.

KT-02002: 왜 '2'가 되기 위해서라는 생각이 들었니?

KS-02002: '2'에 가까워지는 것 같아요.

JT-02006: 그런 그림대로 계속 더해 나간다면 2가 될 수 있을까?

JS-02006: 될 것 같아요. 그런데 계속 더 해가니깐…

LT-02004: 끝없이 더한 것이기 때문에 '답도 한 없이 커질 것이다' 라고 답을했는데 왜 그렇게 생각했니?

LS-02004: 한 없이 계속 더해 나가니까요.

LT-02005: 계속 더해나간다면 답도 계속 커질 것이다?

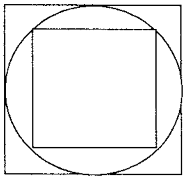
LS-02005: 작게라도 계속 커질 것 같아요.

Tirosh(1999)의 연구에 의하면 학생들이 그들이 갖고 있는 무한 개념에 대하여, 새로 도입되는 무한 개념이 모순적이거나, 그들이 가지고 있는 무한에 대한 개념 이미지와 일치하지 않은 경우에 무한의 성질을

쉽게 인식하지 못한다는 결과가 나와 있다. 그런데 이와 같은 잠재적 무한 개념은 실 무한 개념과 모순을 일으켜 후에 학생들이 실 무한 개념을 학습할 시에 갈등을 일으킬 수 있다는 것을 예상할 수 있다.

다. 문항 3

(문제) 다음 그림과 같이 하나의 정사각형 안에 원이 꽉 차 있고, 그 원 안에 작은 정사각형이 꽉 차 있습니다. 작은 정사각형의 넓이는 큰 정사각형의 넓이의 몇 배입니까?



이 문항의 답은 "1/2배" 이다. 이 문항은 초등학생들이 문제해결 과정에서 문제 해결의 단서를 즉각적으로 발견할 수 있는가를 알아보기 위한 것이다. 문항1과 유사한 문제로서 문항1이 두 도형의 관계를 예측 직관을 통해 해결하는 문항이라면 문항3은 세 도형간의 관계를 예측 직관을 통해 파악하는 것으로서 직관의 즉시성과 관련되어 진다. 즉시성은 주로 시각화와 관련되어지고, 시각화된 이미지는 의미 있는 구조로 즉각적으로 데이터를 조직하고, 답에 대한 단서를 제공한다. 즉 적절한 인지활동에 작용하는 시각화는 직관적 이해에 기여하는 필수 요인이다(Fischbein, 1987).

이 문항에서 학생들이 내접 사각형을 45° 회전시키면 정답을 쉽게 발견한 경우 즉각적으로 문제해결의 단서를 파악하여 예측 직관이 발현된 것으로 볼 수 있다. 그러나, 문항에 응답을 한 모든 학생이 논리적 사고를 바탕으로 한 산술적 풀이방법을 택하여 문제를 해결하였다(KS-03001, JS-03002, LS-03001). 다음은 면담과정에서 나타난 K군의 반응이다.

KT-03001: 작은 정사각형의 넓이를 n×n÷2라고 했는데 그 이유는 무엇이니?

KS-03001: 큰 정사각형의 한 변의 길이를 n이라 하면 작은 정사각형의 대각선의 길이가 되니깐 작은 정사각형의 넓이는 마름모의 넓이를 구하는 방법으로 구하면 n×n÷2가 되요.

KT-03002: 다른 풀이 방법은 없을까?

KS-03002: (대답없음)

KT-03003: 그럼 이 문제를 보자마자 '작은 정사각형의 넓이를 구하면 되겠구나' 라는 생각이 들었니?

KS-03003: 네

이는 1번 문항의 결과와 다른 결과이다. 이는 앞에서도 진술한 바와 같이 문항1이 산술적 방법의 어려움을 알고 시각적 모델을 사용하여 문항1을 해결한 반면, 문항3은 산술적 방법으로 풀이가 가능한 경우 산술적 방법을 선호함을 알 수 있다(KS-03002, JS-03004, LS-03001, MS-03004). 다음은 면담과정에서 나타난 J군과 L군의 반응 중 일부분이다.

JT-03004: 만약 식으로 문제를 푼 답과 그림으로 문제를 푼 답이 틀릴 경우에는 어떤 방법으로 구한 답을 적을래?

JS-03004: 식으로 푼 답이요.

JT-03005: 왜?

JS-03005: 식으로 풀면 정확한 답을 구하니까요.

LT-03001: 문제는 그림으로 주어져 있는데 식을 사용하여 구하려고 한 이유는 무엇 때문이니?

LS-03001: 넓이를 구해서 비교하려고요.

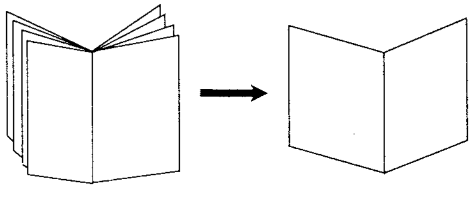
LT-03002: 그럼 항상 넓이에 관한 문제가 나왔을 경우에는 넓이의 값을 구해서 문제를 해결하니?

LS-03002: 네.

이는 학생들이 학교수학에서 문제에 도형에 대한 넓이 문제가 나오면, 교수학적 영향으로 인하여 도형의 넓이를 구하려 하며, 수치를 사용한 도형의 넓이를 구하는 것이 답에 대한 확신감을 높이는 것으로 예상할 수 있다(KS-03003, JS-03005, LS-03006).

