한국초등수학교육학회지 13(1) 115-140. Journal of Elementary Mathematics Education in Korea 13(1) 115-140.

Freudenthal의 수학화 이론에 근거한 제 7차 초등수학 교과서 5-가 단계 넓이 단원의 재구성

유 미 현[1] · 강 흥 규[2]

Freudenthal은 수학화를 핵심 개념으로 하는 현실주의 수학 교육론을 주창하였다. 수학화란 현실 안에 있는 여러 현상들을 수학적인 수단을 사용하여 조직함으로써 현실에 질서를 부여하는 활동을 말한다. 본 연구에서는 Freudenthal의 수학화 이론을 바탕으로 제 7차 초등 수학 교과서 5-가 단계의 넓이 단원을 재구성하여 실험적인 지도안을 작성한 다음, 이를 통하여 교수 실험을 실시함으로써, 수학화를 통한 넓이의 지도 방안의 효과와 더불어 학생들의 넓이 개념과 공식에 대한 이해 실태를 분석하였다. 그 결과, 넓이의 개념 이해 측면에서는 실험반 학생들이 우수하였으나, 넓이의 계산 측면에서는 유의미한 차이가 없는 것으로 나타났다.

[주제어] 수학화, 현실맥락, 넓이, 넓이 단위, 넓이 공식, 카발리에리의 원리

Ⅰ. 서 론

초등수학에서 넓이의 개념과 계산 규칙의 핵심은 공식 '(밑변)×(높이)=(넓이)'으로 요약될 수 있다. 얼핏 본다면 이 공식은 너무 단순하고 자명한 나머지 그것을 가르치고 배우는 일이 별로 어렵지 않을 것으로 여겨진다. 하지만 이 공식에 근거해서 여타의 다른 도형(평행사변형, 삼각형, 사다리꼴, 마름모 등)의 넓이 공식이 파생된다. 그리고 이 공식을 제대로 이해하기 위해서는 넓이를 직관적으로 비교할 수 있는 양감이 있어야 하고, 자르기와 붙이기 조작의 과정에서 넓이는 불변한다는 이른바 넓이의 보존 개념을 갖추고 있어야 한다.

현재의 제 7차 초등수학 교과서에서 넓이의 개념과 계산 공식은 5-가 단계에서 다루고 있다. 이 교과서는 넓이 공식을 다루는데 있어서 도형의 변형활동을 통하여 아동이 직접 공식을 만들어보도록 시도하고 있으나, 실제로는 용어를 미리 제시함으로써 아동이 자신만의 언어를 써서 공식을 만드는 경험을 성취하지 못하도록 하고 있다(이선영, 2006).

이 논문에서는 넓이 공식의 기계적인 암송과 적용을 위주로 하는 교수법을 지양하고, 그 대신 넓이 개념에 대한 이해를 중시하는 새로운 지도안을 구안하여 그 효과를 검증해 보고자 한다. 새로운 지도안 구성의 배경 이론으로는 Freudenthal의 수학화 이론을 채택하였다. Freudenthal의 수학화 이론에 근거하여 넓이에 대한 양감의 형성과 개념의 이해

1) [제1저자] 서산 서동초등학교
2) 공주교육대학교 수학교육과

그리고 공식의 점진적인 형식화를 중시하는 방향으로 제 7차 교과서의 넓이 단원을 재구성하고, 이 새로운 지도안을 학교 현장에 적용한 후 그 결과를 분석할 것이다.

II. 이론적 배경

이 장에서는 먼저 평면도형의 넓이 개념과 계산 공식을 교수학적으로 분석하고, 이어서 실험적 지도안 작성의 교수학적 근거로 채용된 Freudenthal의 수학화 이론에 대해 간략히 고찰하였다.

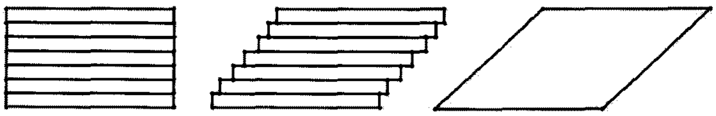
1. 넓이 개념의 교수학적 분석

넓이 개념은 네 가지 측면을 가지고 있다. 첫째, 직관적인 넓이 개념이다. 이는 길이, 부피, 무게와 함께 선천적인 기하학적 직관의 일종으로서 주변의 사물이 차지하는 영역의 대소를 구별하는 능력이다. 넓이 지도의 초기 단계에서는 아동이 넓이 직관을 보유하고 있다는 가정하에 여러 활동에 이루어진다.

어느 정도 넓이 개념이 형성되면 활동은 좀 더 조작적인 성격을 가진다. 도형의 넓이는 그 도형을 완전히 덮을 때 필요한 정사각형의 개수이다. 직사각형의 넓이를 구하는 공식 '(가로)×(세로)' 는 '(가로에 놓이는 단위 정사각형의 개수)×(세로에 놓이는 단위 정사각형의 개수)' 에서 유도된 것이다(교육인적자원부, 2002a).

평행사변형이나 삼각형과 같이 직접측정의 방법으로 넓이를 구할 수 없는 도형의 경우에는 도형을 자르고 붙이는 조작이 필요하다. 이 경우 자르고 붙이는 조작의 과정에서 넓이는 변하지 않는다는 것, 즉 넓이의 보존 개념이 전제된다.

자르고 붙이는 개념에서 한발 더 나아가는 것이 카발리에리(Cavalieri)의 원리이다. 이 원리의 내용은 두 입체의 높이와 밑면의 넓이가 같을 때, 밑면에 평행이며 그 밑면으로부터 등거리에 있는 평면으로 자른 단면의 넓이가 모두 같으면 두 입체의 부피는 같다는 것이다. 넓이에 대해서도 유사하게 성립한다. 예를 들어 동일한 나무판 여러 개가 쌓여있는 무더기에서, 그것을 옆으로 밀어서 모양을 다양하게 변화시켰을 때, 그 옆면의 모양을 변할지라도 넓이는 불변이다. 사실 카발리에리의 원리는 초등수학의 수준에서는 명제화시켜서 설명하기 어려울 뿐만 아니라 증명하는 것도 불가능하다. 그러나 카발리에리의 원리는 밑변과 높이가 같은 삼각형이나 평행사변형은 그 넓이가 모두 같다는 사실을 직관적으로 설명할 수 있는 효과적인 방법 중에 하나이다.



[그림 1] 카발리에리의 원리의 단순화

넓이 공식을 다루는 순서는 크게 두 가지가 있다. 직사각형→삼각형→평행사변형의 순서와 직사각형→평행사변형→삼각형→직사각형의 순서가 그것이다. 전자의 방법은 높이를 나타내는 선분이 삼각형의 외부에 있는 경우, 즉 둔각삼각형을 다루기가 어려운 반면, 후

자의 경우는 그렇지 않다.

직사각형의 넓이 공식으로부터 평행사변형과 삼각형의 넓이 공식을 유도하는 방법도 두 가지가 있다. 첫째, 자르고 붙이기라는 등적변형을 사용하여 평행사변형은 직사각형으로, 삼각형은 평행사변형의 절반으로 환원시키는 방법이다. 둘째, 카발리에리의 원리에 근거하여 밑변과 높이를 변화시키지 않는 이른바 '밀기(shifting)' 변형을 이용하여 평행사변형은 직사각형으로, 삼각형은 직각삼각형으로 환원시키는 방법이다.

제 7차 교과서는 직사각형, 평행사변형, 삼각형의 넓이 공식을 유도하는 과정에서 모눈 격자를 기반으로 다양한 변형(등적, 배적, 반적 변형)을 수행한다(교육인적자원부, 2002a). 하지만 도형의 모든 변이 수평도 아니고 수직도 아닌 선분(즉 격자 방향이 아닌 대각선 방향)으로 이루어진 도형은 다루어지지 않는다. 이런 유형의 경우 넓이에 해당하는 격자의 칸수를 세고자 할 때 다양한 비형식적 방법이 사용될 수 있다는 장점이 있다(Gravemeijer, Clarke, Pligge, 1997). 첫째는 자르고 붙이는 조작을 통하여 등적변형하는 방법, 둘째는 주어진 도형을 품는 직사각형을 그린 다음 외부를 제거하는 방법, 셋째는 주어진 도형을 넓이를 구하기 쉬운 작은 여러 조각으로 나누어서 구하는 방법이다. 본 연구에서 개발할 실험 지도안에서는 이러한 비형식적 전략을 채용함으로써 격자판 위에서의 도형의 조작 활동을 더욱 다양하게 만들 것이다.

2. Freudenthal의 수학화 이론

Freudenthal의 수학교육사상은 현실 중심의 사상이다. Freudenthal에 따르면 수학은 처음부터 추상적이고 형식적인 학문에서 출발한 것이 아니라, 인간이 세계를 이해하고 조직하는 창조적인 활동을 위한 수단으로 발생한 것이다. 그에게 있어서 현실이란 생활 사태라는 좁은 의미를 넘어서서 물리적, 사회적, 정신적인 세계를 아우르면서 계속적으로 확대되는 종합적인 세계이다(김유진, 2007).

Freudenthal의 수학교육론은 '수학화' 라는 핵심 개념을 중심으로 전개된다. 수학화란 현실을 수학적인 수단을 사용하여 정리하고 조직하고 질서를 부여하는 활동을 말한다. 한 차례 수학화가 이루어지면 이 수학화의 업적은 현실에 함유되어 현실을 확장시키고 이렇게 확장된 현실은 새로운 수학적인 수단에 의하여 재조직되는데, 이전 단계에서 조직의 수단이 되었던 본질이 이제는 조직되어야만 할 현상이 된다. 수학화는 이러한 현상과 본질의 교대작용에 의한 수준의 상승으로 이루어지며 종국적으로는 추상적이고 연역적인 구조에 이르게 된다(강흥규, 2003).

Freudenthal의 이러한 시각은 안내된 재발명 방법이라는 교수법으로 이어진다. 안내된 재발명 방법은 수학화의 과정을 재현하는 과정으로서, 의미가 풍부한 현실 맥락에서부터 출발하여 심상을 구성하게 하고 이를 바탕으로 개념형성으로 나아가는 과정이다(이선경, 2005).

