

<학술논문>

DOI:10.3795/KSME-A.2009.33.8.745

가우스구적법을 이용한 구조물의 강건최적설계

이상훈[†] · 서기석^{*} · Shikui Chen^{**} · Wei Chen^{**}

(2009년 5월 14일 접수, 2009년 7월 24일 수정, 2009년 7월 24일 심사완료)

Robust Structural Optimization Using Gauss-type Quadrature Formula

Sanghoon Lee, Ki Seog Seo, Shikui Chen and Wei Chen

Key Words : Robust Design(강건설계), Gaussian Quadrature (가우스구적법), Statistical Moments (통계적 모멘트), Sensitivity Analysis (민감도해석)

Abstract

In robust design, the mean and variance of design performance are frequently used to measure the design performance and its robustness under uncertainties. In this paper, we present the Gauss-type quadrature formula as a rigorous method for mean and variance estimation involving arbitrary input distributions and further extend its use to robust design optimization. One dimensional Gauss-type quadrature formula are constructed from the input probability distributions and utilized in the construction of multidimensional quadrature formula such as the tensor product quadrature (TPQ) formula and the univariate dimension reduction (UDR) method. To improve the efficiency of using it for robust design optimization, a semi-analytic design sensitivity analysis with respect to the statistical moments is proposed. The proposed approach is applied to a simple bench mark problems and robust topology optimization of structures considering various types of uncertainty.

기호설명

- μ_k : k 차 통계적 모멘트
- l : 가우스구적법의 질점
- w : 가우스구적법의 가중치
- m : 가우스구적법의 차수
- n : 공학시스템의 차원(dimensionality)
- μ_g : 함수 g 의 평균
- σ_g : 함수 g 의 표준편차

1. 서론

일본의 품질공학자 다구찌(G. Taguchi)에 의해

제안된 이래로 강건설계의 개념과 기법은 고품질과 안전에 대한 사회적 요구에 부응하며 다양한 분야에서 활용되어 왔다. 강건설계에서는 제품의 품질에 변동을 가져올 수 있는 다양한 불확실성의 원인을 제거하기 보다는 제품을 그러한 불확실성에 최대한 둔감하게 설계함으로써 품질 변동의 산포를 최소화하고자 한다. 이러한 강건설계 기법에서 가장 중요한 요소의 하나는 제품의 품질 혹은 성능과 그것들의 강건성을 동시에 고려할 수 있는 성능척도를 갖는 것이다. 대표적인 것으로 다구찌가 제안한 신호대잡음비 (Signal to Noise Ratio)^(1,2)가 있으며 민감도 지수(Sensitivity Index)⁽³⁾, 미분지수 (Gradient Index)⁽⁴⁾, 성능지수(Performance Index)⁽⁵⁾ 등이 같은 목적으로 개발되었다. 통계적인 관점에서 보았을 때, 불확실성이 존재하는 상황에서 어떤 공학시스템의 성능은 그 성능척도의 평균으로 정량화 할 수 있으며 강건성, 혹은 성능의 산포는 성능척도의 분산으로 잘 설명될 수 있다. 이에 강건설계를 성능척도의 평균과 분산으로 수식화되는 목적함수를 최소화하는 최적설계 문제로 접근하는 시도가 활발히 이루어져 왔다.⁽⁶⁾ 많은 경우

[이 논문은 2009년도 CAE 및 응용역학부분 춘계학술대회 (2009. 5. 14.-15., 한국관광공사 T2 아카데미) 발표논문임]

[†] 책임저자, 회원, 한국원자력연구원

E-mail : shlee1222@kaeri.re.kr

TEL : (042)868-2242 FAX : (042)861-1567

^{*} 한국원자력연구원, 핵주기시스템공학기술개발부

^{**} Northwestern University, Dept. of Mechanical Eng.

성능척도의 평균과 분산을 구하는 방법으로 몬테카를로 시뮬레이션(Monte Carlo Simulation: 이하 MCS)이나 테일러급수전개 (Taylor Series Expansion)를 사용하고 있는데 테일러급수전개가 계산량이 적은 반면 정확도가 떨어지고 MCS 는 계산량이 지나치게 많다는 것이 잘 알려져 있다.

본 논문에서는 위의 두 방법의 대안으로서 가우스구적법 (Gaussian Quadrature)⁽⁷⁾을 고려하고자 한다. 가우스구적법은 수치 적분법의 하나로 잘 알려져 있으며 동일한 개수의 적분점을 가지는 구적법 중에서 가장 높은 적분차수(Integration Order)를 제공함이 수학적으로 증명되어 있다.⁽⁸⁾ 다양한 분야의 수치해석에 가우스구적법이 활용되어 왔으나 평균, 분산과 같은 통계적 모멘트의 계산에는 상대적으로 많이 활용되지 않았다. 하지만 통계적 모멘트 계산을 위하여 실험계획법 (Design of Experiment)⁽⁹⁻¹³⁾ 및 점추정법(Point Estimate Method)⁽¹⁴⁻¹⁶⁾이란 이름으로 개발된 많은 방법들이 이론적으로 가우스구적법과 동일하거나 깊은 연관이 있음이 Lee et al.⁽¹⁷⁾에 의하여 밝혀졌고 다양한 확률분포를 가지는 입력변수에 대하여 가우스구적법을 이용하여 통계적 모멘트를 계산하는 방법이 정리되었다.

