

# 각도 제한 단층영상재구성을 위한 여현 역투사 기반 반복적 데이터 완결 기법

이 남 용<sup>†</sup>

## 요 약

단층영상재구성에 있어서, 프로젝션 데이터를 제한된 각도에서만 관측할 수 있는 경우에는 불충분한 데이터에 의한 왜곡현상이 발생한다. 이러한 왜곡에 대한 해결책으로 선형적 정보 또는 수학적 외삽법 등을 이용하여 관측하지 않은 각도에서의 프로젝션 데이터를 완결하는 기법이 있으나, 부정확한 추정에 의한 새로운 왜곡이 데이터 완결에 의한 효과를 종종 상쇄한다. 본 논문에서는 각도 제한 단층영상재구성 방법으로 여현 역투사 기반 반복적 데이터 완결방법을 제안한다. 제안된 방법은 반복법으로, 현재의 영상으로부터 관측하지 않은 각도에서의 프로젝션 데이터를 계산하고 이를 관측한 각도에서의 프로젝션 데이터와 Radon 변환의 일관성 조건을 이용하여 결합한 후에, 여현 역투사에 적용하여 다음 단계 영상을 재구성한다. 제안된 방법은 선형적 정보를 필요로 하지 않는다는 것과 함께 기대치 최대화에 비해 그 수렴속도가 현저히 빠르다는 장점이 있다. 제안된 방법의 성능은 모의실험을 통해 확인하였다.

## Iterative Data Completion for Limited Angle Tomography using Filtered Backprojection

Nam-Yong Lee<sup>†</sup>

## ABSTRACT

When the range of projection angles is limited, tomographic reconstruction suffers from artifacts caused by incomplete data. One can consider a data completion technique, which estimates projection data at unobserved angles using a prior knowledge or mathematical exploration, but the result is often not improved; the improvement by the data completion often undermined by the artifacts by inaccurate estimation. In this paper, we propose an iterative method, which computes projection data at unobserved angles by using the current estimate on the image, links the computed projection data to the observed ones by using the consistence condition of Radon transform, and reconstruct the next estimate on the image by filtered backprojection. The proposed method does not require a prior knowledge on the image, and has much faster approximation rate than the expectation maximization method. The performance of the proposed method was tested through several simulation studies.

**Key words:** Limited Angle Tomography(각도 제한 단층영상재구성), Radon transform(라돈 변환), Data Completion(데이터 완결), Consistence Condition(일관성 조건)

## 1. 서 론

단층영상재구성은 주어진 대상에 대한 간접적인

정보를 이용하여 원래 대상에 대한 단층을 영상의 형태로 재구성하는 기술을 통칭한다. 이 때 간접 정보는 보통 주어진 대상에 대한 선적분(이를 주어진

※ 교신저자(Corresponding Author) : 이남용, 주소 : 경상남도 김해시 어방동 607(621-749), 전화 : 055)320-3860, FAX : 055)320-3254, E-mail : nylee@inje.ac.kr  
접수일 : 2008년 10월 13일, 완료일 : 2009년 1월 8일

<sup>†</sup> 정회원, 인제대학교 컴퓨터응용과학부 조교수  
※ 본 연구는 2006년도 인제대학교 학술연구조성비의 보조에 의해 수행되었음

영상의 프로젝션이라 한다)의 형태로 주어진다. 단층 영상재구성은 의료영상, 비파괴관측, 지질탐사 등 많은 응용분야에서 활발히 응용되고 있다[1].

영상재구성은 프로젝션을 어떻게 이용하느냐에 따라 직접법(Direct Method)과 반복법(Iterative Method)으로 나눌 수 있다. 직접법은 프로젝션과 원래의 대상간의 해석적 관계를 이용하여 프로젝션으로부터 직접 영상을 재구성한다. 가장 대표적인 직접법은 여현 역투사(FBP: Filtered Backprojection)이다[2]. 한편, 반복법은 프로젝션과 원 대상간의 관계를 선형시스템에 의한 출력과 입력의 관계로 이해하고, 영상재구성과정을 선형연립방정식에 대한 반복적 해법으로 처리한다. 대표적인 반복법으로 기대치 최대화(EM: Expectation Maximization)를 들 수 있다[3].

본 논문에서 다루고자 하는 문제는 각도 제한 단층영상재구성으로, 제한된 각도에서만 프로젝션 데이터가 주어진 경우, 관측되지 않은 각도에서의 프로젝션 데이터에 의한 영향을 최소화시키면서 영상을 재구성하는 방법에 대한 것이다. 프로젝션 데이터가 충분히 적은 샘플링 간격을 가지고 0°에서 180°까지의 각도에서 고르게 관측되었다면 기존의 여현 역투사 또는 기대치-최대화 방법에 의해 원래의 영상을 복원할 수 있다. 그러나 프로젝션 데이터를 제한된 각도에서만 관측할 수 있는 경우에는, 불충분한 프로젝션에 의한 왜곡현상이 발생하게 된다. 이러한 왜곡에 대한 해결책으로 가장 일반적인 방법은 관측하지 못한 각도에서의 프로젝션 데이터를 완결하는 기법으로, 재구성하려는 영상에 대한 선형적 정보 등을 이용하거나 또는 수학적 외삽법(Extrapolation)을 이용하여 관측하지 못한 각도에서의 프로젝션을 추정한다[4,5]. 그러나 이 방법들은 재구성하려는 영상에 대한 선형적 정보를 필요로 하는 경우가 많고, 또한, 부정확한 추정에 의한 왜곡이 새롭게 등장하여 데이터 완결에 의한 효과를 종종 상쇄시킨다[6].

한편, 기대치 최대화 방법은 별도의 데이터 완결을 쓰지 않고도 각도 제한 단층영상재구성에 적용할 수 있다는 장점이 있다. 그러나 그 수렴정도가 관측되지 않은 각도 영역이 큰 경우에 현저히 느려지는 현상이 발생한다. 물론, 반복법 중간에 데이터 완결을 이용하여 수렴속도를 증가시키는 방법을 고려할 수 있으나, 직접법의 경우와 유사하게 관측하지 않은

각도에서의 프로젝션 데이터에 대한 부정확한 추정이 도리어 수렴속도를 감소시키기도 한다. 본 논문의 4장에서는 부정확한 추정에 의해 수렴속도가 감소하는 경우를 시뮬레이션을 통해 확인하였다.