Freudenthal의 이러한 방법은 전통적인 방법과 대비된다. 전통적인 연역적 방법에서는 완성된 공식이나 형식화된 개념을 먼저 제시하고 몇몇의 사례를 통해서 훈련시킨 후 마지막으로 응용문제, 즉 배운 공식이나 개념을 적용할 수 있는 현실 문제를 다루는 순서를 따른다. Freudenthal은 이러한 연역적인 방법의 가장 큰 문제 마지막 단계인 응용 단계에서 진정한 응용이 이루어지지 못한다고 주장한다. 실제로 응용 단계의 대부분이 일반적인 공식의 변수에 특수한 값을 대입함으로써 해결되는 기계적인 문제들이 주류를 이루는 경우가 많다. Freudenthal의 수학화는 전통적인 연역주의에 대한 대안으로 제시된 것이다.

Freudenthal은 완성된 공식이나 형식화된 개념이 아니라 수학적 관계, 개념, 구조로 정리될 필요가 있는 현실로부터 출발하여 수학적인 개념이나 구조를 통하여 그것을 정리하는 활동이 진정한 응용 상황이라고 주장하였다.

수학화에 근거한 수학교육은 학생들에게 수학적인 안목으로서 현상을 파악하는 능력을 길러주는 동시에 생활과 과학에 유용한 도구로서의 가치를 깨닫게 만드는 것을 추구한다. 다시 말하면, 수학에 대한 안목이 형성되게 함으로써 삶의 과정을 풍요롭게 하는 동시에, 현실 세계를 이해하는 방편으로서 수학을 창조하고 활동함으로써 수학의 유용성을 알게 함으로써 학문중심주의와 실용주의를 통합한 인간주의를 성취하고자 한다(정영옥, 1997).

Ⅲ. 교과서 분석

1. 교과서 분석의 준거

제 7차 초등수학 5-가 단계의 '평면도형의 둘레와 넓이' 단원을 아래의 세 가지 준거를 따라 분석하였다.

첫째, 넓이 개념을 어느 정도로 명시적인 수준에서 정의하고 있으며 넓이 개념의 여러 측면 중 어떤 측면을 채용하고 있는가?

둘째, 도형의 둘레와 넓이를 계산하는 방법을 공식화하는 시점이 언제이며 공식화하기 이전에 넓이 개념의 이해를 위한 현실맥락을 어느 정도 도입하는가?

셋째, 다양한 평면도형의 넓이 공식을 유도하는 방법, 평면도형의 둘레와 넓이사이의 관계에 있어서 어떤 지도계열을 취하고 있는가?

2. 교과서 분석의 결과

가. 넓이 개념

제 7차 교과서에서는 넓이의 개념을 명시적으로 정의하고 있지 않다. '어떤 도형을 겹치지 않고 빠짐없이 덮는데 필요한 단위 정사각형의 개수' 라는 넓이의 정의 없이 곧바로 단위 넓이 1cm^2를 약속하고 있다.

넓이 개념은 네 가지 측면(직관적인 넓이 개념, 단위 정사각형의 개수, 자르고 붙이기에 의한 등적변형 조작에서의 불변성, 카발리에리의 원리) 중에서 제 7차 교과서는 둘째와 셋째 측면만을 다룬다.

넓이의 측정과정에서 $\text{mm}^2 \rightarrow \text{cm}^2 \rightarrow \text{m}^2$와 같은 단위의 체계가 형성 되는데 그 핵심은 비율 관계이다. 길이 단위의 체계 $\text{mm} \rightarrow \text{cm} \rightarrow \text{m}$에서는 인접한 단위 사이의 관계가 열배이지만, 넓이 단위의 체계 $\text{mm}^2 \rightarrow \text{cm}^2 \rightarrow \text{m}^2$에서는 10×10이 되어서 100배이다. 단위체계에서의 이러한 관계는 직사각형에서 변의 길이와 넓이 사이의 승법성이라는 보다 일반적인 개념의 특수한 사례로서, 넓이 개념과 관련하여 아동이 특히 많은 장애를 드러내는 부분이다(허학도, 2006). 제 7차 교과서에서는 1cm^2와 1m^2 사이의 비율관계를 한 차시에 걸쳐서 다루고 있긴 하나, 기계적인 환산 연습 위주로 되어 있기 때문에 두 단위 사이의 비율 관계를 잘 드러내지 못하고 있다.

제 7차 교과서와 익힘책에서는 넓이의 값이 분수와 소수의 형태로 되는 문제를 회피하

고 있을 뿐만 아니라, 변의 길이의 값도 분수와 소수가 되는 경우를 다루지 않는다. 즉, 등장하는 모든 수 값은 반드시 자연수인 경우만을 다룬다. 이렇듯 분수나 소수값을 배제하고 있음에도 불구하고, 익힘책에서는 넓이의 계산 과정에서 분수와 소수값이 피치 못하게 등장하는 사례가 발생한다.

> 영수네 교실의 뒷 쪽 게시판은 가로가 4m이고 세로가 120cm인 직사각형 모양입니다. 물음에 답하시오. 이 게시판의 가로는 몇 cm입니까? 이 게시판의 넓이는 몇 cm^2입니까? 이 게시판의 넓이는 몇 m^2입니까?(교육인적자원부, 2002b)

또한 제 7차 교과서에서는 넓이 단원에 이은 다음 단원에서 분수의 곱셈 알고리즘을 설명할 때 사용되는 이른바 '넓이 모델' 에서 변의 길이와 넓이의 값은 분수의 형태이다. 연계성의 측면에서 볼 때 넓이 단원에서 넓이의 값이 분수나 소수인 경우를 적극적으로 다룰 필요가 있다.

나. 공식화와 현실맥락

제 7차 교과서는 넓이의 표준 단위 도입, 도형의 둘레와 넓이의 관계 등을 다루는데 있어서 충분한 개념 이해가 이루어지지 않은 상태에서 조기에 공식화하는 경향이 있다. 넓이의 표준단위를 약속하기에 앞서 직접비교와 간접비교 그리고 임의 단위를 통한 비교를 모두 거치기는 하지만, 이 모든 활동을 한 차시 안에서 압축적으로 다루다보니 표준단위의 도입에 필요한 넓이 직관의 형성이 불충분하게 된다.

공식이 필요하지 않은 상황에서도 지나친 공식화를 하는 경우도 있다. 직사각형의 둘레의 길이를 계산하는 과정에서, 정사각형과 직사각형을 별도의 경우로 구분함으로써 사고를 더욱 복잡하게 만들고 있다. 직사각형과 정사각형의 넓이의 공식을 구분한 것도 통합적인 이해라는 공식의 취지를 살리지 못하는 사례이다.

제 7차 교과서에서는 넓이 공식을 유도하기 위한 활동에서 도형을 모눈종이를 배경으로 제시한다. 하지만 공식이 제시된 다음부터는 모눈종이 없이 단순히 가로와 세로의 길이와 함께 도형이 홀로 제시된다. 이는 넓이 공식을 유도할 때에만 모눈종이를 사용하게 하고, 공식이 제시된 다음부터는 반드시 그 공식을 사용하게 만들려는 장치로 보인다. 이런 방식은 넓이를 구하는 다양한 비형식적인 전략을 배제하고 공식을 기계적으로 적용하는 훈련으로 치우칠 위험성이 있다.

7차 교육과정은 생활에서 출발하는 수학을 지향하고 있으나, 실제 교과서에 사용된 현실맥락은 완성된 공식을 도입하기 위한 인위적이고 상황이거나 정형화된 문장제인 경우가 많다. 넓이 개념의 도입에서 '꽃밭의 넓이' 가 여러 번 중복돼서 등장하는 것은 현실맥락이 다양하지 못한 사례이다.

7차 교과서에서는 넓이의 표준단위와 공식을 도입하기 전에 직관적인 양감의 형성을 도와주는 활동이 미약하다. 직접비교와 간접비교, 임의단위를 통한 비교 등이 다루어지기는 하지만 한 번씩 스치듯 다루어질 뿐이며, 넓이 공식의 기반이 될 수 있는 개념 형성을 위한 맥락문제는 제시되지 않는다.

요약하면, 제 7차 교과서 5-가 단계의 넓이 단원은 외견상으로는 현실맥락에서 출발하여 탐구를 통한 공식의 발견과 적용을 추구하는 형태를 띠지만, 실제로는 공식을 먼저 알려주고 난 후 그 공식을 간단한 사례에 적용하고 응용함으로써 점차로 이해시키고자 하는

이른바 '구상화(concretization)'에 더 가깝다.

다. 지도 계열

제 7차 교과서에서의 '평면도형의 둘레와 넓이' 단원에서는 직사각형의 둘레가 단원의 처음인 제 1차시에 나온다. 그러나 그 뒤에는 도형의 둘레에 관련된 내용이 전혀 언급되지 않는다. 도형의 둘레와 넓이라는 단원명으로 제시되지만 실제로 둘레와 넓이는 유기적으로 연관되지 못하고 있다.

공식의 유도과정 또한 유기적으로 연관성을 맺지 못하고 있다. 직사각형→정사각형→평행사변형→삼각형의 순서로 각각의 넓이 공식이 유도되는 과정에서, 여러 공식들 사이의 유기적 연관성 보다는 각각의 공식의 습득과 적용 연습에 초점을 맞추고 있다.

Ⅳ. 넓이 단원 재구성

이 장에서는 현재의 제 7차 수학 5-가 단계의 '평면도형의 둘레와 넓이' 단원을 Freudenthal의 수학화 이론에 입각하여 재구성함으로써 작성한 실험적 지도안을 제시한다.

1. 재구성의 방향과 개요

본 연구에서는 다음과 같은 방침을 따라서 실험 지도안을 작성하였다.