본 논문에서는 가우스구적법을 통계적 모멘트 계산에 활용하는 기법의 이론적 배경에 대하여 논하고 가우스구적법을 구조물의 강건최적설계에 적용한 사례를 제시하고자 한다. 일차원 가우스구적법으로부터 다차원 구적법을 만드는 방법 중에서 계산량 측면에서 양 극단에 있다고 할 수 있는 적구적법(Tensor Product Quadrature)⁽¹⁸⁾과 일변수 차원감소법(Univariate Dimension Reduction Method)^(19,20)을 활용하여 통계적 모멘트를 계산하는 방법을 소개하고 이 방법들에 대하여 설계민감도 해석을 수행하는 법을 제안하고자 한다. 마지막으로 이 방법들을 간단한 트러스 구조물의 강건설계와 랜덤한 분포하중을 받는 구조물의 강건위상최적설계에 적용한 결과를 제시하고자 한다.

2. 가우스 구적법을 이용한 통계적 모멘트의 계산

2.1 이론적 배경

확률변수 X 의 함수 $g(X)$ 의 k 차 통계적 모멘트는 구적법을 이용하여 다음과 같이 구해진다.

$$E[g^k] = \int_{\Omega} \{g(x)\}^k f_X(x) dx \approx \sum_{i=1}^m w_i \{g(l_i)\}^k \quad (1)$$

여기서 $f_X(x)$ 는 X 의 확률밀도함수이고 l_i, w_i 는 각각 구적법에 사용된 절점(Node)과 가중치(Weight)이며 m 은 구적법의 차수이다. 이 적분근사식의 정확도는 절점과 가중치를 어떻게 선택하느냐에 따라서 크게 달라지는데, 가우스구적법에서는 적분식의 가중치함수(Weight Function)로부터 구해지는 직교다항식(Orthogonal Polynomial)의 근이 절점 l_i 가 되며 가중치 w_i 는 이 절점들을 지나가는 내삽다항식(Interpolation Polynomial)으로부터 계산된다⁽⁸⁾. 이렇게 구해진 절점과 가중치를 사용한 m 차의 적분근사는 $2m-1$ 차의 다항식을 엄밀하게 계산할 수 있으며 이 적분차수는 식 (1)과 같은 형태의 구적법으로 구현 가능한 가장 높은 차수이다.

식 (1)과 같이 가우스구적법을 통계적 모멘트를 계산하기 위한 적분에 적용할 때 적분식의 가중치함수는 확률밀도함수 $f_X(x)$ 가 된다. 가우스구적법의 절점과 가중치는 다음과 같이 주어지는 모멘트 관계식을 만족함을 보일 수 있다.

$$\mu_k = \int_{\Omega} x^k f_X(x) dx = \sum_{i=1}^m w_i l_i^k, \quad k=0, \dots, 2m-1 \quad (2)$$

여기서 μ_k 는 X 의 k 차 모멘트이며, 이 관계식으로부터, 통계적 모멘트 계산을 위한 m 차 가우스 구적법의 절점과 가중치는 입력 확률변수 X 와 $2m-1$ 차까지 등가의 통계적 모멘트를 갖는 이산확률변수의 표본(Sample)과 확률질량함수(Probability Mass Function)임을 알 수 있다.

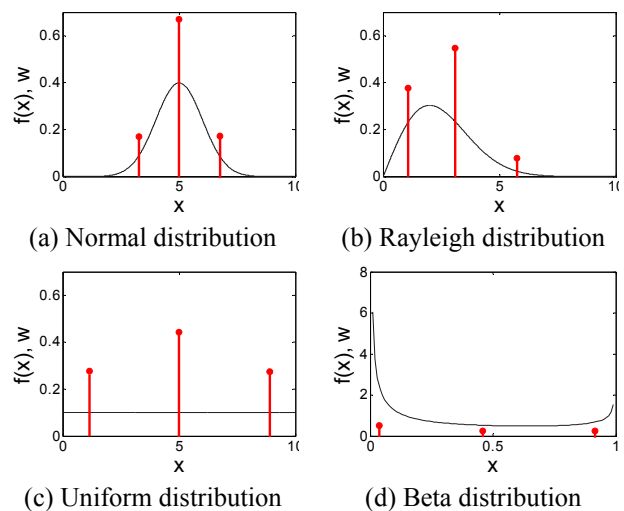


Fig. 1 Nodes and weights of 3-node Gauss-type quadrature for various probability distributions

임의의 $f_X(x)$ 에 대하여 가우스구적법의 절점과 가중치를 구하는 방법이 Lee et al.⁽¹⁷⁾에 정리되어 있다. Fig. 1은 $f_X(x)$ 가 각각 정규분포, 균일분포, 레일리분포, 베타분포의 확률밀도함수일 때, 3 절점 가우스구적법의 절점과 가중치를 구한 결과이다.