라. 문항 6

(문제) 신문이 다음과 같이 포개어져 있습니다. 그런데 한 장의 종이를 꺼내었더니 한 면에는 8쪽이 다른 한 면에는 21쪽이라고 써져 있었습니다. 이 신문은 원래 몇 쪽짜리 신문이었을까요?



이 문항의 답은 "28쪽'이다. 이 문항은 학생들이 문

제에 제시된 시각적 이미지를 보고, 문제해결의 단서를 즉각적으로 발견할 수 있는가를 알아보기 위한 것이다. 이 문항의 경우 문제의 조건을 상세히 시각적 이미지를 사용하여 제시하였으나, 응답자의 절반은 시각적 모델을 사용한 직관적 사고가 발현되었고, 절반은 시각적 이미지는 문제해결의 단서가 아닌 문제이해의 과정에서만 사용함을 확인할 수 있었다(KS-06001, *MT-06001: 다음은 산술적 방법을 사용한 K군의 면담 내용의 일부분이다.*

KT-06001: 문제를 읽고 바로 풀이 방법이 떠올랐니?

KS-06001: 일단 신문을 보면 1면과 끝 면(n)이 같이 있고, 2면과 n-1면이, 그리고 3면과 n-2면이 같이 있어요. 따라서 8면과 n-7면이 같이 있으니깐 n-7=21, n=28이 예요.

하지만 이는 달리 생각하면 시각적 모델이 학생들의 문제이해나 개념 형성 단계 시에 학생들에게 도움을 줄 수 있음을 시사한다. J군의 경우 풀이과정에서 신문을 한 번 다시 그려 봄으로써 문제의 이해와 함께 문제해결의 단서를 즉각적으로 찾아내었다(JS-06002). 다음은 J군의 지필 검사지에 나타난 반응이다(<그림 Ⅳ-4> 참조).

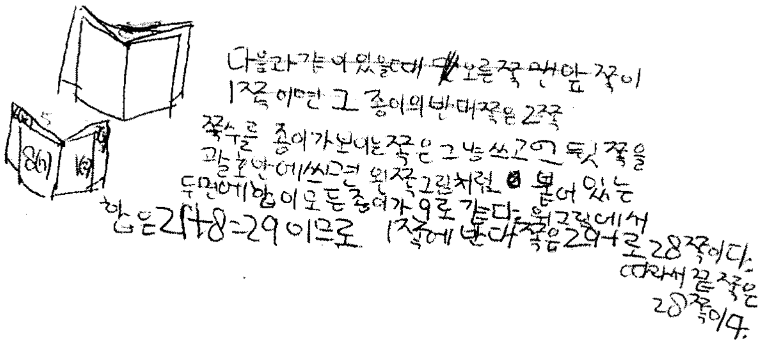
이는 학생들이 문제를 시각적 모델을 사용하여 표현해보는 활동이 문제의 이해뿐만이 아니라 문제해결에 있어서도 영향을 미침을 알 수 있다.

마. 문항 9

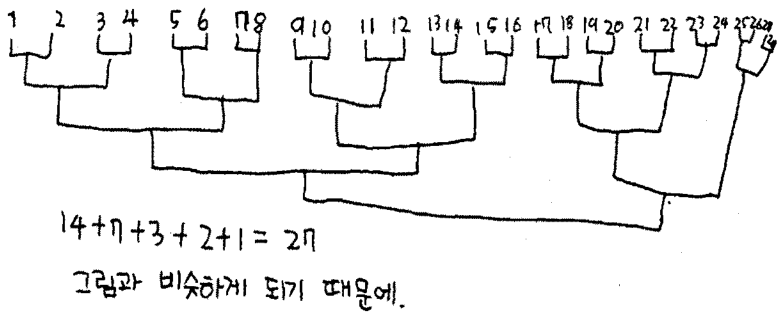
(문제) 테니스 대회에 28명이 참가하였습니다. 이 대회는 토너먼트로 경기를 진행한다고 합니다. 이 대회에서 우승자를 가리려면 몇 번의 경기를 하여야 합니까?

(단, 토너먼트 경기란 경기에서 진 사람은 무조건 탈락되는 경기방식을 말합니다.)

이 문항의 답은 "27번"이다. 이 문항의 선정 의도는 '토너먼트 경기에서 총 경기수가 우승팀을 제외한 팀의 수와 같다'는 직관적 사고가 어느 정도 발현되는가와 이 문제의 문제해결 과정에 학생들은 직관적 모델을 이용하는가를 알아보기 위한 것이다.



<그림 Ⅳ-4> 문항 6에 대한 J군의 반응



<그림 Ⅳ-5> 문항 9에 대한 M군의 반응

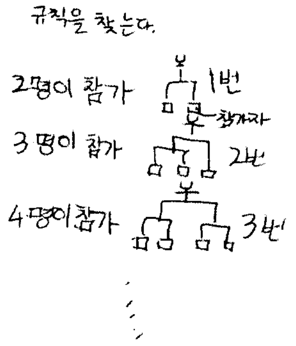
이 문항의 경우, 학생들은 문제해결의 단서를 즉각적으로 판단해 내거나, '경기 대진표'와 같은 직관적 모델이나 산술적인 풀이 방법을 이용할 수 있다. 검사결과 응답자 전원이 '경기 대진표'와 같은 직관적 모델을 사용하여 응답을 하였다(KS-09001, JS-09002, LT-09005, MS-09001).

다음은 M군의 지필검사에 나타난 반응이다(<그림 Ⅳ-5> 참조).