첫째, 공식을 도입하기 전에 그 공식의 이해를 위한 기반으로서의 현실 맥락을 풍부하게 다룬다. 이는 2006년에 개정된 새로운 교육과정의 목표와도 부합한다. 2006년 개정 교육과정 해설서에서는 다음과 같이 말하고 있다. "넓이를 구하는 공식에 중심을 둘 것이 아니라 넓이 개념을 충분히 이해한 후에 가로와 세로의 곱으로 넓이를 구하는 일반적인 방법을 활용할 수 있도록 한다" (교육과학기술부, 2007). 본 실험 지도안에서는 넓이 직관을 사용하여 넓이를 비교하는 현실맥락 문제와 구체적 활동을 먼저 다루고 나서 넓이에 대한 형식적인 정의와 공식을 도입한다. 따라서 넓이 공식을 제시하는 시기는 현재의 교과서보다 훨씬 뒤로 미뤄진다.

둘째, 격자 모양의 모눈종이 위에 주어진 다양한 형태의 도형의 넓이를 구하는 비형식적 방법을 더욱 다양하게 구비하였다. 모눈종이는 작은 정사각형 하나하나가 표준 넓이의 기능을 할 수 있어 넓이의 개념 형성이나 공식의 유도에 필요한 다양한 조작활동이 이루어 질 수 있는 기반이 될 것이다. 2006년 개정 교육과정 해설서에서도 "평행사변형, 사다리꼴, 마름모의 넓이 구하기는 모양은 변하지만 넓이는 변하지 않게 변형하거나 도형을 분할하는 등 다양한 방법을 이해한 후 구하게 한다" 라고 말함으로써 다양한 비형식적 전략을 사용할 것을 권고하고 있다(교육과학기술부, 2007).

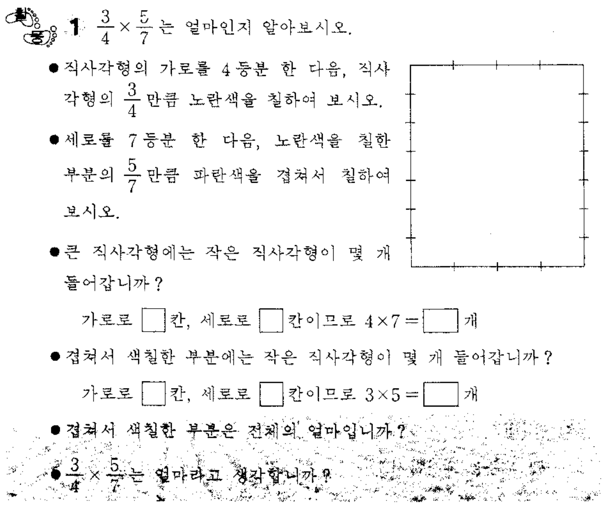
셋째, 도형의 둘레의 길이와 도형의 넓이의 사이의 상관 관계를 다루는 활동에 중점을 둔다. 제 7차 교과서에서도 도형의 둘레에 관해서 다루고 있기는 하지만 도형의 둘레를 구하는 공식을 틀에 박힌 형태로 먼저 제시하고 그것을 간단한 사례에서 적용 연습하는 수준에 그치고 있다. 2006년 개정 교육과정에서는 7차 교육과정과는 다르게 평면도형의 둘레의 길이에 관한 내용을 4학년으로 이동시켰다. 이렇게 되면 평면도형의 둘레의 길이와 넓이 사이의 관계를 다루기가 어렵게 된다. 본 논문에서는 도형의 둘레에 관한 내용을

도형의 넓이 단원의 제일 마지막에 배치하여 넓이와 둘레와의 관계를 심화시켜 다루고자 시도하였는데, 이는 2006년 개정 교육과정의 방향과는 다소 상충된다(교육과학기술부, 2007).

넷째, 정사각형과 직사각형의 넓이 공식을 (가로)×(세로)가 아닌 (밑변)×(높이)로 규정함으로써 평행사변형의 공식과 통합시킨다. 이렇게 하는 이유는, 첫째 논리적인 면에서 직사각형은 평행사변형의 일종이기 때문이며, 둘째 카발리에리의 원리에 의해서 평행사변형은 넓이가 일정하게 유지된채 연속적으로 직사각형으로 변형될 수 있기 때문이며, 셋째 밑변과 높이라는 개념은 삼각형과 사다리꼴의 넓이 공식에도 적용되는 매우 보편적인 개념이기 때문이다.

다섯째, 넓이 개념의 핵심적 부분인 비율관계를 다루는 활동을 증가시킨다. 예를 들어 직사각형에서 한 변의 길이만을 두 배로 늘리면 넓이는 두 배로 증가하지만, 두 변을 모두 두 배로 늘리면 넓이는 네 배로 증가한다. 넓이에서의 비율관계는 선형 함수로서의 넓이 개념의 본질적인 부분이다. 그러나 현재의 제 7차 교과서에서는 단순히 m^2단위를 cm^2단위로 고치는 활동에 그치고 있다.

여섯째, 도형의 변의 길이나 넓이의 수값이 분수나 소수인 상황을 포함시킨다. 그 이유는 첫째 넓이를 배우기에 앞서 이미 분수는 넓이로서 도입되었기 때문이고[3] 또한 넓이 단원에 뒤이은 '분수의 곱셈' 단원에서 분수의 곱셈을 설명할 때 사용되는 넓이 모델에서 변의 길이와 넓이의 값이 분수인 경우가 필요하기 때문이다.



[그림 2] 분수의 곱셈에서의 넓이 모델

2. 재구성의 구체적 내용

앞서 진술한 일반적인 방향을 따라서 작성한 넓이 단원의 실험적 지도안의 차시별 체제는 <표 1>과 같다.

---

3) 예를 들어 $\frac{1}{3}$은 정사각형을 세 등분했을 때 한 조각이다(교육인적자원부, 2002c).

<표 1> 실험 지도안의 차시별 체제

차시	주제	주요활동	지도단계	주요개념
1	임의단위의 개수를 세는 방법을 통하여 넓이를 어림하고 비교하기	·찌그러진 폐곡선 모양의 땅 넓이 비교 ·친구와 손바닥 넓이 비교하기	직접비교 간접비교	
2	기준이 되는 크기와의 비율관계를 통하여 어떤 크기의 가격 알아보기	·육안으로 비교하기 어려운 두 도형의 넓이를 작은 패턴 블럭으로 비교하기 ·서로 다른 모양의 종이의 상대적인 가격을 알아보기	임의단위를 이용한 측정	
3	모눈종이 위에 주어진 도형의 넓이를 비형식적 전략을 사용하여 구하기	·다양한 모양의 땅을 덮는데 필요한 물의 양 ·모눈종이 위에서 도형의 넓이 구하기	직접측정	넓이 정의 1㎠ 약속
4	직사각형과 직각삼각형의 넓이 공식의 발견	·직사각형의 넓이 구하기 ·직각삼각형의 넓이 구하기	직접측정	직사각형의 넓이공식 직각삼각형의 넓이 공식
5	평행사변형의 넓이 공식의 발견	·평행사변형에서의 카발리에리의 원리를 학습지에 그림으로 표현하기	직접측정	평행사변형의 넓이(직사각형과 같음)
6	삼각형의 넓이 공식의 발견	·직각삼각형에서의 카발리에리의 원리를 학습지에 그림으로 표현하기	직접측정	삼각형의 넓이(직각삼각형과 같음)
7	넓이 비율관계를 통한 단위사이의 환산	·벌집모양을 덮기 위해 필요한 정삼각형 개수 ·천조각, 손수건, 보자기 만들기 ·1㎡안에 들어가는 1㎠ 조각의 수	간접측정	1㎡=10000㎠
8	분수나 소수의 값을 이용하여 넓이 나타내기	·길이단위가 일치하지 않는 직사각형의 넓이 ·분수나 소수값을 사용한 넓이 구하기 ·가로와 세로가 분수값인 직사각형의 넓이	간접측정	
9	도형의 넓이와 둘레의 길이 사이의 관계	·도형의 둘레의 길이와 넓이 구하기 ·넓이가 정해져 있을 때 그릴 수 있는 직사각형 ·둘레의 길이가 정해져 있을 때 그릴 수 있는 직사각형		

실험지도안의 핵심 내용을 차시별로 보다 상세하게 요약하면 다음과 같다.

가. 1차시 : 임의단위의 개수를 세는 활동을 통하여 넓이를 어림하고 비교하기

1차시에서는 서로 다른 크기의 비정형 도형의 넓이를 직관적으로 어림하고 비교하는 활

동을 한 후 보다 정확히 넓이를 비교하는 방법을 탐구한다. 넓이를 직관적으로 어림하고 비교하는 활동은 넓이 직관을 풍부하게 함으로써 넓이 개념을 발달시킬 뿐만 아니라, 다음 단계에서 넓이 공식을 이해할 수 있는 토대를 제공한다. 이번 차시에서는 넓이라는 용어를 명시적으로 도입하지 않고 '더 넓은 것' 과 '더 좁은 것' 을 구분할 수 있는 방법(어떤 도형을 기준으로 정하고 그것의 개수를 세는 방법)에 대헤 더 초점을 맞춘다. 2006년 개정 교육과정 해설서에서도 다음과 같이 말하고 있다. "다양한 형태와 크기의 임의 단위로 도형을 덮어봄으로써 넓이를 비교할 때 임의 단위가 불편함을 알게 한다. 임의 단위의 불편함을 깨닫게 한 후에 넓이의 표준 단위로 $1cm^2$를 도입하고, $1cm^2$의 실제 넓이에 대한 양감을 느끼게 한다" (교육과학기술부, 2007).

나. 2차시 : 기준이 되는 크기와의 비율관계를 통하여 어떤 크기의 가격을 알아보기

2차시에서는 임의단위를 이용하여 넓이를 규정하는 활동을 한다. 한 패턴 블럭을 덮기 위해서 다른 패턴 블럭이 얼마나 필요한지 알아보고 나서, 육안으로는 넓이 비교가 어려운 두 도형을 패턴블럭을 이용하여 정확하게 비교하게 한다. 이때 패턴 블럭을 덮기 위해 필요한 조각의 수를 구하도록 한다. 넓이값은 어떤 패턴블럭을 기준으로 잡았느냐에 따라서 자연수, 분수, 소수 등 다양한 형식으로 나타낼 수 있게 된다.