2.2 다차원 가우스구적법

공학시스템에 여러 개의 확률변수가 존재할 때, 통계적 모멘트의 계산을 위해서는 다차원구적법이 필요하다. 많은 경우 다차원구적법은 각각의 확률변수로부터 구해진 일차원 구적법으로부터 구성되는데, 본 절에서는 가장 잘 알려져 있는 적구적법⁽¹⁸⁾ (Tensor Product Quadrature 이하 TPQ)과 일차원 차원감소법(Univariate Dimension Reduction 이하 UDR)^(19,20)에 대하여 알아보도록 한다.

n 개의 확률변수를 입력으로 갖는 함수 $g(\mathbf{X})$ 의 k 차 모멘트는 TPQ 를 사용하여 다음과 같이 계산된다.

$$E[g^k] = \int_{\Omega_1} \cdots \int_{\Omega_n} \{g(x_1, \dots, x_n)\}^k f_X(\mathbf{x}) dx \quad (3)$$

$$\square \sum_{i_1=1}^{m_1} w_{1-i_1} \cdots \sum_{i_n=1}^{m_n} w_{n-i_n} \{g(l_{1-i_1}, \dots, l_{n-i_n})\}^k$$

여기서 $l_{i,j}$, $w_{i,j}$ 는 각각 i 번째 확률변수의 j 번째 절점 및 가중치를 나타내며 m_i 는 i 번째 확률변수의 적분에 사용된 구적법의 차수를 나타낸다. 중심모멘트(Central Moment)도 위 식과 같이 구해지며 평균과 표준편차를 구하는 식은 다음과 같이 주어진다.

$$\mu_g = \sum_{i_1=1}^{m_1} w_{1-i_1} \cdots \sum_{i_n=1}^{m_n} w_{n-i_n} g(l_{1-i_1}, \dots, l_{n-i_n}) \quad (4)$$

$$\sigma_g = \left[\sum_{i_1=1}^{m_1} w_{1-i_1} \cdots \sum_{i_n=1}^{m_n} w_{n-i_n} \left(g(l_{1-i_1}, \dots, l_{n-i_n}) - \mu_g \right)^2 \right]^{1/2} \quad (5)$$

TPQ 는 그 구성이 용이하며 가우스구적법의 $2m-1$ 의 적분차수가 온전히 구현된다는 장점이 있으나 계산량이 $m_1 \times \cdots \times m_n$ 으로 매우 많다는 단점이 있다.

UDR 은 $g(\mathbf{X})$ 를 여러 개의 단변수 함수로 분할하는 가법분해(Additive Decomposition)를 활용하여 모멘트 계산에 소요되는 계산량을 획기적으로 줄이는 방법이다. 함수 $g(\mathbf{X})$ 는 다음과 같은 근사함수 $\hat{g}(\mathbf{X})$ 으로 근사된다.

$$g(\mathbf{X}) \square \hat{g}(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n g(\mu_1, \dots, X_i, \dots, \mu_n) - (n-1)g(\mu_1, \dots, \mu_n) \quad (6)$$

$$= \sum_{i=1}^n g_{-i}(X_i) - (n-1)g(\mu_X)$$

여기서 g_{-i} 는 X_i 만의 함수이며 g_{-i} 의 통계적 모멘트는 2.1 절에 설명된 일차원 가우스구적법을 활용하여 구할 수 있다. 근사함수 $\hat{g}(\mathbf{X})$ 의 통계적 모멘트는 $g_{-i}(X_i)$ 들의 통계적 모멘트로부터 계산해낼 수 있으며 평균과 표준편차는 다음과 같은 식으로 구해진다.

$$\mu_g \square \mu_{\hat{g}} = \sum_{i=1}^n \mu_{g_{-i}} - (n-1)g(\mu_X) \quad (7)$$

$$\sigma_g^2 \square \sigma_{\hat{g}}^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_{g_{-i}}^2 \quad (8)$$

$g_{-i}(X_i)$ 의 통계적 모멘트를 계산하는데 m_i 번의 $g(\mathbf{X})$ 계산이 필요하므로 $\hat{g}(\mathbf{X})$ 의 통계적 모멘트를 계산하는 데는 총 $1+m_1+\cdots+m_n$ 의 $g(\mathbf{X})$ 계산이 필요하다. 이 수치는 X_i 의 분포가 대칭인 경우 감소할 수 있다. 아래 Fig. 2에 입력 확률변수의 분포가 대칭인 경우와 비대칭인 경우 TPQ와 UDR의 계산에 사용되는 적분점의 배치를 비교해 놓았다.

UDR을 이용한 통계적 모멘트 계산의 정확도에 대한 연구는 Lee and Chen⁽²¹⁾에서 찾아볼 수 있다. 식 (6)과 같은 가법분해는 각 변수들 사이에 존재하는 상호작용(Interaction)을 무시하는 것이기 때문에 변수간의 상호작용이 큰 경우에는 UDR로 계산된 모멘트의 정확도도 떨어지게 된다. 하지만 기대값 연산자(expectation Operator)의 특성 상 평균, 분산과 같은 낮은 차수의 모멘트는 가법분해에 의한 오차의 영향을 상대적으로 적게 받음이 알려져 있다.⁽²¹⁾

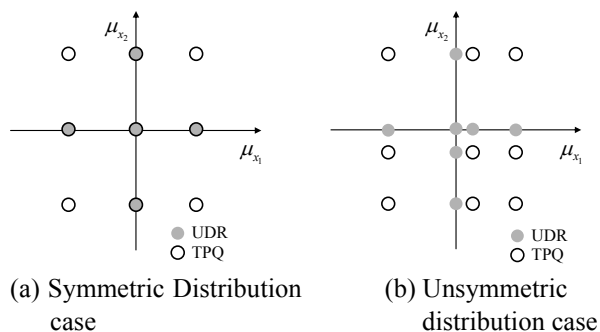


Fig. 2 Integration points for UDR and TPQ when 3 node quadrature formulae is used

3. 강건설계 수식화 및 민감도 해석

3.1 모멘트에 기반한 강건설계 수식화
일반적으로 최적설계 문제는 다음과 같이 수식화 된다.