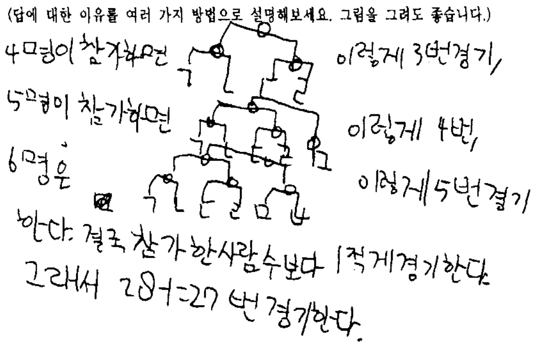
이는 선행연구인 이대현(2001)의 250명의 응답자 중 27.3%가 대진표를 이용하여 푼 결과와는 다른 결과를 나타내고 있다. 이와 같은 결과는 초등학교의 '여러 가지 방법으로 문제해결하기' 단원에서 학생들에게 문제해결의 전략을 가르친 교수학적 결과이다. 대진표를 이용하여 문제를 해결하는 활동을 학생들이 이전에 경험해 봄으로써 그 방법을 이용하려는 경향이 강한 것이다.

또한 K군과 J군은 대진표의 전부를 그리는 것이 아니라 몇몇의 대진표를 그린 후 문제해결의 단서인 '전체 참가 팀 수-1'이라는 규칙을 즉각적으로 발견하여 문항3의 분석 결과에서 지적하였듯이 시각화된 이미지가 학생들의 인지활동에 긍정적인 영향을 미쳤음을 알 수 있고, 더 나아가 논리적 사고와 직관적 사고가 상호보완 작용을 할 수 있음을 시사하고 있다.

아래 그림은 직관적 모델을 사용하여 규칙을 발견한 K군과 J군의 응답이다(<그림 Ⅳ-6>, <그림 Ⅳ-7> 참조).



<그림 Ⅳ-6> 문항 9에 대한 K군의 반응



<그림 Ⅳ-7> 문항 9에 대한 J군의 반응

선행연구인 이대현(2001)의 연구에서는 이 문항에 대하여 즉각적으로 문제해결의 단서를 파악하여 문제를 해결할 수 있는 직관적 사고에 의한 문제해결 능력이 현저히 낮다는 사실과 학생들이 문제를 해결할 때, 우선적으로 '계산'을 하려한다는 의지가 강하다는 사실을 알 수 있다고 하였으나, 이는 초등학생과 고등학생의 차이에서 오는 결과라고 추측할 수 있다.

초등학교 때의 직관적 사고의 발달이 중 고등학교를 거치면서 논리적 사고를 바탕으로 한 산술적인 방법을 택하게 하지 않았나를 고려해 볼 수 있을 것이다.

2. 수학 문제해결과정에서의 직관적 사고의 오류 분석

초등학생들의 수학 문제해결과정에서의 '직관적 사고'의 오류를 분석하기 위하여 사용한 문항은 4, 5, 7, 8, 10번 문항이다. 문항별로 학생들의 반응을 분석하면 다음과 같다.

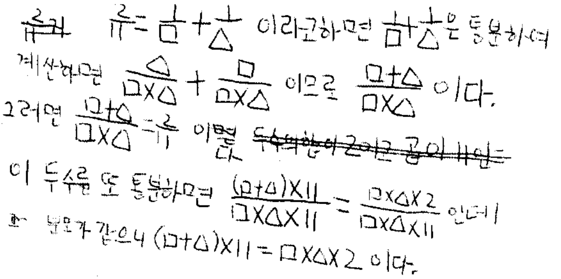
가. 문항 4

(문제) 분수 $\frac{2}{11}$를 분자가 1인 서로 다른 분수들의 합으로 나타내시오.(예, $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$)

이 문항의 답은 1/6+11/66 등 여러 가지이다. 이 문항의 선정 의도는 교수학적 원인에 의해 학생들로 하여금 분수 문제는 통분을 먼저 생각하게 하는 고집성

이 나타나지는 않는가를 알아보기 위한 것이다. Fischbein(1987)의 의하면 직관의 특징 중 고집성에 기인하여 교수학적 원인에 인해 학생들이 직관적 사고에 오류를 일으킨다고 하였다. 이 문항에서는 학생들이 분수의 합은 통분을 사용하여 해결하려 하는 경향을 나타내면, 교수학적 영향에 의하여 학생들의 다양한 사고를 방해한다고 볼 수 있다. 그런데 검사결과 모든 학생이 이 문항을 분수의 덧셈식으로 주어진 예를 보고 가장 먼저 통분을 생각하였다(KS-04003, JS-04002).

다음은 지필검사지에 나타난 J군의 반응이다(<그림 Ⅳ-8> 참조).


~~$\frac{2}{11}$과~~ $\frac{2}{11}=\frac{1}{□}+\frac{1}{△}$ 이라고하면 $\frac{1}{□}+\frac{1}{△}$은 통분하여 계산하면 $\frac{△}{□×△}+\frac{□}{□×△}$ 이므로 $\frac{□+△}{□×△}$ 이다.
그러면 $\frac{□+△}{□×△}=\frac{2}{11}$ 이렇다. ~~두수의합이 2이고 곱이 11인~~
이 두수를 또 통분하면 $\frac{(□+△)×11}{□×△×11}=\frac{□×△×2}{□×△×11}$ 인데
분모가 같으니 $(□+△)×11=□×△×2$ 이다.