다음으로는 2×2 정사각형을 기준으로 하여 이 도형과의 넓이 비교를 통해서 어떤 도형의 상대적인 가격을 알아보는 활동을 수행한다. 이 활동을 통해 정사각형 단위 넓이의 도입을 준비한다. 비교 대상이 되는 도형은 기준 정사각형보다 넓이가 큰 것도 있고 작은 것도 있으며 평행사변형, 사다리꼴, 삼각형 등 다양한 형태를 띠도록 한다.

다. 3차시 : 모눈종이 위에 주어진 도형의 넓이를 비형식적 전략을 사용하여 구하기

3차시에서는 넓이의 개념과 표준단위를 정의한다. 현재의 제 7차 교과서에서는 넓이를 명확하게 정의하지 않은 채 넓이 측정 활동을 제시 하지만, 학생들의 넓이에 대한 이해를 돕기 위해서는 용어의 정확한 정의가 필요하기 때문이다. 그 다음에는 다양한 도형을 모눈종이 위에 제시하고 넓이를 구하도록 한다. 학생들은 아직 넓이 공식을 배우지 않았기 때문에 비형식적 방법을 사용해야만 한다. 다양한 비형식적 전략을 촉진시키기 위하여 비정형 도형도 포함시켰으며, 넓이의 값이 분수나 소수의 형태를 띠는 경우도 포함시켰다.

라. 4차시 : 직사각형과 직각삼각형의 넓이 공식의 발견

4차시에서는 평면 도형의 넓이 공식의 기초가 되는 직사각형의 넓이 공식을 발견하도록 한다. 격자 위에 제시된 직사각형과 직각삼각형의 넓이를 그 안에 들어가는 칸의 수를 일일이 세지 않고 간편하게 구할 수 있는 방법을 찾아는 활동을 통해서 공식의 발견을 유도한다.

넓이에서 관건이 되는 양은 '높이' 이다. 직사각형에서의 높이는 변으로 정확하게 보이지만 평행사변형이나 삼각형에서는 추상적인 것이다. 여기서는 직사각형의 넓이 공식을 (가로)×(세로)가 아닌 (밑변)×(높이)로 제시함으로써 높이 개념을 부각시키고 곧 이어서 배울 평행사변형의 넓이 공식과의 관련성을 강화시킨다.

마. 5차시 : 평행사변형의 넓이 공식의 발견

5차시에서는 카발리에리의 원리를 사용하여 평행사변형을 직사각형으로 변형하는 활동을 통하여 평행사변형의 넓이 공식을 탐구하다. 직접 제작한 교구와 GSP를 이용하여 모든 평행사변형은 밑변과 높이가 같은 직사각형으로 변형될 수 있음을 보여주고 이 과정을 그림으로 표현하게 함으로써 이해를 돕는다. 수평이 아닌 비스듬한 변이 기준변인 경우도 다룸으로써, 밑변은 '밑에 있는 변' 이고 높이는 '수직인 선분' 이라는 오개념을 극복할 수 있도록 하였다. 평행사변형을 직사각형으로 변형하는 과정에서 불변하는 요소는 밑변과 높이 그리고 넓이이다. 이 세 요소를 결합하여 (밑변)×(높이)=(넓이)라는 공식을 이룬다. 앞서 직사각형의 넓이를 (밑변)×(높이)로 정의했으므로 평행사변형을 위한 새로운 공식을 필요하지 않다.

바. 6차시 : 삼각형의 넓이 공식의 발견

6차시에서는 카발리에리의 원리를 이용하여 임의의 삼각형을 직각삼각형으로 변형하는 활동을 통하여 삼각형의 넓이 공식을 탐구한다. 직접 제작한 교구와 GSP를 이용하여 모든 삼각형은 밑변과 높이가 같은 직각삼형으로 변형될 수 있음을 보여주고 이 과정을 그림으로 표현해 보게 함으로써 이해를 돕는다. 수평이 아닌 비스듬한 변이 기준변인 경우도 다룸으로써, 밑변은 '밑에 있는 변' 이고 높이는 '수직인 선분' 이라는 오개념을 극복할 수 있도록 하였다. 임의의 삼각형을 직각삼각형으로 변형하는 과정에서 불변하는 요소는 밑변과 높이 그리고 넓이이다. 특히 넓이는 이러한 변형과정에서 불변하는 요소로서 도입한 뒤에 형식적으로 정의한다. 카발리에리의 원리에 의한 이러한 변형은 둔각삼각형의 경우도 쉽게 포괄할 수 있다.

사. 7차시 : 두 도형의 넓이의 비율관계를 통한 단위 사이의 환산

7차시에서는 $1cm^2$와 $1m^2$이의 비율관계를 다룬다. 이를 위해 먼저 패턴블럭을 사용하여 정육각형을 덮는데 필요한 정삼각형의 개수를 탐구한다. 그 다음에는 크기가 서로 다른 세 종류의 정사각형을 제시하고 그 중의 하나를 다른 하나로 덮을 때 필요한 개수를 구하게 함으로써 변의 길이 사이의 비율관계와 넓이 사이의 비율관계를 탐구한다. 이 과정에서 다양한 전략이 등장할 수 있으며 이러한 활동의 결과로 $1cm^2$와 $1m^2$ 사이의 관계를 파악할 수 있다.

아. 8차시 : 분수나 소수의 값을 이용하여 넓이 나타내기

8차시에서는 분수나 소수의 값을 본격적으로 사용하여 넓이를 나타낸다. 이는 다음 단원에서 분수의 곱셈 알고리즘을 설명하기 위한 준비 성격을 갖고 있다. 현재의 제 7차 교과서에서는 직사각형에서 가로와 세로가 서로 다른 길이 단위에 의해서 표현된 경우의 넓이를 경우를 다루고 있지 않지만, 본 차시에서는 이러한 경우를 다룸으로써 분수와 소수값이 넓이 과정에서 개입되도록 유도한다. 또한 격자 위에서 2×3 모양의 직사각형을 $1cm^2$ 단위 넓이로 정의한 후, 2×2나 1×3 등과 같은 직사각형의 넓이를 구하도록 함으로써 넓이의 수치로서 분수나 소수를 사용하도록 유도한다.

자. 9차시 : 도형의 넓이와 둘레의 길이 사이의 관계

9차시에서는 도형의 둘레의 길이와 넓이 사이의 관계를 알아본다. 현재의 제 7차 교과서에서는 첫 차시에서 도형의 둘레의 길이를 다루고 있지만, 그 내용은 공식의 제시와 그 공식의 단순한 적용 계산 문제에 그치고 있다. 본 차시에서는 도형의 둘레의 길이와 넓이의 관계를 심화시켜 다루었다. 두 도형이 있을 때, 어느 한 도형이 둘레의 길이가 길다고 해서 반드시 넓이가 더 넓은 것은 아니며, 넓이가 더 넓다고 해서 둘레의 길이가 더 긴 것도 아니다. 둘레가 일정하게 주어졌을 때에 가장 넓거나 좁은 넓이를 가지는 도형은 무엇이며, 넓이가 일정하게 주어졌을 때에 가장 둘레가 가장 길거나 짧은 도형은 무엇인지 탐구하는 활동을 다룬다.

V. 연구의 방법 및 절차

이 장에서는 Freudenthal의 수학화 이론에 기초하여 작성한 실험 지도안을 사용하여 교실 현장에서 수업을 실시한 절차와 결과를 제시한다.

1. 실험설계

본 연구에서의 실험의 일정을 전체적으로 요약하면 <표 2>와 같다.

<표 2> 실험 일정

기 간	과 정	내 용
2008년 4월 4주	사전검사	1학기 중간평가를 사전검사로 대체
2008년 5월 1주	실험반과 비교반 선정	임의의 두 반을 실험반과 비교반으로 선정
2008년 5월 3주~4주	예비수업	재구성한 내용을 예비로 실험반과 비교반을 제외한 다른 반에 적용
2008년 6월 1주	학습지 수정	예비 수업의 결과를 반영하여 학습지 수정
2008년 6월 2주~4주	본 수업	총 9차시의 지도안을 실험반에 수업
2008년 7월 1주	사후검사	실험반과 비교반에 사후검사 실시

실험반과 비교반은 충청남도 서산시에 위치하고 있는 S초등학교 5학년 중 두 학급으로 선정하였다. 서산시의 인구는 15만 명으로서 충남에서 세 번째 규모의 도시이며 S초등학교는 서산 중심부에 위치하고 있다.

사전 검사는 별도로 실시하지 않았으며, 그 대신 실험반이 속한 학교에서 실시한 2008학년도 1학기 중간고사 수학 점수를 사전평가로 대체하였다.

비교반은 사전평가에서 실험반과 유사한 평균점수를 보이는 반 중에서 임의로 선택되었다.

실험 처치 기간 동안 실험집단에는 본 연구자가 구안한 실험 지도안을 적용하여 수업이 실시되었고, 비교집단에는 현재의 제 7차 교과서를 따라서 수업이 실시되었다.

실험 처치 후, 넓이 개념의 이해와 양감을 측정할 수 있는 문제들로 구성된 수행평가와 단순한 계산 문제들로 이루어진 계산 평가를 실험반과 비교반에 공히 실시하고 그 결과를 분석하였다.

<표 3> 교수 실험에서의 사전검사와 사후검사 방법

집단	사전검사	실험처치	사후 검사
실험집단	1학기 중간평가	실험 교과서 적용	연구자가 구안한 수행평가와 계산평가 검사지
비교집단		7차 수학 교과서 적용	

2. 예비수업

실험에 쓰일 실험 지도안이 수준이나 학습량, 표현 방법 등에서 적절한지 알아보기 위하여 예비수업을 실시하였다. 예비수업은 재구성한 9차시 분량의 지도안 모두를 S초등학교 5학년에서 실험반과 비교반과는 다른 제 3의 학급에서 실시하였다.