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{x}}{\text{Minimize}} \quad f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \\ & \text{subject to} \quad g_i(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \geq 0, \quad i = 1, \dots, nc \quad (9) \\ & \quad \quad \quad x_j^L \leq x_j \leq x_j^U, \quad j = 1, \dots, nx \end{aligned}$$

여기서 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{nx})$ 는 설계변수의 벡터이며 $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_{np})$ 는 시스템에 존재하는 파라미터의 벡터이다. \mathbf{x} 와 \mathbf{p} 에 존재하는 불확실성을 고려했을 때, 위 식 (9)의 최적설계 수식으로부터 다음과 같은 강건설계 문제가 수식화 될 수 있다.

$$\begin{aligned} & \underset{\mu, \sigma}{\text{Minimize}} \quad F(\mathbf{X}, \mathbf{P}) = \omega_1 \frac{\mu_f(\mathbf{X}, \mathbf{P})}{\mu_f^*} + \omega_2 \frac{\sigma_f(\mathbf{X}, \mathbf{P})}{\sigma_f^*} \\ & \text{subject to} \quad G_i(\mathbf{X}, \mathbf{P}) = \mu_{g_i}(\mathbf{X}, \mathbf{P}) + k\sigma_{g_i}(\mathbf{X}, \mathbf{P}) \geq 0, \quad i = 1, \dots, nc \quad (10) \\ & \quad \quad \quad \mu_{x_j}^L \leq \mu_{x_j} \leq \mu_{x_j}^U, \quad j = 1, \dots, nx \end{aligned}$$

목적함수 f 와 제한조건 g_i 의 평균과 표준편차가 성능과 강건성을 표현하기 위한 성능척도로 사용되고 있고 ω_1, ω_2 는 가중치이며 ($\omega_1 + \omega_2 = 1$) μ_f^*, σ_f^* 는 스케일링 인자이다. k 는 제한조건의 확률적 만족의 정도를 결정하는 인자이다.

상기 강건설계 문제는 순차이차계획법과 같은 수학적계획법을 활용하여 해를 찾을 수 있다. 최적화 과정 동안 f 및 g_i 의 평균과 표준편차는 물론 이들의 설계민감도를 계산해야 하는데 각각의 모멘트 계산에 여러 번의 함수 계산이 필요하기 때문에 효율적으로 민감도를 계산할 수 있는 방법이 필요하다. 다음절에서 TPQ 및 UDR 로 평균과 표준편차를 계산하는 과정에서 얻어진 자료를 바탕으로 평균과 표준편차의 설계민감도를 근사하는 방법에 대해 논하고자 한다.

3.2 통계적 모멘트의 설계민감도 해석

설계변수 μ_{X_k} 에 대한 함수 $g(\mathbf{X})$ 의 평균 μ_g 와 표준편차 σ_g 의 민감도는 다음과 같은 식으로 표현이 가능하다.

$$\frac{d\mu_g}{d\mu_{X_k}} = \sum_{i_k=1}^{m_k} \frac{\partial \mu_g}{\partial l_{k \cdot i_k}} \frac{dl_{k \cdot i_k}}{d\mu_{X_k}} + \sum_{i_k=1}^{m_k} \frac{\partial \mu_g}{\partial w_{k \cdot i_k}} \frac{dw_{k \cdot i_k}}{d\mu_{X_k}} \quad (11)$$

$$\frac{d\sigma_g}{d\mu_{X_k}} = \sum_{i_k=1}^{m_k} \frac{\partial \sigma_g}{\partial l_{k \cdot i_k}} \frac{dl_{k \cdot i_k}}{d\mu_{X_k}} + \sum_{i_k=1}^{m_k} \frac{\partial \sigma_g}{\partial w_{k \cdot i_k}} \frac{dw_{k \cdot i_k}}{d\mu_{X_k}} \quad (12)$$

위 식에서 $\partial \mu_g / \partial l_{k \cdot i_k}, \partial \mu_g / \partial w_{k \cdot i_k}, \partial \sigma_g / \partial l_{k \cdot i_k},$

$\partial \sigma_g / \partial w_{k \cdot i_k}$ 는 TPQ 및 UDR 계산식 (4), (5)와 (7), (8)을 직접 미분하여 구할 수 있다. 이 계산 과정에서 다음 식과 같이 표현되는 절점위치의 변화에 따른 함수 g 의 민감도가 필요하다.

$$\frac{\partial g(l_{1 \cdot i_1}, \dots, l_{k \cdot i_k}, \dots, l_{n \cdot i_n})}{\partial l_{k \cdot i_k}} = \left. \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_k} \right|_{\mathbf{x}=(l_{1 \cdot i_1}, \dots, l_{k \cdot i_k}, \dots, l_{n \cdot i_n})} \quad (13)$$

이 편미분은 TPQ 의 경우에는 μ_g 와 σ_g 를 구하는 과정에 사용된 적분점 및 이 적분점에서의 g 값을 이용하여 근사할 수 있다. 이 계산에 대한 자세한 설명은 Lee et al.⁽¹⁷⁾에 실려있다. TPQ 는 추가적인 g 함수의 계산 없이 상기 편미분값을 계산할 수 있으나 UDR 의 경우에는 μ_g 와 σ_g 를 계산하는 과정에서 무시된 변수들간의 교호작용이 민감도 계산에 큰 오차를 가져올 수 있어서 반드시 추가적인 계산이 필요하다.