본 논문에서는 각도 제한 단층영상재구성 방법으로 여현 역투사 기반 반복적 데이터 완결방법을 제안한다. 제안된 방법은, 현재의 영상으로부터 관측하지 않은 각도에서의 프로젝션 데이터를 계산하고 이를 관측한 각도에서의 프로젝션 데이터와 조화롭게 결합하여 결합된 프로젝션 데이터가 실제 하나의 영상으로부터 유도되었을 가능성을 높인 후, 그것을 여현 역투사에 적용하여 다음 단계 영상을 재구성하는 반복법이다. 이 때, 관측된 프로젝션 데이터와 현재 영상으로부터 계산된 프로젝션 데이터간의 조화로운 결합을 위해 Radon 변환의 '일관성 조건'(Consistence Condition)을 사용하였다[7-9].

제안된 방법은 선형적 정보를 필요로 하지 않는다는 것과 함께 기대치 최대화에 비해 그 수렴속도가 현저히 빠르다는 장점이 있다. 또한, 제안된 방법은 반복의 중단조건이 명확하다는 부가적인 장점도 가지고 있다. 제안된 방법의 우수성은 모의실험을 통해 확인 할 수 있었다.

본 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 2장에서는 단층영상재구성에 관한 내용을 다루었다. 3장에서는 제안된 방법에 대한 설명을 다루고, 4장에서는 제안된 방법의 모의실험 결과와 그에 대한 고찰을 다루었다. 5장에서는 결론과 함께 추후 진행하고자 하는 연구방향에 대해 설명하였다.

## 2. 단층영상재구성

본 장에서는 단층영상재구성에 가장 널리 쓰이고 있는 여현 역투사와 함께 비교 시뮬레이션에 사용할 기대치 최대화에 대한 설명을 다룰 것이다.

단층영상재구성은 관측하고자 하는 대상을 단층영상의 형태로 재구성하는 기법을 통칭한다. 단층영상재구성에 대한 수학적 고찰은 1917년 Radon에 의해 처음으로 다루어졌다. Radon이 증명한 사실은 2계 변수 함수  $f(x_1, x_2)$ 가 특정한 조건을 만족한다면, 그 함수의 선적분(이를 Radon 변환이라 칭한다)

$$Rf(\theta, u) = \int f(x_1, x_2)\delta(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta - u) dx_1 dx_2$$

에 의해 재구성 할 수 있음을 증명하였다. 여기서,  $u$ 는 선적분이 이루어지는 직선과 원점과의 거리를,  $\theta$ 는 직선과  $x_2$ 축과 이루는 각도를 의미하고,  $\delta$ 는 Dirac 델타함수이다. 본 논문에서는 재구성하고자 하는 영상을 표현하는 함수  $f(x_1, x_2)$ 에 대해  $x_1^2 + x_2^2 \geq 1$ 인 경우에  $f(x_1, x_2) = 0$ 을 가정하였다(이는  $|u| \geq 1$ 에 대해  $Rf(\theta, u) = 0$ 임을 의미한다). 또한 본 논문에서 사용한 적분기호는 모두 정적분을 의미하며, 적분영역이 문맥에서 그 의미가 분명한 경우 생략하였다.

본 논문에서는 Radon의 원래의 증명은 상당히 복잡하기 때문에 본 논문에서는 푸리에 변환을 이용한 간단한 증명으로 대신하고자 한다[1]. 함수  $f(x)$ ,  $x = (x_1, x_2)$ 에 대한 2차원 푸리에 변환  $\hat{f}(\xi)$ ,  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ 은

$$\hat{f}(\xi) = \int f(x) e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx, \quad \xi \cdot x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2$$

와 같이 정의되고, 이에 대한 역변환은 다음의 정리에 의해 얻어진다.

$$f(x) = \int \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi \tag{1}$$

이제, 푸리에 변환과 Dirac 델타함수의 정의를 이용하여 Radon 변환  $Rf(\theta, u)$ 의 변수  $u$ 에 대한 1차원 푸리에 변환  $Rf(\theta, \cdot)^{\wedge}(w)$ 을 계산하면,

$$\begin{aligned} &Rf(\theta, \cdot)^{\wedge}(w) \\ &= \int Rf(\theta, u) e^{-2\pi i w u} du \\ &= \int_u^x \int_x f(x_1, x_2) \delta(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta - u) dx e^{-2\pi i w u} du \\ &= \int_x f(x_1, x_2) \int_u e^{-2\pi i w u} \delta(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta - u) du dx \\ &= \int_x f(x_1, x_2) e^{-2\pi i w (x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta)} dx \end{aligned}$$

이므로,

$$Rf(\theta, \cdot)^{\wedge}(w) = \hat{f}(w \cos \theta, w \sin \theta)$$

를 얻을 수 있다. 이 결과를 푸리에 역변환 정리 (1)에 적용하면,

$$\begin{aligned} &f(x_1, x_2) \\ &= \int_{\xi} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi \\ &= \int_0^{\pi} \int_w \hat{f}(w \cos \theta, w \sin \theta) e^{2\pi i (x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta) w} |w| dw d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \int_w Rf(\theta, \cdot)^{\wedge}(w) e^{2\pi i (x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta) w} |w| dw d\theta \end{aligned}$$

이 되어,

$$F(\theta, \cdot)^{\wedge}(w) = Rf(\theta, \cdot)^{\wedge}(w) |w| \tag{2}$$

으로 정의된  $F$ 를 이용하여

$$f(x_1, x_2) = \int_0^{\pi} F(\theta, x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta) d\theta \tag{3}$$

와 같이 원영상  $f$ 를 재구성할 수 있다. 식 (3)의 오른쪽 과정을  $F(\theta, u)$ 에 대한 역투사라 한다.

영상재구성의 실제 응용에서는 영상  $f(x_1, x_2)$ 에 대한 관측된 프로젝션 데이터  $Y(\theta, u)$ 을 식 (2)에서 Radon 변환의 결과  $Rf(\theta, u)$  대신 사용해야 한다. 그런데,  $Y(\theta, u)$ 는 관측오차 등에 의해  $Rf(\theta, u)$ 와는 다를 것이고, 또한, 모든 주파수 영역에 대해  $|w|$ 를 곱하여  $F(\theta, \cdot)^{\wedge}(w)$ 를 계산할 수는 없기 때문에, 고주파 정보를 줄이는 가중치  $H(w)$ 를

$$F(\theta, \cdot)^{\wedge}(w) = Y(\theta, \cdot)^{\wedge}(w) |w| H(w)$$

와 같이 곱하거나, 또는, 공간영역에서 그것을 고려한 합성(Convolution)하는 절차를 거쳐야 한다. 이러한 점을 고려하여 식 (2)와 식 (3)에 의한 영상재구성 절차를 여현 역투사방법이라 한다.