예비수업의 결과를 반영하여 지도안의 사소하고 기술적인 측면을 다소 수정하였다. 예를 들어, 학생에게 배부되었던 점판과 모눈종이의 간격이 너무 조밀하여 학생들이 과도한 시간을 필요로 하였기에 모눈의 크기를 더 늘렸다. 또한 카발리에리의 원리를 이용하여 넓이 공식을 유도하는 내용에서는 학생들이 예상보다 어려워하고 시간을 많이 사용하였기 때문에, 원래 1개 차시를 할당했던 것에서 2개 차시로 할당하는 것으로 바꾸었다. 그리고 학생들이 변의 길이가 분수나 소수로 제시된 문제를 예상보다는 훨씬 더 쉽게 해결하는 것으로 나타났기 때문에 그것을 더 보강하고 추가하였다.

3. 본 수업

실험은 재구성한 학습지를 사용하여 9개 차시를 실험반에 적용함으로써 실시되었다. 실험 지도안은 제 7차 교과서에서 5-가 단계의 '평면도형의 둘레와 넓이' 단원의 총 12차시 중에서 재미있는 놀이와 문제해결하기 그리고 실생활에 적용하기의 총 3개 차시를 제외한 나머지 9개 차시 부분에 해당되는 것이다. 실험 수업은 연구자가 직접 9개 차시를 모두 담당하였다.

비교반의 경우 5-가 단계의 '평면도형의 둘레와 넓이' 단원의 9개 차시를 제 7차 교과서로 공부하였다. 비교반의 수업을 담당한 교사에게는 연구에 참여하겠다는 동의를 받았으며, 현행 교육과정에 충실하게 수업을 진행하도록 협조를 구하였다.

4. 사후 검사

사후 검사는 계산평가와 수행평가의 두 종류 문항으로 구성하였다. 계산평가는 어떤 기계적인 절차나 공식을 적용하여 수치를 대입하고 해결하는 문항들로 이루어졌다. 예를 들면 넓이 공식을 이용해 넓이의 값이나 도형의 높이, 밑면의 값, 둘레의 길이를 알아내는 문제 등이 그것이다. 수행평가는 기계적인 절차가 아니라 이해를 요구하는 문항들로 이루어졌다. 예를 들면 넓이에 대한 양감과 넓이 개념의 이해, 넓이를 구하는 방법, 둘레와 넓이와의 관계 등을 알아보기 위한 문제들로 서술하거나 설명하는 문제 등이 그것이다.

사후 검사지의 문항은 연구자가 직접 개발하였다. 그러나 이로 인하여 문항이 실험반에 유리하게 만들어질 위험성이 있기 때문에 중립적인 문항이 되도록 특별한 주의를 기울였다. 문제의 형식은 다양하게 취했을지라도 소재만큼은 가능한 기존의 제 7차 교과서와 익힘책에 있는 것 가운데서 선택하였다.

사후 검사지의 구성 체제는 <표 5>에 제시되었으며 상세한 원본은 부록에 첨부하였다.

<표 4> 사후검사지의 구성 체제와 문항별 내용

문항	평가종류	평가 내용	
1	수행	임의 단위를 이용한 측정	
2	수행	비정형 도형	(1) 넓이 비교 (2) 비형식적 측정 방법
3	수행	기준이 되는 크기와의 비율관계	(1) 기준보다 작은 정사각형 (2) 둔각삼각형 (3) 기준보다 큰 직사각형 (4) 직각삼각형 (5) 평행사변형 (6) 평행사변형
4	수행	넓이 측정의 방법	(1) 삼각형의 넓이 (2) 평행사변형의 넓이
5	수행	고정된 밑변에 서로 다른 평행사변형 그리기	(1) 학습자와 수평으로 고정된 밑변 (2) 사선으로 고정된 밑변
6	수행	고정된 밑변에 서로 다른 삼각형 그리기	(1) 학습자와 수평으로 고정된 밑변 (2) 사선으로 고정된 밑변
7	수행	모든 변이 모눈종이와 수직, 평행하지 않는 도형의 넓이 구하기	(1) 삼각형 (2) 평행사변형
8	수행	높이 나타내기	(1) 평행사변형 (2) 삼각형
9	수행	넓이의 비와 비율	
10	수행	비정형 도형의 넓이 측정	
11	수행	분수값을 이용한 넓이 나타내기	(1) 작은 직사각형의 넓이 (2) 방법설명 (3) 전체의 넓이
12	수행	고정된 둘레의 길이에서의 넓이	
13	수행	고정된 넓이에서의 둘레의 길이	
14	계산	도형의 넓이	(1),(2),(3) 삼각형 (4) 직사각형 (5),(6) 평행사변형
15	계산	도형의 높이나 밑변의 값	(1),(2) 삼각형 (3) 직사각형 (4) 평행사변형
16	계산	삼각형의 밑변의 값 구하기	
17	계산	직사각형의 둘레의 길이	(1) 정사각형 (2) 직사각형
18	계산	소수를 이용한 넓이의 표현	
19	수행	도형의 둘레의 길이와 넓이 사이의 관계	(1) 둘레의 길이에 따른 도형의 넓이 (2) 도형의 넓이에 따른 둘레의 길이 (3) 밑변의 길이에 따른 도형의 넓이
20	수행	카발리에리의 원리 이해	(1) 넓이가 같은 도형 (2) 넓이가 다른 도형
21	수행	삼각형의 넓이 공식 설명	

계산평가와 수행평가는 실험반과 비교반 모두에 대하여 공히 실시하였으며 그 결과를 정량적 비교와 동시에 정성적인 분석도 병행하였다.

Ⅵ. 결과 분석

1. 정량적 분석

본 연구에서는 별도의 사전평가는 실시하지 않았으며 그 대신 실험반과 비교반이 속한 학교에서 실시한 2008학년도 1학기 중간고사의 수학 과목 점수를 사전평가로 대체하였다. 실험반과 비교반의 1학기 중간평가의 수학 점수를 통계 프로그램인 SPSS를 써서 독립표본 t-검정을 실시한 결과, 실험반(M=86.38, SD=14.63)이 비교반(M=83.46, SD=20.14)보다 평균이 2.92점 높았으나 이는 통계적으로 유의미하지 않았다 ($t(77)=0.737$, $p>0.05$).

<표 5> 두 집단의 중간평가에 대한 독립표본 검정

	학급	N	평균	표준편차	평균의 표준오차	t	p
중간평가	실험반	40	86.38	14.63	2.31	0.737	0.463
	비교반	39	83.46	20.14	3.22		

교수 실험 후에 실험반과 비교반에 대하여 두 종류의 문항(계산평가와 수행평가)으로 구성된 사후 검사를 실시하였으며, 공분산분석(ANCOVA)을 통하여 실험반과 비교반이 사후평가에서 어떤 차이를 보이는지 알아보았다. 공분산분석은 사후평가 점수 자체를 비교하는 것이 아니라, 대신에 사전평가에서의 점수차를 감안하여 사후평가 점수를 교정하여 비교하는 방식이다.

각 학급별 사전평가와 사후 계산평가의 평균과 표준편차는 다음의 <표 6>과 같으며, 이 자료를 사전평가를 공변수, 학급을 독립변수 그리고 사후 계산평가를 종속변수로 설정하여 공분산분석을 실시한 결과는 <표 7>과 같다.

<표 6> 사후 계산평가 결과

	사전평가		사후 계산평가		표본의 크기
학급	평균	표준편차	평균	표준편차	
실험반	86.38	14.63	7.67	3.68	40
비교반	83.46	20.14	8.23	4.00	39
전체	84.92	17.39	7.95	3.82	79

<표 7> 사후 계산평가 공분산분석 결과

분산원	제곱합(SS)	자유도(df)	평균제곱(MS)	F	p
모형	428.211	2	214.105	22.867	.000
사전평가	422.111	1	422.111	45.083	.000
학급	17.478	1	17.478	1.867	.176
오차	711.587	76	9.363		
전체	1139.797	78			

먼저 공변수인 사전평가의 효과는 유의하였다(F(1,76)=45.083, p=.000). 그리고 사전평가를 통제했을 때 수업방법에 따른 두 학급의 사후 계산평가 점수의 교정 평균에는 유의한 차이가 없었다(F(1,76)=1.867, p=.176).

이어서 각 학급별 사전평가와 사후 수행평가의 평균과 표준편차는 <표 8>과 같으며, 그리고 이들 자료를 사전평가를 공변수, 학급을 독립변수 그리고 사후 수행평가를 종속변수로 공분산분석을 실시한 결과는 <표 9>와 같다.

<표 8> 사후 수행평가 결과

	사전평가		사후 수행평가		표본의 크기
학급	평균	표준편차	평균	표준편차	
실험반	86.38	14.63	21.92	7.89	40
비교반	83.46	20.14	16.00	7.64	39
전체	84.92	17.39	19.00	8.27	79

<표 9> 사후 수행평가 공분산분석 결과

분산원	제곱합(SS)	자유도(df)	평균제곱(MS)	F	p
모형	2313.424	2	1156.712	29.065	.000
사전평가	1620.199	1	1620.199	40.712	.000
학급	522.929	1	522.929	13.140	.001
오차	3024.576	76	39.797		
전체	5338.000	78			

먼저 공변수인 사전평가의 효과는 유의하였다(F(1,76)=40.712, p=.000). 그리고 사전평가를 통제했을 때 수업방법에 따른 두 학급의 사후 수행평가 점수의 교정 평균에는 유의한 차이가 있었다(F(1,76)=13.040, p=.001).

요컨대, 수행평가에서는 실험반이 비교반보다 우수하였으나 계산평가에서는 두 집단 사이에 차이가 없다고 말할 수 있다.

2. 정성적 분석

가. 넓이 개념의 이해

2번 문항과 10번 문항의 내용은 동일하다. 그것은 주어진 두 도형에서 한 도형이 다른 도형보다 둘레의 길이는 더 길지만 넓이는 더 작은 경우, 두 도형의 넓이를 비교하는 것이다. 단 2번 문항은 직관적으로 비교할 것을 요구한 반면 10번 문항에서는 모눈종이를 사용하여 단위 정사각형의 개수를 세어서 정확히 비교하는 것이었다.