<그림 Ⅳ-8> 문항 4에 대한 J군의 반응

이는 학생들이 문제를 직관적으로 이해하는데 있어 교수학적으로 분수들의 연산을 배우고 있는 초등학생들에게 통분을 강요한 것으로 볼 수 있다. 또한 예에서 제시한 두 단위 분수의 합만으로 이루어져 있는 것을 인지하고, 모든 응답자들이 두 분수의 합만을 생각하였다(KS-04007, JS-04002, MS-04003). 다음은 면담과정에서 나타난 J군의 반응이다.

JT-04001: 문제를 읽고 어떤 생각이 들었니?

JS-04001: 어떻게 풀어야 할 지 생각이 나지 않았어요.

JT-04002: 풀이과정에서 보면 단위 분수 2개를 사용해서 풀려고 했는데 왜 그랬니?

JS-04002: 예에 단위 분수 2개를 사용해서요.

JT-04003: 풀이과정을 쓰고 답을 구하지는 못했는데 다시 푼 다면 풀 수 있겠니?

JS-04003: (한 참 생각 후) 아니요, 못 풀겠어요.

이는 문제의 제시 방법의 다양한 학생들의 사고를 방해함으로써 고집성이라는 직관의 특징이 문제 외적인 것(사전 지식이나 개인적인 경험)이 문제 내적인 것에 영향을 줄 뿐만 아니라, 문제 내에서 조건과 제시 방법들과 문제 해결방법 사이에 고집성이 발생할 수 있음을 알 수 있다.

나. 문항 5

(문제) 1에서 9까지 자연수로 만들어진 숫자카드 두 벌($\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{4}\ \boxed{5}\ \boxed{6}\ \boxed{7}\ \boxed{8}\ \boxed{9}$, $\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{4}\ \boxed{5}\ \boxed{6}\ \boxed{7}\ \boxed{8}\ \boxed{9}$) 을 준비하여 각각을 잘 섞은 다음 일렬로 나란히 배열하고, 아래 위에 놓인 수끼리의 차이를 구하여 이를 모두 곱하였다. 그 곱은 다음 중 어느 것인가?

ㄱ) 곱은 항상 홀수이다.

ㄴ) 곱은 항상 짝수이다.

ㄷ) 곱은 짝수일 경우도 있고, 홀수인경우도 있다.

<흰색카드> ➜	3	9	6	•	•	•	•	•	•
<검은색 카드>➜	4	2	8	•	•	•	•	•	•
<두 수의 차> ➜	1	7	2	?	?	?	?	?	?

이 문항의 답은 (ㄴ)이다. 이 문항의 선정 의도는 시각적 모델로 제시되어 있는 문제에서 문제의 단서를 발견하여 시각적 모델로 일반화 시킬 수 있는가와 문제에 제시되어 있는 조건으로 인해 학생들에게 미치는 고집성으로 인한 오류를 검사하기 위한 것이다. 이 문항의 경우 시각적 모델을 사용하여 카드를 배열 할 수 있는 9개의 칸에 어떤 조합도 두 수의 차가 홀수만으로 이루어 질 수 없다는 것을 보여주어 해결한다면 오류를 일으키지 않았다고 볼 수 있다. 반대로, 일반화를 시키지 않고 문제에 제시되어 있는 카드의 조합만을 보고 문제를 해결하려 한다면 문제 제시 방법이 학생들에게 고집성을 일으켜 오류를 일으켰다고 볼 수 있다. 검사 결과 일반화 하여 문제를 해결하기 보다는 문제에 제시되어 있는 조건만을 고려하여 문제를 해결하는 모습을 보였다(LS-05003, MS-05001). 다음은 면담과정에서 나타난 L군과 M군의 반응 중 일부분이다(<그림 Ⅳ-9>, <그림 Ⅳ-10> 참조).

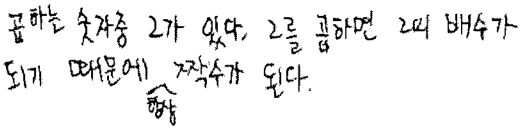
LT-05003: 어떤 방법으로 풀었는지 설명해 줄래?

LS-05003: 문제를 읽다가 6과 8의 차가 2라는 것을 발견하고, 2가 곱해지면 곱이 짝수가 되요.

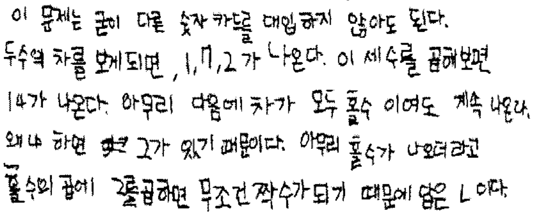
MT-05001: 굳이 다른 숫자카드를 대입하지 않아도 된다고 풀이과정에 썼는데, 문제에 써있는 숫자카드는 선생님이 예로 들어준 것인데. 정말 다른 카드는 넣어보지 않아도 될까?

MS-05001: (다른 숫자 카드를 머릿속으로 대입시켜 본 후) 답이 바뀔 수도 있을 것 같아요.

이는 학생들이 자신의 선행경험 뿐만이 아니라 문제의 제시 방법과 조건에 고집성을 나타냄을 알 수 있다. 아래는 L군과 M군의 지필검사지에 나타난 반응이다.


곱하는 숫자중 2가 있다, 2를 곱하면 2의 배수가 되기 때문에 항상 짝수가 된다.

<그림 IV-9> 문항 5에 대한 L군의 반응


이 문제는 굳이 다른 숫자 카드를 대입하지 않아도 된다.
두수의 차를 보게되면, 1, 7, 2가 나온다. 이 세수를 곱해보면
14가 나온다. 아무리 다음에 차가 모두 홀수 이여도 계속 나온다.
왜냐 하면 2가 있기 때문이다. 아무리 홀수가 나오더라고
홀수의 곱에 2를곱하면 무조건 짝수가되기 때문에 답은 ㄴ이다.