프로젝션 데이터  $Y(\theta, u)$ 를  $0 \leq \theta \leq \pi$ 에서 충분히 작은 각도증분을 이용하여 관측할 수 있다면 식 (2)와 식 (3)를 이용하여 원래의 영상  $f$ 를 복원할 수 있다. 그러나 프로젝션 데이터를 제한된 각도( $0 \leq \theta \leq \alpha\pi$ ,  $0 < \alpha < 1$ )에서만 관측할 수 있는 경우에는, 식 (3)에서 각도에 대한 적분영역을 제한된 각도로 줄여야 하고, 그러한 이유로, 영상재구성은 부족한 정보로 인한 여러 오류를 갖게 된다(그림 1-b 참조).

제한된 각도에서의 관측에 대한 해결책으로 가장 일반적인 방법은 관측하지 못한 각도에서의 프로젝션 데이터를 완결하는 기법이다. 예를 들어, 재구성하려는 영상에 대한 선험적 정보 또는 수학적 외삽법(Extrapolation) 등을 이용하여 관측하지 못한 각도에서의 프로젝션을 추정하는 방법들이 있다[4,5]. 그러나 이 방법들은 많은 경우 재구성하려는 영상에 대한 선험적 정보를 필요로 하고, 또한, 추정의 정확성이 떨어지는 경우, 새로운 형태의 오류가 발생하여 결과적으로 추정에 의한 효과가 상쇄되는 경우가 빈번히 발생한다[6].

한편, 기대치 최대화 방법은 재구성하고자 하는 영상  $f$ 와 관측값  $Y$ 와의 관계를 선형으로 보고, 그것의 통계적 가정으로부터 유도된 반복법이다[3]. 보다 구체적으로, 기대치 최대화 방법은 영상  $f$ 를 화소  $v$ 에서의 영상의 강도를 의미하는  $f_v$ 로, 관측된 프로젝

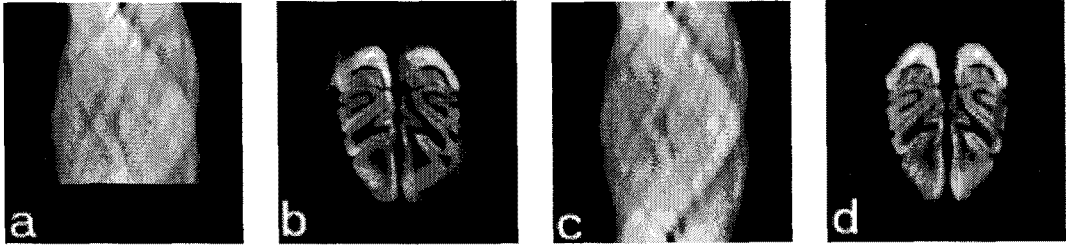


그림 1. 제안된 방법: a-제한된 각도에서 관측한 프로젝션 데이터, b-제한된 각도에서 관측한 프로젝션 데이터를 여현 역투사에 적용하여 재구성한 영상, c-일관성조건을 이용한 반복적 데이터 완결에 의한 프로젝트 데이터, d-완결된 프로젝트 데이터를 여현 역투사에 적용하여 재구성한 영상

선 데이터  $Y$ 를 관측위치  $b$ 에서의 관측값  $Y_b$ 로 이산화하고, 이 두 데이터간의 관계를 기술하는 행렬을  $P_{b,v}$ (관측모델이 Radon 변환에 의해 기술될 수 있는 경우, 행렬  $P$ 는 Radon 변환에 대한 행렬표현과 일치한다)를 이용하여

$$Y_b = \sum_{v \in V} P_{b,v} f_v, \quad b \in B$$

와 같은 관측모델을 가정한 후에, 이에 대한 해결방법으로 다음의 반복법을 제시한다.

$$f_v^{m+1} = f_v^m \sum_{b \in B} P_{b,v} \frac{Y_b}{\mu_b}, \quad \mu_b = \sum_{v \in V} P_{b,v} f_v^m \quad (4)$$

여기서,  $V$ 와  $B$ 는 각각 모든 화소 집합과 모든 관측위치 집합을 의미한다. 또한,  $f_v^m$ 는 화소  $v$ 에서  $m$ 번째 반복법에 의한 영상의 값이다.

기대치 최대화 방법은 관측모델이 정확히 Radon 변환을 따르지 않는 경우에도 적용가능(즉, 관측모델이 Radon 변환으로 모델화될 수 없는 경우에도 해당관측모델을 행렬표현으로 직접 고려할 수 있다)하고, 또한, 선형적 정보를 이용하기 용이하다는 장점이 있다[10-12]. 그러나 기대치 최대화 방법에 의한 영상재구성은 여현 역투사에 비해 현저히 많은 수행시간을 필요로 한다. 실제로, 기대치 최대화 방법의 1회 반복은 여현 역투사의 전체계산과정보다도 더 긴 계산시간을 필요로 한다.

일반적으로, 각도 제한 단층영상재구성의 경우 기대치 최대화 반복법은 앞에서 거론한 직접적 방법에 비해 더 나은 결과를 제공하는 경우가 많다. 이는 기대치 최대화 반복법이 계산과정 중간에 현재의 영상으로부터 얻은 프로젝트 데이터를 반복적으로 관측된 프로젝트 데이터와 비교하여 개선할 수 있는 절차를

를 가지기 때문이다. 그러나 그러한 향상은 대체로 많은 반복횟수를 필요로 한다는 단점이 있다. 한편, 반복법 중간에 데이터 완결을 이용하는 방법을 고려할 수 있다. 예를 들어, 실제 관측이 이루어진 위치집합을  $B_0$ 라 하자. 데이터 완결을 고려하지 않은 기대치 최대화 방법은 집합  $B_0$ 를 식 (4)의  $B$  대신 사용하는 것인데 반해, 데이터 완결을 고려한 일반적인 기대치 최대화 방법은 식 (4)에서 관측되지 않은 위치  $b$ , 즉,  $b \in B - B_0$ 에 대해서 현재의 추정  $f_v^m$ 을 이용한 예측기법, 즉,  $Y_b = \sum_{v \in V} P_{b,v} f_v^m$ 을 사용하는 것으로, 다음과 같은 반복절차를 이용한다.