정답률은 <표 10>에 계산되어 있다. 분석 결과 넓이 직관에 대해서는 비교반과 실험반 모두 좋은 것으로 나타났고 실험반의 넓이 직관이 조금 더 우수한 것으로 나타났다.

<표 10> 넓이 직관에 대한 문제의 정답률

	실험반	비교반
2번 문항 정답률	72%	58%
10번 문항 정답률	49%	25%
2번 틀린 학생 중 10번 맞은 학생	2/11명(19%)	3/19(19%)

2번에서 틀린 학생이 10번에서 맞을 확률은 19%였다. 즉 2번에서 맞으면 10번에서도 거의 맞은 것이다. 이 결과는 넓이를 직관적으로 비교할 수 있는 능력이 넓이를 계산하는 활동에서도 중요한 역할을 하고 있음을 의미하는 것으로 해석할 수 있다.

비정형의 두 영역의 넓이를 비교하는 방법을 묻는 질문에 대하여 학생들이 제시한 답은 크게 네 가지의 유형으로 분류되었다.[4] 일정한 간격으로 점을 찍어 그 점의 수를 비교하는 방법(22명), 모눈종이를 대고 그 안에 들어가는 정사각형의 수를 세는 방법(20명), 투명종이에 옮겨 그려서 겹쳐보는 방법이 있다(19명), 기준 도형이 들어간 수를 센다는 방법(9명)이 그것이다.

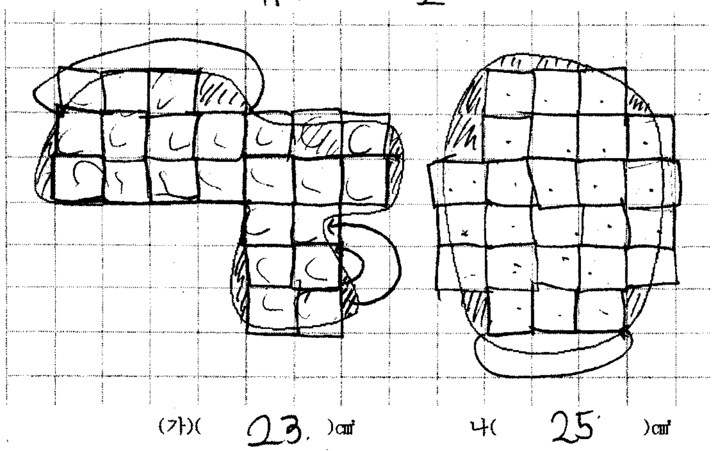
<표 11>에 나타나 있듯이 정형화된 도형의 넓이를 비교하는 1번 문항의 정답률이 비정형화된 도형의 넓이를 비교하는 10번 문항의 정답률보다 크게 높다. 특히 실험반에서 더 높게 나타났는데, 그 이유는 주로 삼각형이나 사각형등과 같은 정형화된 도형을 주로 다루고 비정형 도형은 자주 다루지 않기 때문인 것으로 추측된다.

<표 11> 정형화된 도형과 비정형화된 도형의 넓이 문제의 정답률

	실험반	비교반
1번 문항 정답률	77%	45%
10번 문항 정답률	49%	25%

4) 여러 개의 답을 쓰도록 하였다.

10. 아래 두 도형 중 어느 도형이 더 넓은지 정확하게 알아보세요. (정사각형 하나보다 작은 조각이 있을 때에는 여러 개를 합쳐 하나의 정사각형으로 만드세요. 분수의 값을 사용해도 좋습니다.) -> (나)가 (가)보다 (2 ㎠) 더 넓다.



[그림 3] 비정형 도형에서의 넓이 비교 우수 사례

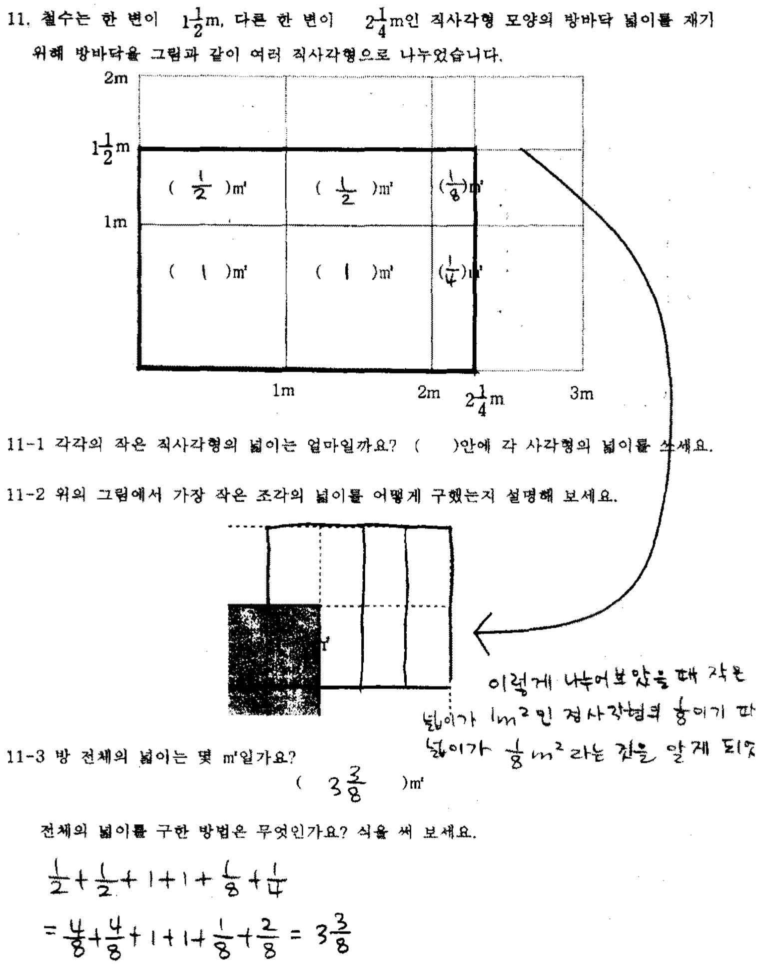
나. 변의 길이가 분수나 소수로 주어졌을 때의 넓이 구하기와 넓이의 값이 분수와 소수로 주어졌을 때의 넓이 구하기

모눈종이 위에 도형이 주어지되 변의 길이가 분수나 소수인 형태로 주어진 경우, 학생들은 직관적인 방법 혹은 자르고 붙이기 방법을 사용하여 넓이의 값을 구하였고 그 값을 분수나 소수로 나타내었다. 넓이의 값이 분수로 표시되어야 하는 문제에서 그렇게 한 학생은 실험반에서 3명, 비교반에서 0명이었다. 소수로 표현한 학생은 실험반에서 24명, 비교반에서 17명이었다. 실험반의 결과가 우수한 이유는 실험지도안을 통해서 실험반은 이미 분수와 소수의 사용을 다루는 경험을 이미 가졌기 때문이라고 생각된다. 넓이의 값이 분수로도 나타내어지고 소수로도 나타내어질 수 있는 상황에서는 특이하게도 대부분의 학생들이 분수가 아닌 소수를 선호하였다.

<표 12> 넓이의 값이 분수나 소수가 되는 문항의 정답률

		실험반	비교반
4번 문항 정답률	(1)	67%	43%
	(2)	51%	60%
11번 문항 정답률	(1)	21%	8%
	(2)	21%	8%
	(3)	18%	5%

평가 결과를 보면 실험반뿐만 아니라 비교반(넓이를 분수나 소수로 나타내는 활동을 다루지 않았음에도 불구하고) 학생들도 분수나 소수의 값을 자연스럽게 사용하여 넓이를 나타내었다. 이는 분수나 소수의 넓이값이 교육과정에 무난히 도입될 수 있음을 의미한다.


11. 철수는 한 변이 $1\frac{1}{2}$m, 다른 한 변이 $2\frac{1}{4}$m인 직사각형 모양의 방바닥 넓이를 재기 위해 방바닥을 그림과 같이 여러 직사각형으로 나누었습니다.

11-1 각각의 작은 직사각형의 넓이는 얼마일까요? ( )안에 각 사각형의 넓이를 쓰세요.

11-2 위의 그림에서 가장 작은 조각의 넓이를 어떻게 구했는지 설명해 보세요.

11-3 방 전체의 넓이는 몇 m²일가요?

($3\frac{3}{8}$)m²

전체의 넓이를 구한 방법은 무엇인가요? 식을 써 보세요.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1+1+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}$$

$$=\frac{4}{8}+\frac{4}{8}+1+1+\frac{1}{8}+\frac{2}{8}=3\frac{3}{8}$$

[그림 4] 변의 길이가 분수로 주어진 도형의 넓이를 계산 사례

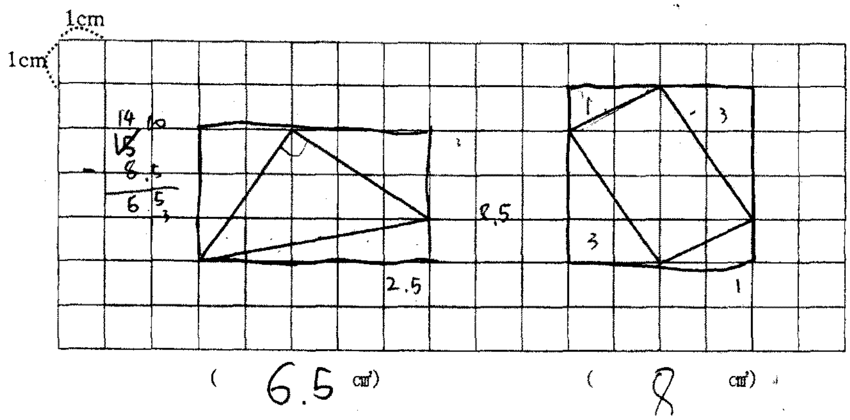
다. 모눈종이 위에 그려진 도형의 넓이를 계산하는 다양한 전략

모눈종이 위에 그려진 도형의 넓이를 계산할 때에 학생들은 사용하는 전략은 세 가지 유형을 보였다. 넓이를 구하기 쉬운 조각으로 분할해서 각각을 구한 후 더하는 방법, 외부를 둘러싼 직사각형의 넓이를 구한 후 빈 곳을 빼는 방법, 자르고 붙이기 조작을 통해서 넓이 계산이 용이한 도형으로 바꾸는 방법이 그것이다. 현재의 제 7차 교과서에서는 자르고 붙이는 방법 한 가지만을 다루고 있지만, 그 밖에 다른 방법도 포함할 필요가 있음을 보여준다.