<그림 IV-10> 문항 5에 대한 M군의 반응

다. 문항 7

(문제) 동전을 던질 때 앞면 아니면 뒷면이 나온다. 영희가 동전을 5번 떨어뜨렸는데 모두 앞면이 나왔다. 영희가 동전을 다시 한 번 떨어뜨린다면, 앞면이 나오겠는가? 아니면 뒷면이 나오겠는가?

이 문항의 답은 "앞면과 뒷면이 나올 확률이 같다." 이다. 이 문항의 선정 의도는 동전 던지기의 무작위 과정을 통하여 직관적 사고에 의해 어떤 오류를 일으키는지 알아보고자 하는 것이다. 만약 학생들이 6번째 던졌을 때 "뒷면"이 나올 것이라고 답한다면, 학생들은 직관적 사고가 문제해결에 오류를 일으켰다고 예상할 수 있다. 그런데 검사결과 모든 학생들이 물음에 "뒷면"이 나온다는 반응을 나타냈다(KS-07001, JS-07008, LS-07001, MS-07001). 다음은 면담과정에서 나타난 K군의 반응이다.

KT-07001: 이 문제에서처럼 동전이 앞면이 나올지 뒷면이 나올지 친구와 내기를 한 다면 어느 쪽이 나온다고 하겠니?

KS-07001: 뒷면이요.

KT-07002: 왜 뒷면이 나온다고 할 거야?

KS-07002: 뒷면이 나올 확률이 더 크니까요.

이와 같은 반응에 우정호(1998)는 "확률적 사고는 결정론적인 객관적 특성이 지배하는 기하학적 사고나 산술적 사고와 매우 다른 주관적인 측면이 혼합된 애매한 특성을 가지고 있다. 따라서, 주관적인 해석과 직관적인 믿음에서 벗어나 형식적인 개념으로 정립하는 것이 매우 어렵다"라고 말하고 있다. 이는 확률적 사고의 개념이 실생활의 경험과 혼재되면서 인식론적 장애를 일으켜 직관적 사고에 오류를 일으키는 것을 알 수 있다. 또한 위와 같이 오류가 발생하였을 경우 학생들은 올바른 풀이를 설명해 주어도 주관적인 내재적 신념 속에는 오류가 처치되지 않고 계속해서 '뒷면'이 나온다(KS-07003, JS-07008, LS-07004, MS-07004)는 반응을 보이고 있다. 이는 확률적 개념의 오류는 처치가 곤란함을 보여준다. 다음은 내재적 확실성으로 인한 오류를 일으키고 있는 J군의 면담과정에서 나타난 반응이다.

JT-07007: (실제로 올바른 확률을 보여준다.) 앞면이 나올 확률과 뒷면이 나올 확률이 같네?

JS-07007: 네.

JT-07008: 이제 앞면과 뒷면이 나올 확률이 같다는 것을 알았어. 다시 한 번 문제를 보고 어느 면이 나올지 내기를 한다면 어느 쪽이 나온다고 할거니?

JS-07008: 뒷면이요.

JT-07009: 왜?

JS-07009: 계속 앞면이 나왔으니까요.

이와 같이 올바른 풀이를 통하여 실제로 6번째 앞면이 나올 확률과 뒷면이 나올 확률이 같음을 알고 나서도 학생들의 내재적으로 "뒷면"이 나올 것이라는 직관적 사고가 발현되고 있음을 알 수 있다.

이와 유사한 연구에서 Fischbein(1987)도 동전던지기에서 연속적으로 앞면을 얻은 학생은 다음에 뒷면이 나타날 가능성이 앞면이 나타날 가능성보다 높다고 판단한다고 했다. 이것은 확률적으로 같다는 사실에도 불구하고 동일한 시행에서 같은 결과가 나타나는 현상은 그렇지 않은 경우보다 어렵다는 것이 암묵적으로 내재되 혼란을 야기하기 때문이다.

라. 문항 8

(문제) 다음 물음에 읽고 문제를 해결할 때 사용되는 연산은 무엇인지 실제로 계산해 보지 않고 즉각적으로 떠오르는 연산(+, -, ×, ÷)을 쓰시오.

답) 가 : ×

나 : ×

(가) 쌀 1kg을 빻아서 쌀가루 0.75kg을 얻는다고 한다. 쌀 15kg을 빻으면 얼만큼의 쌀가루를 얻을 수 있겠는가? (나) 1kg의 약품으로 15kg의 비누를 만들 수 있다고 합니다. 0.75kg의 약품으로 만들 수 있는 비누는 몇 kg입니까?

(답에 대한 이유를 여러 가지 방법으로 설명해보세요. 그림을 그려도 좋습니다.)

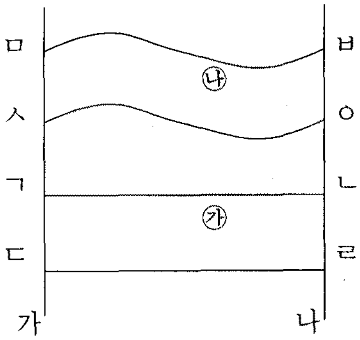
이 문항의 답은 "가 : ×, 나 : ×" 이다. 이 문항의 선정 의도는 곱셈 문장제 연산에서 직관적 모델(동수누가 모델)이 직관적 사고에 끼치는 영향이 무엇인지 알아보기 위한 것이다. Fischbein(1987)에 의하면 직관의 특징 중에서, 고집성과 관련된다. 동수 누가 모델에 의한 고집성은 이후에 분수나 소수를 포함하는 형식적 조작을 요하는 곱셈 학습에서 어려움을 야기한다. 이것이 문제해결 과정에서 교수학적 영향에 의한 직관적 사고의 오류의 원인이 된다고 한다.