식 (11)과 (12)의 $\partial l_{k \cdot i_k} / \partial \mu_{X_k}$ 와 $\partial w_{k \cdot i_k} / \partial \mu_{X_k}$ 는 2.1 절에 설명된 일차원 가우스구적법을 계산하는 방법과 유한차분법을 이용하여 계산할 수 있다. 이 값들을 $\partial \mu_g / \partial l_{k \cdot i_k}, \partial \mu_g / \partial w_{k \cdot i_k}, \partial \sigma_g / \partial l_{k \cdot i_k}, \partial \sigma_g / \partial w_{k \cdot i_k}$ 와 함께 식 (11)과 (12)에 대입하여 g 의 평균과 표준편차의 설계민감도를 계산할 수 있다.

이상과 같이 설명된 근사방법으로 TPQ 의 경우에는 추가적인 g 값의 계산 없이 설계민감도를 정확히 근사해 낼 수 있음이 Lee et al.⁽¹⁷⁾에 사례연구를 통하여 밝혀져 있다. UDR 의 경우에는 추가적인 g 값의 계산이 필요하기 때문에 TPQ 의 경우처럼 큰 계산량 감소를 얻을 수 없다.

4. 강건 구조 최적설계 사례

본 장에는 2, 3 장에서 설명된 가우스구적법을 활용한 강건최적설계 기법을 두 구조물에 적용한 사례를 심도록 한다.

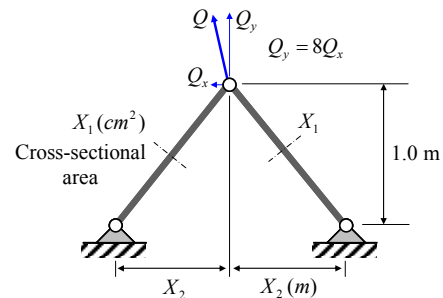


Fig. 3 2 bar truss structure

4.1 트러스 구조물의 강건최적설계

첫 번째 예제는 위의 Fig. 3 의 트러스 구조물의 강건최적설계에 관한 것이다. 각 트러스 멤버의 강도 제한조건 하에 트러스 구조물에 사용된 재료의 부피를 최소화 하는 최적설계 문제는 다음과 같이 수식화 된다.

$$\begin{aligned} & \text{minimize}_{X_1, X_2} f(X_1, X_2) = \rho X_1 \sqrt{1+X_2^2} \\ & \text{subject to } g_1(X_1, X_2) = 1.0 - \frac{5Q}{\sqrt{65S}} \sqrt{1+X_2^2} \left(\frac{8}{X_1} + \frac{1}{X_1 X_2} \right) \geq 0 \quad (14) \\ & \quad g_2(X_1, X_2) = 1.0 - \frac{5Q}{\sqrt{65S}} \sqrt{1+X_2^2} \left(\frac{8}{X_1} - \frac{1}{X_1 X_2} \right) \geq 0 \\ & \quad 0.2 \leq X_1 \leq 20, \quad 0.1 \leq X_2 \leq 1.6 \end{aligned}$$

여기서 설계변수 X_1, X_2 는 각각 트러스의 단면적 및 수평 스패를 나타내며 파라미터 [ρ, Q, S] 의 값은 [$10^4 \text{ kg/m}^3, 800 \text{ kN}, 1050 \text{ MPa}$]이다. 설계변수 X_1, X_2 와 파라미터 [ρ, Q, S]에 불확실성이 존재할 때 강건최적설계는 다음과 같이 수식화된다.

$$\begin{aligned} & \text{minimize}_{\mu_{X_1}, \mu_{X_2}} F = \omega_1 \frac{\mu_f}{\sigma_f^*} + \omega_2 \frac{\sigma_f}{\sigma_f^*} \\ & \text{subject to } G_1 = \mu_{g_1} - k\sigma_{g_1} \geq 0 \quad (15) \\ & \quad G_2 = \mu_{g_2} - k\sigma_{g_2} \geq 0 \\ & \quad 0.2 \leq \mu_{X_1} \leq 20, \quad 0.1 \leq \mu_{X_2} \leq 1.6 \end{aligned}$$

위 수식에서 가중치는 $\omega_1 = \omega_2 = 0.5$ 로 설정되었으며 스케일링 인자 μ_f^* 와 σ_f^* 는 각각 10, 2 로 설정되었다. 제한조건 상수 k 는 3 이 사용되었다. 확률변수들의 분포 및 분포 인자들은 표 1 과 같이 설정되었다.

이 강건최적설계 문제의 해를 3 절점의 TPQ 와 UDR 을 활용하여 찾은 결과를 표 2 에 실었다. 비교를 위하여 일차 테일러급수전개를 이용하여 얻은 결과를 같이 실었으며 유한차분법을 이용하여 설계민감도를 계산한 결과와 3.2 절에 설명된 근사 민감도 해석법을 이용한 결과를 같이 실었다.