<표 13> 도형의 넓이를 계산하는 전략의 선호도

	실험반	비교반
여러 조각으로 나누기	2명	4명
전체에서 빼기	6명	3명
자르고 옮겨 붙이기	22명	1명

7.다음 도형의 넓이를 구하시오. 자기가 사용한 방법을 그림에 표시해 보세요.



[그림 5] 둘러싸는 직사각형에서 나머지를 빼서 구한 사례

라. 넓이에서의 비율관계 이해

<표 14>에 나타나 있듯이 넓이에서의 비율관계에 관한 문항에서 실험반이 비교반보다 월등하게 높은 성취를 보였다. 이는 실험반에서는 실험 지도안을 통해서 유사한 활동을 많이 했기 때문으로 보인다.

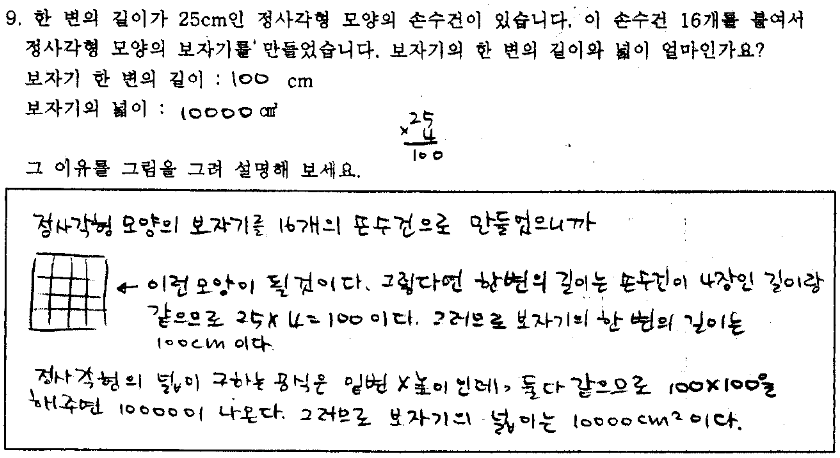
<표 14> 넓이에서의 비율관계 이해 문항에 대한 정답률

		실험반	비교반
3번 문항 정답률	(1)	90%	58%
	(2)	41%	25%
	(3)	90%	58%
	(4)	41%	15%
	(5)	31%	13%
	(6)	59%	38%

넓이의 표준 단위는 길이 두 개가 결합돼서 생성되는 것으로서 변의 길이와 넓이 사이에는 제곱의 함수 관계가 있다. 즉 직사각형에서 두 변 모두 2배가 되면 넓이는 4배가 된다. 이에 관한 9번 문항의 정답률을 보면 실험반과 비교반 공히 낮은 성취를 보인다. 즉 이 문항의 성공률에는 실험지도안과 현재의 교과서 사이의 차이는 영향을 미치지 못했음을 뜻한다. 변의 길이와 넓이 사이의 제곱의 함수 관계는 지도 방식의 변화에 거의 영향을 받지 않는 수학적인 직관력에 해당하는 것으로 추정된다.

<표 15> 넓이에서의 비율관계 이해 문항에 대한 정답률

	실험반	비교반
9번 문항 정답률	28%	23%


9. 한 변의 길이가 25cm인 정사각형 모양의 손수건이 있습니다. 이 손수건 16개를 붙여서 정사각형 모양의 보자기를 만들었습니다. 보자기의 한 변의 길이와 넓이 얼마인가요?

보자기 한 변의 길이 : 100 cm

보자기의 넓이 : 10000 ㎠

$25 \times 4 = 100$

그 이유를 그림을 그려 설명해 보세요.

정사각형 모양의 보자기를 16개의 손수건으로 만들었으니까

← 이런 모양이 될 것이다. 그렇다면 한변의 길이는 손수건이 4장인 길이랑 같으므로 25×4=100 이다. 그러므로 보자기의 한 변의 길이는 100cm 이다.

정사각형의 넓이 구하는 공식은 밑변×높이 인데, 둘다 같으므로 100×100을 해주면 100000이 나온다. 그러므로 보자기의 넓이는 10000cm² 이다.

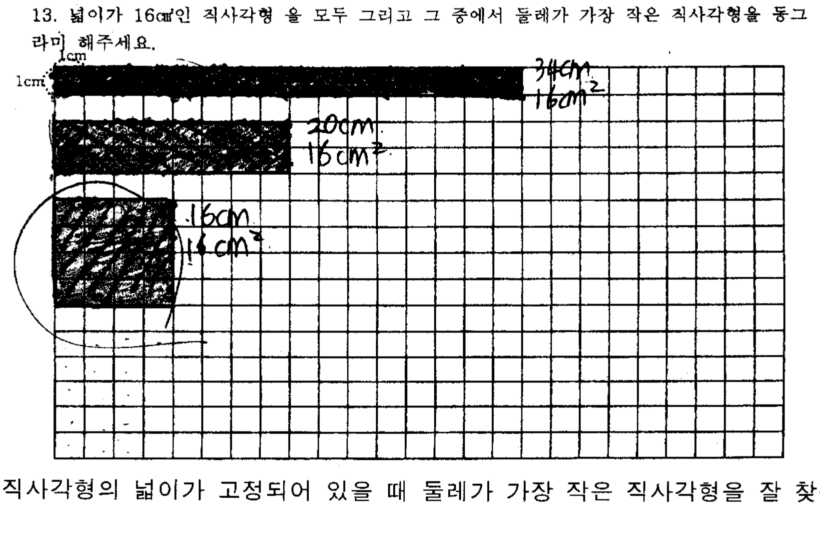
[그림 6] 변의 길이와 넓이 사이의 함수 관계 해결 사례

마. 도형의 넓이와 둘레의 길이 사이의 상관관계 이해

넓이와 둘레의 길이 사이의 관계에 대해서는 학생들이 오개념을 가지기 쉽다. <표 16>에 나타나 있듯이 넓이와 둘레 사이의 상관관계에 관한 문항에서 비교반 학생들이 더 많은 오류를 나타내었다.

<표 16> 넓이와 둘레 사이의 상관관계 이해에 대한 문항의 정답률

		실험반	비교반
19번 문항 정답률	(1)	72%	50%
	(2)	72%	43%
	(3)	69%	58%
12번 문항 정답률		49%	33%
13번 문항 정답률		54%	38%



[그림 7] 직사각형의 넓이가 고정되어 있을 때 둘레가 가장 작은 직사각형을 잘 찾은 사례

바. 평행사변형과 삼각형에서의 밑변과 높이 상관관계 이해

평행사변형과 삼각형에서 밑면과 높이의 개념 이해는 중요하다. 주의할 점은 삼각형이나 평행사변형 모두에서 밑변은 '밑에 있는 변' 이 아니라는 점이다. 삼각형에서든 평행사변형에서든 어떤 변이든 밑변이 될 수 있으며, 삼각형에서는 한 개이고 평행사변형에서는 두 개다. 사실상 밑변이라는 용어보다 '기준변' 이라는 용어가 더 적합하다(교사용지도서 수학 5-가, 2005).

높이라는 개념은 밑변이 정해짐에 따라 밑변에 종속돼서 정해지는 개념이다. 따라서 비스듬한 빗변이 밑변으로 정해졌다면 높이는 그에 따라서 역시 비스듬히 정해진다.

<표 17>에 나타나 있듯이 이에 관한 문항에서는 실험반과 비교반 모두 우수한 이해를 보였다.

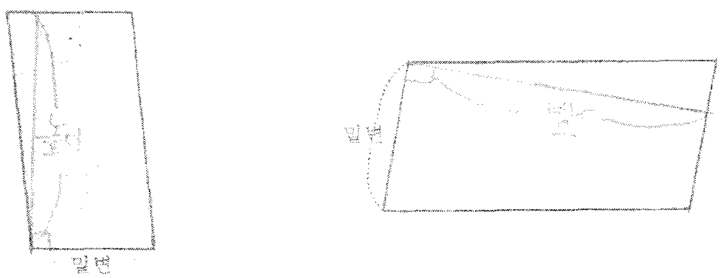
< 표 17 > 밑면이 정해져 있을 때 사각형과 삼각형을 그리는 문항의 정답률

	실험반	비교반
5-(3) 문항 정답률	95%	80%
6-(3) 문항 정답률	75%	68%

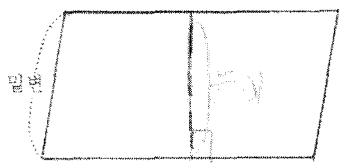
<표 18>을 보면 8-(2) 문항의 경우 다른 문항에 비해 비교반이 낮은 정답률을 보였다. 이는 밑변이 평행사변형의 세로로 주어졌기 때문이다. 학생들은 밑변이 도형의 아래에 있지 않을 경우에 높이를 찾는데 오류를 보이는 경우가 많다.

< 표 18 > 평행사변형의 높이를 표시하는 문항의 정답률

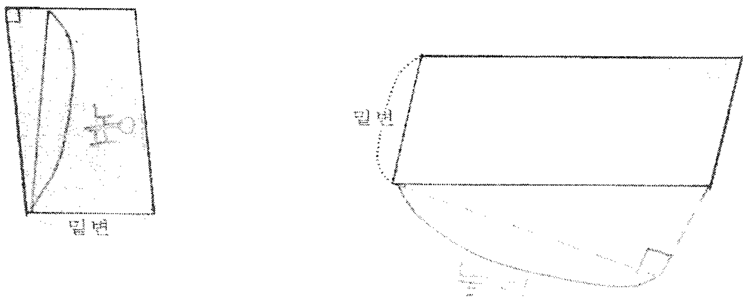
		실험반	비교반
8번 문항 정답률	(1)	85%	78%
	(2)	62%	40%



[그림 8] 평행사변현형에서 높이를 정확하게 표시한 사례



[그림 9] 평행사변형에서 높이 오류를 보인 사례(1)



[그림 10] 평행사변형에서 높이 오류를 보인 사례(2)

Ⅶ. 요약 및 결론

일견하기에 초등수학에서의 넓이 개념은 지극히 단순한 것으로 생각되지만, 교수학적으로 진지하게 고찰한다면 그 양상이 단순치 않음이 드러난다. Freudenthal(1973)은 말하기를 자신의 초등학교 시절에서 겪은 최초의 수학적 경험은 어떤 직사각형을 수평과 수직으로 분할함으로써 그 직사각형의 넓이를 계산할 수 있다는 것을 이해했을 때라고 하였다.