$$f_v^{m+1} = f_v^m \sum_{b \in B_0} P_{b,v} \frac{Y_b}{\mu_b} + f_v^m \sum_{b \in B - B_0} P_{b,v}, \quad \mu_b = \sum_{v \in V} P_{b,v} f_v^m \quad (5)$$

이 때 미리 주어진 제한조건이나 선형적 정보를 이용할 수 있다면 데이터 완결의 효과는 더욱 커질 것이다. 그러나 이러한 접근방법 역시 재구성하려는 영상에 대한 선형적 정보의 정확성에 아주 민감하게 반응하는 단점이 있다. 본 논문에서는 기대치 최대화 방법에 데이터 완결을 고려한 경우와 고려하지 않은 경우 모두를 비교 시뮬레이션에서 다루었다.

### 3. 여현 역투사 기반 반복적 데이터 완결

본 논문에서 제안하고자 하는 방법은 여현 역투사 기반 반복적 데이터 완결을 이용한 각도 제한 영상재구성이다. 즉, 주어진 프로젝트 데이터에 여현 역투사를 적용하여 신속하게 영상을 복원하고, 복원된 영상으로부터 다시 관측하지 않은 각도에서의 프로젝트 데이터를 완결하는 과정을 반복적으로 수행하여

영상재구성하는 것을 골자로 한다. 이때, 관측된 각도에서의 프로젝션  $Y(\theta, u)$ ,  $0 \leq \theta \leq \alpha\pi$ 와 관측되지 않은 각도에서의 프로젝션  $Y(\theta, u)$ ,  $\alpha\pi \leq \theta \leq \pi$ 의 '조화로운 결합'을 위해 Radon 변환의 '일관성 조건'(Consistence Condition)을 이용하였다[7-9].

일관성 조건이 의미하는 바는 '주어진  $Y(\theta, u)$ 가 어떤 영상  $f$ 에 의해  $Y(\theta, u) = Rf(\theta, u)$ '일 필요충분조건은 ' $\int_{-1}^1 u^m Y(\theta, u) du$ ,  $m = 0, 1, \dots$ 이  $\theta$ 에 대한  $m$ 차의 동형다항식(homogeneous equation)'이다. 여기서, 변수  $u$ 에 대한 적분영역이 -1에서 1까지인 이유는 주어진 영상  $f(x_1, x_2)$ 가 단위원 내부에서만 0이라고 가정하였기 때문이다. 위의 일관성 조건을  $m = 0, 1$ 인 경우에 대해서만 이를 기술하면, 어떤 상수  $C_0, C_1, S_1$ 에 대해,  $m = 0$ 인 경우

$$\int_{-1}^1 Y(\theta, u) du = C_0 \tag{6}$$

와  $m = 1$ 인 경우에

$$\int_{-1}^1 u Y(\theta, u) du = C_1 \cos \theta + S_1 \sin \theta \tag{7}$$

이 모든 각도  $\theta$ 에 대해 성립해야 한다.

한편, 식 (6)과 식 (7)을 푸리에 변환을 이용하여 다시 적어보면 각각

$$Y(\theta, \cdot)^{\wedge}(0) = C_0$$

$$\text{Real} \left( \frac{-1}{2\pi i} \frac{\partial Y(\theta, \cdot)^{\wedge}(0)}{\partial w} \right) = C_1 \cos \theta + S_1 \sin \theta$$

와 동일하다. 해당 상수  $C_0, C_1, S_1$ 의 계산은, 잡음 등의 영향을 고려하여,

$$\min_{C_0} \int_0^{\alpha\pi} |Y(\theta, \cdot)^{\wedge}(0) - C_0|^2 d\theta,$$

$$\min_{C_1, S_1} \int_0^{\alpha\pi} |D(\theta) - C_1 \cos \theta - S_1 \sin \theta|^2 d\theta,$$

$$D(\theta) = \text{Real} \left( \frac{-1}{2\pi i} \frac{\partial Y(\theta, \cdot)^{\wedge}(0)}{\partial w} \right)$$

을 최소로 하는 방법을 통해 구하면,

$$C_0 = \frac{1}{\alpha\pi} \int_0^{\alpha\pi} Y(\theta, \cdot)^{\wedge}(0) d\theta, \tag{8}$$

$$C_1 = \frac{SS \cdot \int_0^{\alpha\pi} D(\theta) \cos \theta d\theta - CS \cdot \int_0^{\alpha\pi} D(\theta) \sin \theta d\theta}{CC \cdot SS - CS^2} \tag{9}$$

$$S_1 = \frac{\int_0^{\alpha\pi} D(\theta) \cos \theta d\theta - C_1 \cdot CC}{CS}$$

의 결과를 얻을 수 있다. 여기서,

$$CC = \int_0^{\alpha\pi} \cos^2 \theta d\theta,$$

$$SS = \int_0^{\alpha\pi} \sin^2 \theta d\theta,$$

$$CS = \int_0^{\alpha\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta$$

이다.

지금까지의 결과를 데이터 완결에 다음과 같이 적용한다. 관측된 각도에서의 프로젝션  $Y(\theta, u)$ ,  $0 \leq \theta \leq \alpha\pi$ 는 이미 식 (6)과 식 (7)를 만족하므로, 이를 이용하여 상수  $C_0, C_1, S_1$ 을 식 (8)과 식 (9)의 방법에 의해 계산하고, 그 결과를 관측이 이루어지지 않은 각도에서의 프로젝션  $y(\theta, u)$ ,  $\alpha\pi \leq \theta \leq \pi$ (현 단계에서 추정된 영상을 이용하여 계산한 프로젝션)에 강제적으로 만족하게 하는 것이다. 구체적으로,  $y(\theta, u)$ ,  $\alpha\pi \leq \theta \leq \pi$ 은

$$y_0(\theta, \cdot)^{\wedge}(w) = \begin{cases} y(\theta, \cdot)^{\wedge}(w), & w \neq 0 \\ C_0, & w = 0 \end{cases} \tag{10}$$