모든 방법에서 제한조건 G_i 이 활성화되면서 최적화가 마무리 되었다. 괄호 안의 숫자들은 최적점에서 F, G_1, G_2 값을 표본수 1,000,000 개의 MCS 로 계산한 것으로서 테일러급수전개, UDR, TPQ 에 의하여 예측된 값들의 정확성을 검증하기 위하여 제공되었다. 활성화된 제한조건 G_i 이 실제로는 약간씩 위배되고 있음을 확인할 수 있고 그 양이 테일러급수전개에서 가장 크고 TPQ 에서 가장 작음을 확인할 수 있다. UDR 의 계산 결과가 TPQ 에 비하여 큰 오차를 가지고 있는 것은 함수 f, g_i 에 존재하는 교호작용의 영향이며 TPQ 의 오차는 적분차수의 부족에 기인한다.

Table 1 Distribution of input random variables of two bar truss example

Random variable	Distribution	Mean	STD
X_1	Normal	μ_{X_1} cm ²	$0.02 \times \mu_{X_1}$ cm ²
X_2	Normal	μ_{X_2} m	$0.02 \times \mu_{X_2}$ m
ρ	Beta ¹	10,000 kg/m ³	2,000 kg/m ³
Q	Gumbel	800 kN	200 kN
S	Lognormal	1050 MPa	250 MPa

¹ Shape parameters of beta distribution are set as $\gamma = \eta = 5.0$ (22)

Table 2 Optimization results of two bar truss example

Results	Taylor	UDR (FDM)	UDR (DSA)	TPQ (FDM)	TPQ (DSA)
μ_{X_1}	10.9573	11.3147	11.3162	11.5655	11.5669
μ_{X_2}	0.3770	0.3770	0.3767	0.3771	0.3767
F	1.1740 (1.1745)	1.2123 (1.2123)	1.2123 (1.2125)	1.2393 (1.2393)	1.2393 (1.2393)
G_1 (MCS)	0 (-0.061)	0 (-0.027)	0 (-0.027)	0 (-0.005)	0 (-0.005)
G_2 (MCS)	0.4967 (0.4676)	0.4980 (0.4846)	0.4982 (0.4846)	0.4978 (0.4952)	0.4983 (0.4960)
fn calls	108/135	217/341	240/400	918/2754	594/1782

*Function calls: (f calls)/(g calls)

따라서 적분차수를 올리면, 즉 적분점의 수를 늘려주면 TPQ 의 오차는 0 으로 수렴하지만 UDR 의 오차는 어느 수준 이하로 줄어들지 않게 된다.

최적화에 소요된 계산량을 비교해보면 TPQ 의 경우에는 3.2 절에 설명된 근사 민감도해석법이 효과적으로 계산량을 줄여주고 있음을 알 수 있다. 반면 UDR 의 경우는 유한차분법을 이용한 경우나 근사 민감도해석법을 이용한 경우나 큰 차이가 없음을 알 수 있다.

4.2 강건 위상최적설계

구조물의 위상최적설계 문제에서 최소화되는 목적함수로 컴플라이언스(Compliance), 변형에너지(Strain Energy) 등이 자주 사용된다. 이 값들은 재료가 존재하는 영역 Ω 에서 정의된 범함수(Functional)로 다음과 같이 표현이 가능하다.

$$J(\Omega, u, z) = \int_{\Omega} f(u(\Omega, z)) d\Omega \quad (16)$$

여기서 u 는 상태변수이며 z 는 시스템에 존재하는 불확실변수의 벡터이다. z 의 결합확률밀도가 $f_z(z)$ 로 주어졌을 때, J 의 평균과 분산은 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} \mu(J(\Omega, u, z)) &= \iint_{\Omega} f_z(z) f(u(\Omega, z)) d\Omega dz \\ &= \int f_z(z) J(\Omega, u, z) dz, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} Var(J(\Omega, u, z)) &= \int f_z(z) \left[\iint_{\Omega} f_z(z) f(u(\Omega, z)) d\Omega - \iint_{\Omega} f_z(z) f(u(\Omega, z)) d\Omega dz \right]^2 dz \\ &= \int f_z(z) \left[J(\Omega, u, z) - \mu(J(\Omega, u, z)) \right]^2 dz, \end{aligned} \quad (18)$$

이로부터 다음과 같은 강건 위상최적설계가 수식화 된다.

$$\begin{aligned} \text{Minimize } J^*(\Omega, u, z) &= \omega_1 \mu(J(\Omega, u, z)) + \omega_2 \sigma(J(\Omega, u, z)) \\ \text{Subject to Volume constraint } |\Omega| &= |\Omega|_{obj}, \\ \text{Perimeter constraint on } |\partial\Omega|, \end{aligned} \quad (19)$$

이 위상최적화의 해를 찾는 과정에서 가장 중요한 것은 구조물의 형태 및 위상에 대한 목적함수 J^* 의 설계민감도를 구하는 것이다. 식 (17), (18)의 평균과 분산의 식에서 설계변수인 Ω 와 확률변수 z 가 서로 독립적이라는 가정하에 $\mu(J)$ 의 설계민감도 $\mu_{\Omega}(J)$ 는 가우스구적법을 활용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mu_{\Omega}(J(\Omega, u, z)) = \int f_z(z) J_{\Omega}(\Omega, u, z) dz \square \sum_{i=1}^m w_i J_{\Omega}(\Omega, u, z_i), \quad (20)$$