만약 학생들이 (나)문항의 사용되는 연산이 "÷"이라고 답한다면, 직관적 모델(동수 누가 모델)이 곱셈 개념에 오류를 일으킨다고 예상할 수 있다. 검사결과 학생들의 반응은 모두 옳게 답한 것을 검사지를 통하여 확인 할 수 있었다. 하지만 응답자 중 K군은 처음에는 (나)의 물음에 ÷으로 답하는 오류를 보였다(KS-08001). 이에 선행연구자인 박현주(2004)는 학교에서 처음에 도입된 자연수 개념에서 곱셈은 동수 누가 덧셈으로 도입되며, 학생들은 이러한 모델에 익숙해져 이러한 연산을 새로운 수 체계에서 과도하게 적용하려는 시도에 의해 오류를 형성하게 된다고 말하고 있다. 김수미(1994)는 학교 교육에서 편의에 의해 도입된 모델이 학생들이 후행 학습을 하는데 암묵적으로 오류를 일으킴에도 학생이나 교사는 그 존재성과 영향력을 자각하지 못한다고 말하고 있다.

마. 문항 10

(문제) 두 직선 가와 나는 서로 평행이며, 직선 가와 나 사이의 거리를 a라고 합니다. 두 직선에 수직인 선분 ㄱㄴ과 선분 ㄷㄹ이 있고, 또 두 곡선 ㅁㅂ과 ㅅㅇ을 두 직선 가와 나에 그림과 같이 그린다면, ㉮와 ㉯의 넓이는 같습니까? 아니면 다른 한 쪽이 더 넓습니까?

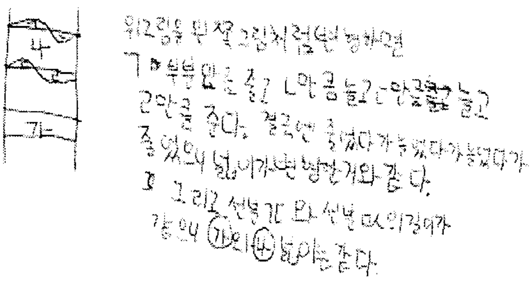
(단, 선분 ㄱㄷ의 길이와 선분 ㅁㅅ의 길이는 같습니다.)



이 문항의 답은 "같다"이다. 이 문항의 선정 의도는 같은 높이를 갖는 두 도형에서 길이성분의 변화가 직관적 사고에 어떤 오류를 일으키는가를 알아보기 위한 것이다.

Fischbein(1987)에 의하면 직관의 전체성에 기인한 오류라고 보고 있다. 그는 피험자들이 길이에 우선적인 관심을 둠으로써, 주의 깊게 넓이 차원을 고려하지 않는다고 주장하고, 피험자는 단지 한 가지 성분에 기초하여 판단하려는 성향이 있다고 설명한다. 따라서, 우리는 이와 같은 문항의 경우에 학생들이 개념적 수준에서 접근하도록 유도해야 한다.

만약 학생들이 "㉯의 넓이가 ㉮의 넓이 보다 넓다"라고 답한다면, 직관의 특징 중 하나인 전체성에 기인한 오류라고 예상할 수 있다. 검사결과 이 문항에 대해 학생들의 응답은 보조선을 그어 평행이동을 시켜 두 도형의 넓이가 같다고 옳게 대답하였다(KS-10001, JS-10002, LS-10006). 다음은 옳게 응답한 J군의 지필 검사지에 대한 반응이다. <그림 Ⅳ-11> 참조.



<그림 IV-11> 문항 10에 대한 J군의 반응

K군의 경우 평행이동의 개념을 사용하여 직관적 사고를 발현하여 넓이가 같다는 사실을 알아냈음에도 불구하고, 풀이과정을 시각적 모델을 사용하는 것을 포기하는 응답을 나타냈다(KS-10001). 그는 결국 구분구적법의 개념을 이용하여 문제를 해석하여 자신의 풀이과정을 설명하였다. 이는 학생들이 풀이과정에서 시각적 모델을 사용하여 자신의 주장을 타당화 하는 것에 대한 확신감이 떨어진다는 사실을 알 수 있다. 학교 교육에서 문제의 풀이과정을 시각적 모델을 사용한 풀이 보다는 산술적 풀이과정에 치중하여 학생들의 시각적 풀이과정에 대한 확신감이 떨어진다는 것을 알 수 있다.

3. 직관적 사고와 직관의 오류

직관적 사고를 분석하기 위해 1, 2, 3, 6, 9 문항을 분석하고 직관의 오류를 알아보기 위해 4, 5, 7, 8, 10번 문항을 분석한 결과 직관은 문제해결 과정에서 학생들에게 도움을 주기도 하지만 직관의 오류를 발생시킴으로써 역기능 또한 존재함을 확인 할 수 있었다. 문항 1의 경우 L군의 경우 산술적 풀이 없이 1/5배라는 답을 적었다(LS-01002). 면담과정에서 L군은 “눈으로 보기에 1/5배예요.”라는 응답으로 보아 시각적 영향으로 인한 오류를 나타냄을 알 수 있다. 이는 시각적으로 받아들인 잘못된 정보로 인하여 문제풀이 오류를 일으킨다는 것을 알 수 있다. 문항 7의 경우에도 학생들은 6번째 시행에서 동전의 앞면이 나올 경우의 확률을 6번 역속 동전의 앞면이 나올 확률로 잘못 인식함으로써 오류를 일으켰다(KS-07005, JS-07004). 다음은 면담과정에서 나타난 K군의 반응이다.