을 만족하도록  $y_0(\theta, u)$ 로 변환한다. 또한,  $y_0(\theta, u)$ 에 대해

$$\frac{-1}{2\pi i} \frac{\partial y_0(\theta, \cdot)^{\wedge}(0)}{\partial w} = C_1 \cos \theta + S_1 \sin \theta \tag{11}$$

을 만족하도록  $w \neq 0$ 에 대해  $y_0(\theta, \cdot)^{\wedge}(w)$ (즉,  $y_0(\theta, \cdot)^{\wedge}(0)$ 의 값은 변화시키지 않는다)를 변화시킨 후에, 그것의 푸리에 역변환 결과를  $y_1(\theta, u)$ 라 하면,  $y_1(\theta, u)$ 는  $y_1(\theta, \cdot)^{\wedge}(0) = y_0(\theta, \cdot)^{\wedge}(0)$ 이므로,

$$\int_{-1}^1 y_1(\theta, u) du = C_0$$

을 만족하고, 또한 정의에 의해

$$\int_{-1}^1 u y_1(\theta, u) du = C_1 \cos \theta + S_1 \sin \theta$$

은 만족한다. 이와 같은 사실을 토대로,

$$Y(\theta, u) = y_1(\theta, u), \alpha\pi \leq \theta \leq \pi \tag{12}$$

와 같이 정의가 확장된  $Y(\theta, u)$ (그림 1-c)는 모든 각도에 대해 식 (6)과 식 (7)를 만족하게 된다. 이를 여현 역투사에 이용하여 다음 단계의 영상(그림 1-d)을 재구성한다.

지금까지의 내용을 이용하여 제안하고자 하는 방

법을 정리하였다. 설명의 편의를 위해 연속변수를 이용하였지만, 실제 계산은 그것의 이산화 결과를 이용해야함을 유의하자.

**제안된 방법**

**초기단계:**

1) 실제로 관측이 이루어진 각도에서의 프로젝션 데이터  $Y(\theta, u)$ ,  $0 \leq \theta \leq \alpha\pi$ (그림 1-a, 가로축이 각도가 증가하는 방향이다)를 이용하여 상수  $C_0$ (식 (8) 참조),  $C_1, S_1$ (식 (9) 참조)를 계산한다.

2) 실제로 관측이 이루어진 각도에서의 프로젝션 데이터  $Y(\theta, u)$ ,  $0 \leq \theta \leq \alpha\pi$ 을 이용하여 영상  $f^0$ (그림 1-b)를

$$f^0(x_1, x_2) = \int_0^{\alpha\pi} F(\theta, x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta) d\theta$$

을 이용하여 재구성한다.

3)  $E_0 = \int_0^{\alpha\pi} \int_{-1}^1 |Y(\theta, u)|^2 du d\theta$ 을 계산한다.

**반복단계:** 각각의  $n=0, 1, \dots$ 에 대해

1) 현 단계에서의 영상  $f^n$ 을 Radon 변환에 적용하여 프로젝션 데이터  $y^n(\theta, u) = Rf^n(\theta, u)$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ 을 계산한다.

2) 실제로 관측이 이루어진 각도에서의 프로젝션 데이터  $Y(\theta, u)$ ,  $0 \leq \theta \leq \alpha\pi$ 와 현 단계에서 예측한 프로젝션 데이터  $y^n(\theta, u)$ ,  $\alpha\pi \leq \theta \leq \pi$ 의 ‘조화로운 결합’을 위해,  $0 \leq \theta \leq \pi$ (관측이 이루어지 않은 각도만이 아니라 모든 각도에 대해 적용함을 유의하자)인 각각의  $\theta$ 에 대해 일관성 조건을 만족하도록 식 (10)과 식 (11)에서 설명한 바와 같이  $y^n(\theta, u)$ 은 순차적으로  $y_0^n(\theta, u)$ ,  $y_1^n(\theta, u)$ 로 변화시킨다.

3)  $E_{n+1} = \int_0^{\alpha\pi} \int_{-1}^1 |Y(\theta, u) - y_1^n(\theta, u)|^2 du d\theta$ 을 계산한다.

4)  $E_{n+1} \geq E_n$ 이면 반복을 중단하고, 반대로  $E_{n+1} < E_n$ 이면, 다음을 수행한다.

a) 식 (12)에서 같이 관측하지 않은 각도에서의 프로젝션 데이터  $Y(\theta, u)$ (그림 1-c)를 완결한다.

$$Y(\theta, u) = y_1^n(\theta, u), \alpha\pi \leq \theta \leq \pi$$

b) 완결된 프로젝션 데이터  $Y(\theta, u)$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ 은 여현 역투사에 적용하여 다음 단계의 영상  $f^{n+1}$ (그림 1-d)를 재구성한다.

$$f^{n+1}(x_1, x_2) = \int_0^{\pi} F(\theta, x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta) d\theta,$$

$$F(\theta, \cdot)^\wedge(w) = Y(\theta, \cdot)^\wedge(w)|w|$$

제안된 방법의 가장 큰 장점은 기대치 최대화 방법에 비해 수렴속도가 빠르다는 점이다. 제안된 방법의 1회 반복은 Radon 변환과 여현 역투사 과정이 한 번씩 필요한데, 이는 Radon 변환과 역투사 과정이 한 번씩 필요한 기대치 최대화의 1회 반복과 계산량이 거의 비슷하다. 또한, 제안된 방법은 별도의 선험적 정보를 필요로 하지 않고, 반복중단의 조건이 명확하다는 부가적인 장점이 있다.

앞에서 거론한 일련의 방법을 실제의 프로젝션 데이터에 적용하기 위해서는 이산화 과정이 필요하다. 예를 들어, 적분은 샘플들의 합으로, 푸리에 변환은 FFT(Fast Fourier Transform)으로, 그리고 미분은 수치미분으로 대체해야 한다. 본 논문에서는 2의 멱수에 적용할 수 있는 FFT 알고리즘[13]을 이용하였다. 예를 들어, 이산화 변수  $u$ 의 개수가 191인  $y(\theta, u)$ 의 좌.우에 0을 채워 넣어 이산화 변수  $u$ 의 개수가 256개가 되도록 한 후에, FFT 알고리즘을 적용하여  $y(\theta, \cdot)^\wedge(k\Delta)$ ,  $k=0, 1, \dots, 255$ 을 얻었다. 여기서,  $y(\theta, \cdot)^\wedge(k\Delta)$ 는 푸리에 변환의 결과라기보다는 길이가 256인 벡터에 FFT 알고리즘을 적용한 결과이다. 또한,  $\Delta$ 는  $y(\theta, \cdot)^\wedge(k\Delta)$ 이 이산화 데이터라는 것을 표현하기 위해 사용한 것으로 실제 계산에서는  $\Delta=1$ 으로 하였다. 구체적으로, 식 (10)의 계산은

$$C_0 = \frac{\sum_0^{\pi} Y(\theta, \cdot)^\wedge(0)}{\text{관측된 각도의 수}}$$

은 각도  $\theta$ 에 상관없이,

$$y(\theta, \cdot)^\wedge(0) = C_0$$

으로 강제하는 것으로, 식 (11)의 계산은,

$$D(\theta) \approx \text{Real} \left( \frac{-1}{2\pi i} \frac{Y(\theta, \cdot)^\wedge(\Delta) - Y(\theta, \cdot)^\wedge(-\Delta)}{2\Delta} \right)$$