여기서 J_{Ω} 는 범함수 J 의 설계민감도를 나타내며 w_i, z_i 는 z 의 확률분포로부터 구해지는 가우스구적법의 절점과 가중치이다. z 가 벡터인 경우에는 2.2 절에 설명된 TPQ나 UDR을 적용할 수 있다. $Var(J)$ 의 설계민감도도 같은 방법으로 다음과 같이 구할 수 있다.

$$Var_{\Omega}(J(\Omega, u, z)) \approx 2 \sum_{i=1}^m w_i \left\{ \begin{aligned} & \left[J(\Omega, u, z_i) - \mu(J(\Omega, u, z_i)) \right] \cdot \\ & \left[J_{\Omega}(\Omega, u, z_i) - \mu_{\Omega}(J(\Omega, u, z_i)) \right] \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

따라서 강건위상최적화의 설계민감도 $\partial J^*/\partial\Omega$ 는 z 의 적분점 z_i 에서의 J 의 설계민감도 $\partial J/\partial\Omega|_{z=z_i}$ 로부터 계산됨을 알 수 있다. $\partial J/\partial\Omega|_{z=z_i}$ 는 위상최적설계에 관한 많은 문헌에 유도되어 있다. 자세한 내용은 Chen et al.⁽²³⁾을 참조하기 바란다.

상기 내용을 랜덤한 분포하중을 받는 구조물의 위상최적설계에 적용하였다. 질량 제한조건 하에 컴플라이언스를 최소화하는 최적화를 수행하였고 결과를 아래 Fig. 4에 정리하였다. 위상최적설계는 레벨셋 기법(Level Set Method)⁽²⁴⁾을 이용하여 수행되었으며 선형탄성거동만을 고려하였다. 랜덤한 분포하중은 지수함수 형태의 상관함수(Correlation Function)를 가지는 가우시안 프로세스(Gaussian

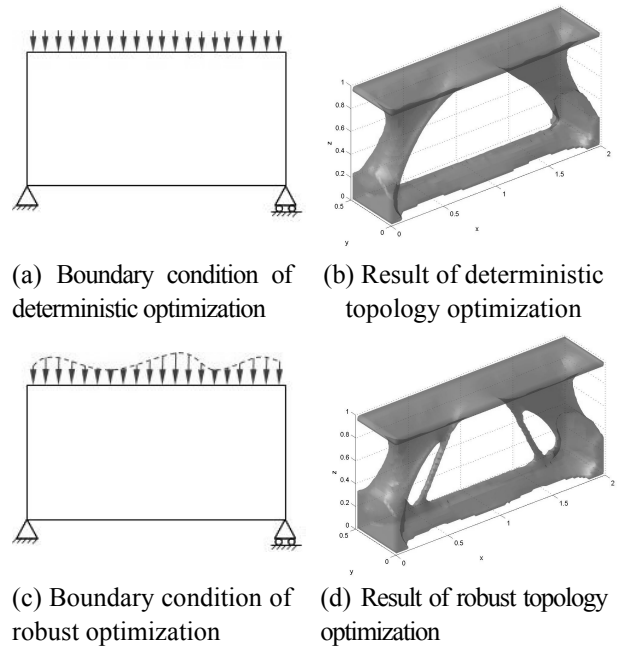


Fig. 4 Topology optimization of 3D bridge structure

Process)로 모델링 되었으며 Karhunen-Loeve 전개를 이용하여 구현되었다.⁽²⁵⁾ 비교를 위하여 하중의 불확실성을 고려하지 않은 위상최적화 결과를 같이 실었다. 최적설계의 결과로 얻어지는 구조물의 위상 및 형상이 하중의 불확실성을 고려함으로써 많이 달라졌음을 확인할 수 있다. 강건위상최적설계로 얻어진 구조의 컴플라이언스는 평균이 19.84, 표준편차가 4.64로 구해진 반면, 결정론적 위상최적화로 얻어진 구조에 랜덤하중이 가해졌을 때에는 평균이 22.49, 표준편차가 5.24로 강건위상최적화로 얻어진 구조가 그 성능 및 강건성이 모두 우수함을 알 수 있다. 모멘트 및 민감도의 계산에 UDR을 활용하여 강건설계에 소요되는 계산량을 대폭 줄일 수 있었다.

본 절에서 소개된 가우스구적법을 이용한 강건 위상최적화에 대한 보다 자세한 내용과 추가적인 예제들은 Chen et al.⁽²³⁾에서 찾아볼 수 있다.

5. 결론

가우스구적법을 활용하여 불확실성이 존재하는 공학시스템의 성능척도의 통계적 모멘트를 구하는 방법에 대해 논하였고 이를 강건설계에 적용하였다. 두 가지 다차원구적법에 대하여 설계민감도 해석을 수행하는 방법에 대하여 논하였고 이를 구조물의 강건최적화에 효과적으로 적용하였다. 가

우스 구적법이 연속확률변수를 이상적으로 이산화하는 방법임을 알 수 있었고 다양한 확률분포에 대하여 적용이 가능함을 보였다.