KT-07005: 풀이과정에서 앞면이 나올 확률만을 구하고, 뒷면이 나올 확률은 구하지 않았는데 그 이유는 무엇 때문이니?

KS-07005: 앞면이 6번 연속으로 나올 확률은 굉장히 작기 때문에요. 그래서 앞면이 나올 확률을 구한 다음 100%에서 앞면이 나올 확률을 빼주면 뒷면이 나올 확률을 구할 수 있을 것 같아서요.

이는 확률적 사고에 있어 여사건에 대한 직관적 인식의 오류 때문에 나타난 현상으로 볼 수 있다. 학생들은 여사건에 대한 개념을 배우지 않았지만 실생활 경험을 바탕으로 여사건에 대한 비형식적 개념습득으로 인하여 오류를 일으킴을 알 수 있다.

이처럼 직관적 사고는 문제해결에 도움을 주는 경우가 존재하는 반면, 직관으로 인하여 학생들에게 오개념을 형성하고, 문제해결 과정에서 오류에 빠지게 하기도 한다.

V. 결 론

초등학생들의 문제해결 과정에서 나타내는 직관적 사고를 분석한 결과 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

첫째, 학생들은 문제해결 과정에서 문제의 계산 절차나 알고리즘을 알고 있는 경우, 직관적 사고에 의존하기 보다는 알고리즘에 의한 풀이에 의존하려는 경향을 보인다.

수학 문제해결 과정에서 학생들은 문제의 유형에 따라 직관적 사고가 다르게 나타나는데 문항1과 문항 3을 비교해 보면, 같은 방법으로 문제를 해결 할 수 있는 문항임에도 불구하고, 1번 문항은 알고리즘에 의한 풀이가 불가능하기 때문에 예측 직관(직관적 사고)을 사용하여 문제를 해결한 반면, 3번 문항은 알고리즘에 의존한 풀이가 가능한 문항으로서 모든 학생들이 알고리즘에 의존한 풀이(논리적 사고)를 이용하여 문제를 해결한다는 사실을 알 수 있었다. 그런데 직관적 사고는 수학 지식 형성 과정에서 중요한 역할을 하고, 현실 상황을 수학적으로 조작할 수 있는 수학화에 중요한 인지 작용 중 하나이다. 그런 의미에서 알고리즘적 절차에 곧바로 의존하기 보다는 직관적 사고를 통한 문제해결을 단서를 파악하고, 경험하도록 해야 한다.

둘째, 학생들은 직관적 사고를 통한 시각적 모델을 구안하여 문제를 해결하는 능력이 떨어지며, 시각적 모델을 사용하여 문제를 해결한다 하더라도 자신의 답

에 대한 확신감이 떨어졌다. 문항 1에서 K군, M군의 경우와 문항 10에서 K군, J군의 경우 시각적 모델(직관적 사고)를 통하여 문제를 해결하였음에도 불구하고, 자신의 풀이과정을 설명하기 위해 시각적 모델을 이용하여 설명하기 보다는 논리적(산술적)방법을 이용하여 풀이과정을 설명하려는 모습을 보였다. 산술적 방법으로 문제를 설명하지 못할 경우 자신이 문제를 해결하지 못하였다고 생각하였다. 이는 학생들에게 다양한 풀이법을 탐구하게 함으로써 시각적 모델을 구안하는 경험을 통하여 논리적 사고를 통한 산술적 풀이법 뿐만이 아니라, 직관적 사고를 통한 문제해결의 기회를 접하는 경험이 필요함을 알 수 있었다.

셋째, 문제해결 과정에서 직관적 사고와 논리적 사고 사이에 상호 보완관계가 나타난다. 문항 2에서 K군의 경우 논리적 사고를 통한 산술적 풀이가 불가능해지자 직관적 사고를 통한 시각적 모델을 구안하여 문제를 해결하였다. 또한 J군의 경우에도 문제해결 후 좀 더 다양한 사고의 기회를 부여하자 시각적 모델을 사용하여 문제를 해결하였다. 이는 직관적 사고와 논리적 사고는 분리된 사고 양식이 아니라 상호 보완적인 사고 양식임을 알 수 있다. 학교 수학에서 학생들에게 좀 더 다양한 사고 기회를 부여한다면, 수학적 사고의 두 축인 논리적 사고와 직관적 사고를 조화롭게 개발할 수 있음을 알 수 있었다.

넷째, 확률의 개념과 확률에 관한 문제해결 과정에서 학생들은 자신의 주관적 해석을 통한 인식론적 장애를 일으킨다. 문항 7의 경우 모든 학생들이 동전의 앞면과 뒷면이 나올 확률이 논리적(산술적)으로 같음을 알고 있음에도 불구하고 생활에 적용할 때, 오류를 일으키는 것으로 나타났다. 이는 확률적 사고가 주관적 해석을 통한 내재적 신념이 강하게 형성되어 오류를 처치해 주더라도 내재적 신념 속에는 오류가 처치되지 않았음을 면담과정을 통해 알 수 있었다.

본 연구에서 초등학생들의 직관적 사고를 분석하고 직관적 사고의 오류를 분석한 결과를 토대로 몇 가지 제언을 하면 다음과 같다.