을 이용하여  $y(\theta, \cdot)^\wedge(-\Delta) = y(\theta, \cdot)^\wedge(255\Delta)$ 임을 이용, 상수  $C_1, S_1$ 을 계산한 후에, 그 결과를 관측되지 않은 각도에서의 이산화 프로젝션 데이터  $y_0(\theta, u)$ 도 만족하도록,

$$\frac{-1}{2\pi i} \frac{y_0(\theta, \cdot)^\wedge(\Delta) - y_0(\theta, \cdot)^\wedge(0)}{\Delta} = C_1 \cos \theta + S_1 \sin \theta$$

$$\frac{-1}{2\pi i} \frac{y_0(\theta, \cdot)^{\wedge}(0) - y_0(\theta, \cdot)^{\wedge}(255\Delta)}{\Delta w} = C_1 \cos \theta + S_1 \sin \theta$$

와 같이  $k=1$ 과  $k=255$ 에 대해  $y_0(\theta, \cdot)^{\wedge}(k\Delta)$ 으로 수정한다. 최종적으로, 그렇게 얻은  $y_1(\theta, \cdot)^{\wedge}(k\Delta)$ 에 IFFT (Inverse FFT)를 적용하여  $y_1(\theta, u)$ 은 계산하였다.

#### 4. 실험결과 및 고찰

본 논문에서 제안한 여현 역투사 기반 반복적 데이터 완결의 성능을 확인하기 위해 데이터 완결 기법을 사용하지 않은 여현 역투사와 기대치 최대화 방법을 비교하는 시뮬레이션을 수행하였다. 여기서 기대치 최대화 방법에 대해서도 데이터 완결 기법(2장 참조)을 사용한 경우와 사용하지 않은 경우를 모두 수행하였다. 논의의 편리를 위해 다음의 약어들을 사용하였다.

**시뮬레이션에 사용한 알고리즘의 약어:**

- FBP:** 여현 역투사(데이터 완결을 사용안함)
- DC-FBP:** 여현 역투사 기반 반복적 데이터 완결
- EM:** 데이터 완결을 사용안한 기대치 최대화
- DC-EM:** 데이터 완결을 사용한 기대치 최대화

시뮬레이션에 사용한 변수는 다음과 같다.

**시뮬레이션에 사용한 변수:**

실제 관측각도의 수( $N_\theta$ )	90
관측 각도 간격( $\Delta\theta$ )	1.5°
관측 각도의 영역	[0, 135°]
각도 당 프로젝션 수( $N_u$ )	191
영상의 화소 수( $N \times N$ )	121 × 121

영상재구성의 결과에 대한 평가 기준으로 수행속도, 시각적 비교와 함께 RRMS(Relative Root Mean

Square)를 이용하였다. 여기서, RRMS는 다음과 같이 정의한다.

$$RRMS = \min_{a,b} \frac{\sum_v |f_v - a\tilde{f}_v - b|^2}{\sum_v |f_v|^2},$$

$f_v$ : 원영상,  $\tilde{f}_v$ : 복원된 영상

보통의 RMS에 비해 RRMS는 제한된 각도에서의 프로젝션 데이터만을 가지고 복원하는 경우에 원영상과 복원된 영상의 화소값의 크기가 다를 수 있는 장점이 있다.

시뮬레이션에서는 그림 2의 4개의 영상을 사용하였다. 그림 2-a를 'hot rod', 그림 2-b를 'cold rod', 그림 2-c를 'monkey brain', 그림 2-d를 'MCAT (Mathematical Cardiac Torso)' 영상이라 명명하자.

프로젝션 데이터는 위에서 언급한 각도의 수와 각도 당 프로젝션의 수만큼 이산 Radon 변환을 적용하여 계산하였다. 실제 관측에서 발생하는 잡음을 모사하기 위해, 계산된 프로젝션의 평균 강도의 10%를 표준편차로 갖는 정규잡음을 첨가하였다. 잡음에 대한 대응으로 FBP와 DC-FBP는 여현 역투사 과정에 주파수 길이가 256인 Hann 필터를 주파수 영역에서의 곱의 형태로 적용하였고, EM과 DC-EM에는 1개의 화소크기를 FWHM(Full Width Half Maximum)으로 갖는 가우스 평탄화(Gaussian Smoothing)를 적용하였다. 또한, 이산화 과정에서 FFT는 주어진 데이터의 길이를 256(각도 당 프로젝션의 수 191보다 큰 2의 멱수로 선택)이 되도록 필요한 만큼으로 0으로 채운 후에 적용하였다.

시뮬레이션에서는 쿼드코어 2.4GHz 중앙연산처리기와 4GB 램을 장착한 컴퓨터를 이용하였다. 이 컴퓨터에서의 각 알고리즘의 수행속도를 'cold rod' 영상(그림 2-b)을 이용한 경우에 대해 초단위로 표 1에

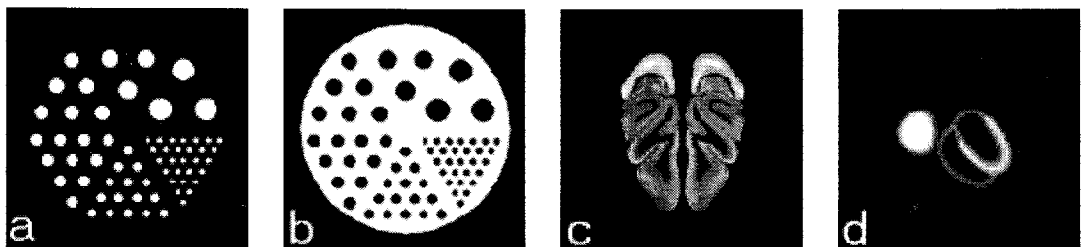


그림 2. 모의실험에 사용한 영상: a-'hot rod', b-'cold rod', c-'monkey brain', d-'MCAT'

표 1. 각 알고리즘의 수행속도

	FBP	DC-FBP	EM	DC-EM
전처리(초)	0.27	0.11	-	0.08
1회 반복(초)	-	0.98	0.56	0.72

기술하였다. 여기서, 전처리 과정이 필요 없는 EM과 반복과정이 필요 없는 FBP의 해당 과정은 ‘-’으로 기록하였다.