넓이 개념은 일반적으로 알려진 단위 정사각형의 개수 이외에, 직관적인 양감, 등적변형(자르고 붙이기) 하에서의 불변인 속성, 카발리에리의 원리에서의 불변인 속성 등 다양한 측면을 가지고 있다.

제 7차 초등학교 수학 교과서의 넓이 단원을 분석한 결과, 그것은 Freudenthal의 수학화 이론과는 여러 면에서 부합되지 않는 것으로 나타났다. 제 7차 교과서는 충분한 현실맥락을 제공하지 않은 채 성급하게 넓이 공식을 제시하고 있으며, 넓이 개념에 대한 관계적 이해보다는 넓이공식의 훈련과 연습에 치중하고 있었다.

이 논문에서는 Freudenthal의 수학화 이론을 바탕으로 제 7차 초등 수학 교과서의 넓이 단원을 재구성하여 실험적인 지도안을 작성하였고 이렇게 만든 지도안으로 교수 실험을 실시한 후, 이를 통하여 실험적 지도안의 효과와 더불어 학생들의 넓이 개념과 넓이 공식에 대한 이해 실태를 분석하였다. 이러한 과정을 거쳐 얻은 결과 및 시사점은 다음과 같다.

첫째, 본 논문에서 재구성한 지도안을 가지고 학습한 학생들이 넓이 이해에서 더 나은 성취를 보였다. 넓이는 단위넓이 조각의 개수를 세는 것으로 알 수 있다. 이러한 넓이 개념을 연역적으로 도입하지 않고 현실맥락을 이용해 경험적, 귀납적으로 도입하고 구성한 지도안으로 학습한 실험반 학생들이 넓이 개념에 대한 이해가 더 높았다.

둘째, 실험반과 비교반을 막론하고 넓이 직관력이 좋은 학생들이 단위 정사각형의 개수라는 형식적인 넓이 개념을 다루는 수행평가에서 더 나은 성취를 보였다. 이것은 수학에서 직관의 중요성을 보여주는 결과이다. 현재 교과서에서는 넓이 직관을 기르기 위한 활동을 더욱 보강할 필요가 있다.

셋째, 비형식적 전략을 구사하는데 있어서 실험반과 비교반이 차이를 보였다. 실험반은 비교반에 비해서 도형의 넓이를 구할 때 비형식적 전략을 더 많이 사용하였고 그 종류도 다양했다. 이런 비형식적 전략은 특히 비정형 도형의 넓이를 구하는 문제에서 효과적이다.

하지만 이 결과가 제 7차 교과서에 대한 실험 지도안의 우수성을 증명하는 것이라고 보기는 어렵다. 왜냐하면 제 7차 교과서와는 다르게 실험 지도안 자체가 비형식적인 전략을 활용하는 내용을 많이 포함하고 있기 때문이다.

넷째, 카발리에리의 원리는 학생들이 이해하는데 어려움이 있었다. 연구자는 다양한 시범과 GSP와 같은 교구를 활용하여 이해를 돕고 공식을 유도하고자 하였으나, 카발리에리 원리를 활용하는 평가 문항에서 실험반과 비교반 모두 그 성취도가 낮았다. 카발리에리의 원리는 초등학생이 이해하기에는 다소 어려운 측면이 있다고 생각한다. 제 2차 교육과정에서 카발리에리의 원리가 채용된 적이 있었으나, 그 이후 교육과정에서 사라진 이유가 아마도 이러한 실제적인 이유 때문이라고 추측된다(김신영, 2005).

다섯째, 넓이가 분수나 소수의 값으로 나오는 문제의 경우 실범반과 비교반 공히 자연스럽게 해결하였다. 이는 학생들이 이런 상황을 다룰 준비가 충분히 되어 있음을 증명하는 것으로서 차후에 제작되는 교과서에서 이것을 적극 고려해야만 한다. 특히 다음 단원에서 이른바 넓이 모델을 통하여 분수의 곱셈 알고리즘을 설명할 때 변의 길이와 넓이의 값이 분수인 경우가 필요하므로 이를 준비해야 한다.

여섯째, 실험반에서 평면도형의 넓이와 둘레의 길이 사이와의 관계에 대한 지도는 성공적으로 이루어졌다. 평면도형의 넓이와 둘레의 길이 사이의 관계 이해가 어렵다고 생각되었지만 실험반의 많은 학생이 관계를 탐구하며 이해하는 모습을 보였다. 이는 평면도형의 넓이와 둘레 사이의 길이가 서로 유기적이며 통합적으로 지도되어야 함을 보여준다.

참 고 문 헌

강홍규 (2003). **Dewey의 경험주의 수학 교육론 연구**. 서울대학교 박사학위논문.

교육인적자원부 (1998). **초등학교 교육과정 해설(Ⅳ)**. 서울: 대한교과서 주식회사.

교육인적자원부 (2002a). **수학 5-가**. 서울: 대한교과서주식회사.

교육인적자원부 (2002b). **수학 익힘책 5-가**. 서울: 대한교과서주식회사.

교육인적자원부 (2002c). **수학 3-가**. 서울: 대한교과서주식회사.

교육인적자원부 (2005). **수학 5-가 초등학교 교사용 지도서**. 서울: (주)천재교육.

교육과학기술부 (2007). **교육인적자원부 고시 제 2006-75호 및 제2007-76호에 따른 초등학교 교육과정 해설(Ⅳ)**.

김신영 (2005). 초등학교 수학 교과서에 나타난 삼각형과 사각형의 넓이 지도 방법에 대한 분석. **한국초등수학교육학회지**. 9(2). 161-180.

김유진 (2007). 현실적 맥락을 활용한 수학화 학습이 아동의 수학적 사고에 미치는 효과 -초등학교 5학년 도형 영역을 중심으로-. **한국초등수학교육학회지**. 11(2). 99-115.

박진희 (2004). **측정영역의 활동중심 교수·학습 방법에 관한 연구**. 부산교육대학교 교육대학원 석사학위논문.

이선경 (2005). **현실주의 수학교육론에 근거한 교재 구성 원리와 초등학교 수학과 측정 영역 교재 개발 연구**. 서울교육대학교 교육대학원 석사학위논문.

이선영 (2006). **초등학생의 평면 도형 넓이 공식 구성 활동 분석**. 경인교육대학교 교육대학원 석사학위논문.

장영은 (2003). **도형과 관련된 문제해결과정에서 초등학생의 오류 유형과 원인 분석 연구**. 전주교육대학교 교육대학원 석사학위논문.

정영옥 (1997). **Freudenthal의 수학화 학습-지도론 연구**. 서울대학교 대학원 박사학위논문.

허학도 (2006). **직사각형의 넓이 공식의 이해와 인식론적 장애**. 서울대학교 대학원 석사학위논문.

Freudenthal. H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Gravemeijer, K., Clarke, B., & Pligge, M. A. (1997). Reallotment. In National center for research in mathematics education & Freudenthal Institute(Eds.), *Mathematics in context: A connected curriculum for grades 5-8*(pp.4-109). Chicago: Encyclopædia Brittanica Educational Corporation.

<Abstract>

A Reconstruction of Area Unit of Elementary Mathematics Textbook Based on Freudenthal's Mathematisation Theory

You, Mi Hyun[5]; & Kang, Heung Kyu[6]

Freudenthal has advocated the mathematisation theory. Mathematisation is an activity which endow the reality with order, through organizing phenomena. According to mathematisation theory, the departure of children's learning of mathematics is not ready-made formal mathematics, but reality which contains mathematical germination. In the first place, children mathematise reality through informal method, secondly this resulting reality is mathematised by new tool.

Through survey, it turns out that area unit of Korea's seventh elementary mathematics textbook is not correspond to mathematisation theory. In that textbook, the area formular is hastily presented without sufficient real context, and the relational understanding of area concept is overwhelmed by the practice of the area formular. In this thesis, first of all, I will reconstruct area unit of seventh elementary textbook according to Freudenthal's mathematisation theory. Next, I will perform teaching experiment which is ruled by new lesson design. Lastly, I analysed the effects of teaching experiment.

Through this study, I obtained the following results and suggestions.

First, the mathematisation was effective on the understanding of area concept.

Secondly, in both experimental and comparative class, rich-insight children more successfully achieved than poor-insight ones in the task which asked testee comparison of area from a view of number of unit square. This result show the importance of insight in mathematics education.

Thirdly, in the task which asked testee computing area of figures given on lattice, experimental class handled more diverse informal strategy than comparative class.

Fourthly, both experimental and comparative class showed low achievement in the task which asked testee computing area of figures by the use of Cavalieri's principle.

Fifthly, Experiment class successfully achieved in the area computing task which resulting value was fraction or decimal fraction. Presently, Korea's seventh elementary mathematics textbook is excluding the area computing task which resulting value is fraction or decimal fraction. By the aid of this research, I suggest that we might progressively consider the introduction that case.

5) mat311@naver.com
6) natin@gjue.ac.kr

Sixthly, both experimental and comparative class easily understood the relation between area and perimeter of plane figures. This result show that area and perimeter concept are integratively lessoned.

Keywords : mathematisation, context, area, unit of area, formula of area, Cavalieri's principle

논문접수: 2009. 5. 2
논문심사: 2009. 5. 23
게재확정: 2009. 6. 5