첫째, 학생들이 수학 개념학습 시 논리적 사고뿐만이 아니라 직관적 사고를 할 수 있는 교수-학습 전략이 필요하다. 또한 문제를 제시 할 때, 산술적 풀이가 불가능한 문제를 직관적 방법으로 문제를 해결할 수 있는 기회를 다양하게 제시하여야 한다.

둘째, 교수학적 영향으로 형성된 제 2직관은 교수학적 방법으로 처치 가능함을 인식하고, 오류를 일으킬 수 있는 직관적 모델을 교과서에서 분석하여 오류를 처치 할 수 있는 직관적 모델의 개발이 필요하다.

셋째, 본 연구에서 분석하지 못한 교사적 측면의 연구가 필요하다. 학생들이 직관적 모델을 이용하여 수학의 개념을 학습할 때 교사의 교수-학습 방법이 학생들에게 미치는 영향을 알아 볼 수 있는 연구가 필요하다.

이러한 연구를 토대로 수학적 사고의 두 축이라고 할 수 있는 논리적 사고 뿐만이 아니라 직관적 사고에 대한 연구가 진행된다면 직관적 사고로 인한 학생들의 오류를 줄일 수 있을 것이다. 또한 창의성에 중요 요소인 직관적 사고 능력을 개발하기 위한 후속 연구가 지속적으로 이루어져야 할 것이다.

참 고 문 헌

강문봉 (1987). 수학교육에 있어서 직관의 의의에 관한 연구. 서울대학교, 석사학위논문.

교육부 (1997). 수학과 교육과정. 서울: 대한교과서주식회사.

김응태 · 박한식 · 우정호 (1995). 증보 수학교육학개론. 서울: 서울대학교 출판부.

김정환 (1974). 페스탈로찌의 생애와 사상. 서울: 박영사.

박현주 (2004). 수학문제 해결과정에서 직관적 사고 분석. 전주교육대학교 석사학위 논문.

우정호 (2000). 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울: 서울대학교출판부.

이대현 (2001). 수학 문제해결과정에서 고등학생들의 직관적 사고의 분석. 한국교원대학교 박사 학위 논문.

이용률 · 성현경 (1992). 수학교육론. 서울: 교학연구사.

이홍우 (1995). 인지학습의 이론. 서울: 교육출판사.

조정수 (2002). 수학교사를 위한 질적 교실 연구 시리즈. 수학사랑 **34**, pp.101-109.

Bogdan, R. C. & Biklen, S. A. (1992). *Qualitative Research for Education: An Introduction to theory and Methods.* Needham Heights, MA :Allyn & Bacon.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics : An Educational Approach.*

Dordrecht : Reidel Publishing Company.

Fischbein, E.; Tirosh, D. & Hess, P. (1979) The intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics* **10**, pp.3-40.

Fischbein, E.; Tirosh, D. & Melamed, U. (1981). Is it possible to measure the intuitive acceptance of a mathematical statement? *Educational Studies in Mathematics* **12**, pp.491-512.

Gall, J. P.; Gall, M. D. & Borg, W. R., (1999) *Applying educational research: A Practical Guide. (4th ed.).* White Plains: Longman.

H. Poincaré (1983). 과학과 가설. 김형보 (역) 원본은 1906 발행. 서울: 단대출판부. La Science et L'Hypothésis.

H. Poincaré (1983) 과학의 가치. 김형보 (역) 원본은 1905 발행. 서울: 단대출판부. La Valeur de Science.

H. Poincaré (1982) 과학의 방법. 김형보 · 오병승 (공역) 원본은 1908 발행. 서울: 단대출판부. Science et Methode.

J. S. Bruner (1997) 교육의 과정. 이홍우 원본은 1960 서울: 동명사. [. The Process of Education. New York : Macmillan Publishing Co.]

Noddings, N. & Shore, P. J. (1984). *Awaking the Inner Eye.* New York : Teachers College Press.

An Analysis of Intuitive Thinking of Elementary Students in Mathematical Problem Solving Process

You, Daehyun
Hyehwa Elementary School, Hyehwa-dong, Jongno-gu, Seoul 110-530, Korea
E-mail : daehyun-you@hanmail.net

Kang, Wan
Department of Mathematics Education, Seoul National University of Education, Seoul 137-742, Korea
E-mail : wkang@ne.seoul-e.ac.kr

The purposes of this study are to analyze elementary school student's intuitive thinking in the process of mathematical problem solving and to analyze elementary school student's errors of intuitive thinking in the process of mathematical problem solving. According to these purposes, the research questions can be set up as followings.

(1) How is the state of illumination of the elementary school student's intuitive thinking in the process of mathematical problem solving?

(2) What are origins of errors by elementary school student's intuitive thinking in the process of mathematical problem solving?

In this study, Bogdan & Biklen's qualitative research method were used. The subjects in this study were 4 students who were attending the elementary school. The data in this study were 'Intuitine Thinking Test', records of observation and interview. In the interview, the discourses were recorded by sound and video recording. These were later transcribed and analyzed in detail.

The findings of this study were as follows :

First, If Elementary school student Knows the algorithm of problem, they rely on solving by algorithm rather than solving by intuitive thinking.

Second, their problem solving ability by intuitive model are low. What is more they solve the problem by Intuitive model, their Self- Evidence is low.

Third, in the process of solving the problem, intuitive thinking can complement logical thinking.

Last, in the concept of probability and problem of probability, they are led into cognitive conflict cause of subjective interpretation.

* ZDM Classification : A73
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D50
* Key Words : Intuitive Thinking, Mathematical Problem Solving