그림 3, 그림 4, 그림 5, 그림 6은 각각 FBP, DC-FBP, EM, DC-EM에 의한 모의실험 결과이다. 모의실험의 결과는, 첫째, DC-FBP, 즉, 여현 역투사 기반 반복적 데이터 완결을 이용한 영상재구성이 관측되지 않은 각도에서의 프로젝션 데이터를 없는 것

으로 여기고 여현 역투사를 그대로 적용한 방법 (FBP)에 비해 우수한 결과를 제공함을 보여주고 있다. 이는 언뜻 생각하면 당연한 결과인 것 같지만, 반복적 데이터 완결을 적용한 DC-EM(그림 6)의 결과가 데이터 완결을 하지 않은 EM(그림 5)의 결과에 비해 더 나빠진 사실에 비추어 볼 때 그렇게 당연한 것은 아니다. 둘째로, 모의실험의 결과는 제안한 방법 DC-FBP의 결과가 적은 수의 반복횟수(‘hot rod’의 경우 11회, ‘cold rod’ 3회, ‘monkey brain’ 10회, ‘MCAT’ 5회)에도 불구하고 DC-EM 또는 EM의 200회 반복과정에서 가장 RRMS가 작은 결과에 견줄만 하거나 또는 우수한 결과를 제공함을 보여주고 있다. 셋째, EM과 DC-EM의 경우 많은 횟수의 반복과정

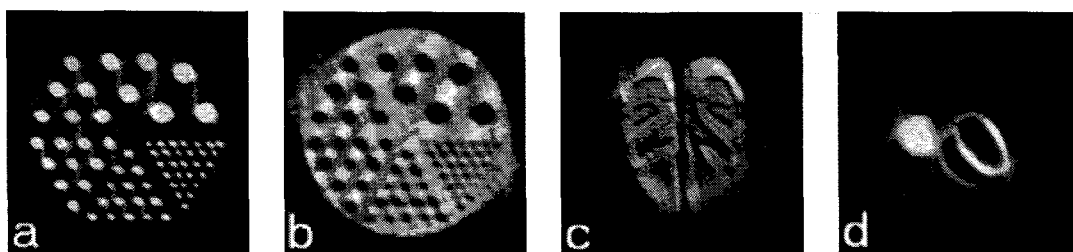


그림 3. FBP에 의한 영상재구성 결과: a-‘hot rod’, RRMS = 13.9%; b-‘cold rod’, RRMS=10.3%; c-‘monkey brain’, RRMS=14.3%; d-‘MCAT’, RRMS=9.0%

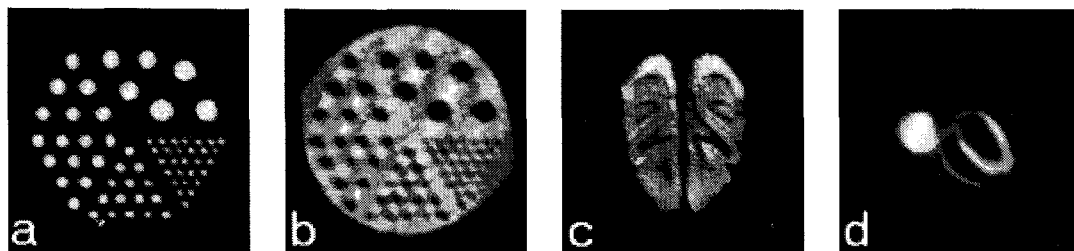


그림 4. DC-FBP에 의한 영상재구성 결과: a-‘hot rod’, RRMS=4.9%; b-‘cold rod’, RRMS=8.0%; c-‘monkey brain’, RRMS=7.0%; d-‘MCAT’, RRMS=3.4%

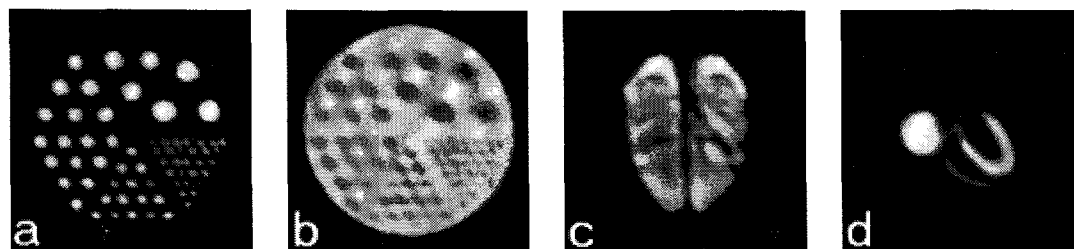


그림 5. EM에 의한 영상재구성 결과, 200회 반복 중에서 가장 RRMS가 작은 것을 선택: a-‘hot rod’, RRMS=11.4%; b-‘cold rod’, RRMS= 8.2%; c-‘monkey brain’, RRMS=10.1%; d-‘MCAT’, RRMS=2.7%



에 적용한 가우스 평탄화 작업이 전반적으로 영상을 너무 부드럽게 하는데 반해, 제안된 방법 DC-FBP는 적은 수의 반복으로 충분하여 전체적으로 EM과 DC-EM에 비해 더 선명한 영상을 제공할 수 있다.

비교 시뮬레이션의 객관적 결과로, RRMS, 반복 횟수, 수행 시간을 표 2에 정리하였다. DC-FBP의 경우, 정해진 조건(제안한 방법의 반복과정 4)에 의해 중단한 반복횟수와 그 때까지 소용한 시간을, 그리고, EM과 DC-EM의 경우 가장 작은 RRMS를 제공하는 반복횟수와 그 때까지 소요한 시간을 경우를 기록하였다. 표 2의 결과를 통해 제안된 방법 DC-FBP가 기존의 방법에 비해 짧은 수행시간을 소

요하고도 기존의 방법 중에서 가장 효과적인 것으로 알려진 EM의 결과에 비교하여 견줄만하거나 또는 우수한 결과를 제공할 수 있었다.