특히 UDR 기법은 평균과 표준편차 예측의 정확도와 우수한 계산효율을 가지고 있어 강건설계에 활용도가 높음을 알 수 있었다.

가우스구적법을 이용한 강건최적화의 기법을 위상최적화에 도입하여 성공적으로 강건위상최적설계를 수행하였다. 구조물에 가해지는 하중의 크기 및 분포의 불확실성을 랜덤필드(Random Field)로 모사하여 설계에 반영하여 실제 찾아진 설계가 성능 및 강건성에서 결정론적인 최적화의 해보다 우수함을 보였다. 향후 보다 다양한 종류의 불확실성을 고려한 강건위상최적화에 대한 연구가 이루어질 것이다.

참고문헌

- (1) Taguchi, G. and Wu, Y., 1980, *Introduction to Off-line Quality Control*, Central Japan Quality Control Association, Nagoya, Japan.
- (2) Phadke, M. S., 1995, *Quality Engineering Using Robust Design*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, USA.
- (3) Sundaresan, S., Ishii, K. and Houser, D. R., 1995, "A Robust Optimization Procedure with Variations on Design Variables and Constraints," *Engineering Optimization* Vol.24, pp. 101~117.
- (4) Han, J. S. and Kwak, B. M., 2004, "Robust Optimization Using a Gradient Index: MEMS Applications," *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 27, pp. 469~478.
- (5) Jung, D. H. and Lee, B. C., 2002, "Development of a simple and efficient method for robust optimization," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 53, pp. 2201~2215.
- (6) Chen, W., Allen, J. K., Tsui, K. L. and Mistree, F., 1996, "Procedure for Robust Design: Minimizing Variations Caused by Noise Factors and Control Factors," *Journal of Mechanical Design*, Vol. 118, pp. 478~485.
- (7) Abramowitz, M. and Stegun, I. A., 1965, *Handbook of Mathematical Functions, with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover, New York.
- (8) Krylov, V. I., 1962, *Approximate Calculation of Integrals*. Translated by A. H. Stroud, Macmillan, New York.
- (9) Taguchi, G., 1978, *Performance Analysis Design*, International Journal of Production Research, Vol. 16, pp.521~530.
- (10) D'Errico, J. R. and Zaino, N. A., 1988, "Statistical Tolerancing Using a Modification of Taguchi's Method," *Technometrics*, Vol. 30, pp. 397~405.
- (11) Seo, H. S. and Kwak, B. M., 2002, "Efficient Statistical Tolerance Analysis for General Distributions Using Three-Point Information," *International Journal of Production Research*, Vol. 40, pp. 931~944.
- (12) Lee, S. H., Choi, H. S. and Kwak, B. M., 2008, "Multi-Level Design of Experiments for Statistical Moment and Probability Calculation," *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 37, pp. 57~70.
- (13) Lee, S. H. and Kwak, B. M., 2006, "Response Surface Augmented Moment Method for Efficient Reliability Analysis," *Structural Safety*, Vol. 28, pp. 261~272.
- (14) Rosenblueth, E., 1981, "Two Point Estimates in Probabilities," *Applied Mathematical Modeling*, Vol. 5, pp. 329~335.
- (15) Hong, H. P., 1998, "An Efficient Point Estimate Method for Probabilistic Analysis," *Reliability Engineering and Systems Safety*, Vol. 59, pp. 261~267.
- (16) Harr, M. E., 1989, "Probability Estimate for Multivariate Analysis," *Applied Mathematical Modeling*, Vol. 13, pp. 313~318.
- (17) Lee, S. H., Chen, W. and Kwak, B. M., 2008, "Robust Design with Arbitrary Distributions Using Gauss-type Quadrature Formula," *Structural and Multidisciplinary Optimization*, DOI: 10.1007/s00158-008-0328-2.
- (18) Evans, D. H., 1967, "An application of numerical integration techniques to statistical tolerancing," *Technometrics*, Vol. 9, pp. 441~456.
- (19) Rahman, S. and Xu, H., 2004. "A Univariate Dimension-Reduction Method for Multi-Dimensional Integration in Stochastic Mechanics," *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 19, pp. 393~408.
- (20) Xu, H. and Rahman, S., 2004, "A Generalized Dimension-Reduction Method for Multi-Dimensional Integration in Stochastic Mechanics," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 61, pp. 1992~2019.
- (21) Lee, S. H. and Chen, W., 2008, "A Comparative Study of Uncertainty Propagation Methods for Black-Box Type Problems," *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 37, pp. 239~253.
- (22) Hahn, G. J. and Shapiro, S. S., 1967, *Statistical Models in Engineering*, Wiley, New York.
- (23) Chen, S., Lee, S. H. and Chen, W. 2009 "Level Set Based Robust Shape and Topology Optimization Under Random Field Uncertainties," *Proceedings of ASME 2009 International Design Engineering*

- Technical Conferences*, August 30 - September 2, 2009, San Diego, California, USA
- (24) Wang, M. Y., Wang, X. and Guo, D., 2003, "A Level Set Method for Structural Topology Optimization," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 192, pp. 227~246.
- (25) Ghanem, R.G. and Spanos, P.D., 1991, *Stochastic Finite Element Analysis, A Spectral Approach*, New York: Springer-Verlag.