제안된 방법 DC-FBP의 성공 여부는 데이터 완결의 정확성에 달려 있다. 이를 구체적으로 살펴보기 위해, 잡음이 없는 프로젝션 데이터에 대한 데이터 완결과정을 그림 7과 그림 8에서 정리하였다. 그림 7은 'MCAT' 영상의 프로젝션 데이터가 완결되어 가는 과정을 보여주고 있다. 그림 7-a는 모든 각도에서의 프로젝션 데이터를, 그리고 그림 7-b, c, d는 반복 횟수에 따라 데이터 완결에 의해 추정된 프로젝션 데이터를 보여주고 있다. 그림 7에서 보면 알 수 있듯이 그림 7-a에서 실제로 관측되지 않은 각도

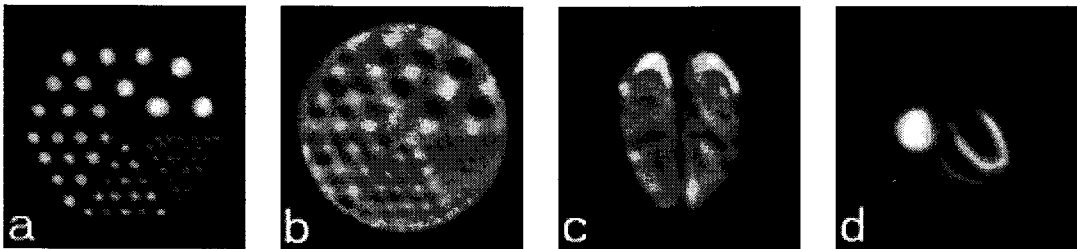


그림 6. DC-EM에 의한 영상재구성 결과, 200회 반복 중에서 가장 RRMS가 작은 것을 선택: a-'hot rod', RRMS=13.9%; b-'cold rod', RRMS=8.4%; c-'monkey brain', RRMS=10.8%; d-'MCAT', RRMS=3.2%

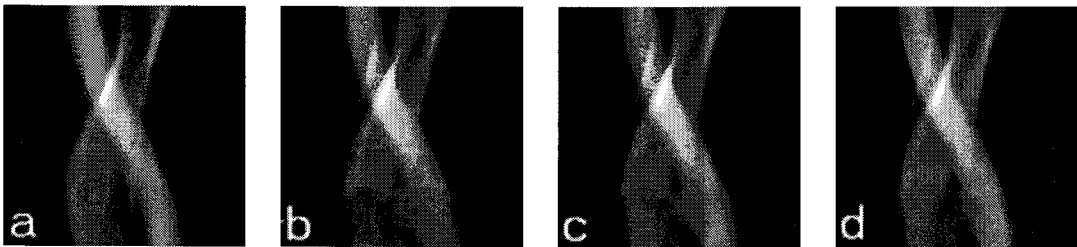


그림 7. 'MCAT' 영상의 프로젝션에 대한 반복적 데이터 완결과정: a-모든 각도에서의 프로젝션 데이터; b-DC-FBP 1회 반복에서의 데이터 완결; c-DC-FBP 3회 반복에서의 데이터 완결; d-DC-FBP 5회 반복에서의 데이터 완결

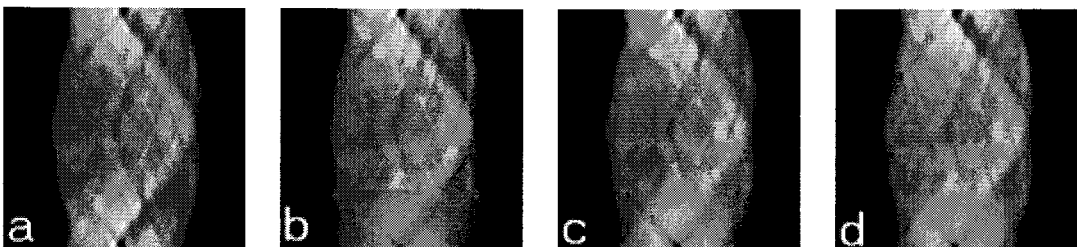


그림 8. 'monkey brain' 영상의 프로젝션에 대한 반복적 데이터 완결과정: a-모든 각도에서의 프로젝션 데이터; b-DC-FBP 1회 반복에서의 데이터 완결; c-DC-FBP 3회 반복에서의 데이터 완결; d-DC-FBP 5회 반복에서의 데이터 완결

표 2. 비교 시뮬레이션 결과: RRMS(%), 반복횟수, 수행시간(초)

Phantom		FBP	DC-FBP	EM	DC-EM
Hot Rods	RRMS	13.9	4.9	11.4	13.9
	반복횟수	-	11	143	172
	수행시간	0.28	11.5	78.64	125.5
Cold Rods	RRMS	10.3	8.0	8.2	8.4
	반복횟수	-	3	26	32
	수행시간	0.28	3.2	14.5	24.3
Monkey Brain	RRMS	14.3	7.0	10.1	10.8
	반복 횟수	-	10	70	75
	수행시간	0.27	9.98	38.5	55.4
MCAT	RRMS	9.0	3.4	2.7	3.2
	반복횟수	-	5	163	146
	수행시간	0.29	5.26	89.3	108.5

( $0.75\pi \leq \theta \leq \pi$ )에서의 프로젝션 데이터를 완결하는 데 상당히 부정확함을 알 수 있다. 특히, 바깥 경계부분의 완결이 부정확하다. 이는 곧바로 영상재구성에 영향을 주어 DC-FBP가 'MCAT'에서 DC-EM과 EM에 비해 나쁜 결과를 얻는데 원인이 되었다. 이에 비해, 'monkey brain' 영상의 경우, 데이터 완결이 상당히 잘 되었음을 그림 8에서 확인할 수 있었다. 이 두 예를 보는데, 데이터 완결의 정확성을 높일 수 있는 선형적 정보(예, 영상의 영역에 대한 정보)가 있다면 이는 DC-FBP에서 잘 활용될 수 있음을 예상할 수 있다.

### 5. 결 론

본 논문에서는 여현 역투사 기반 반복적 데이터 완결을 이용한 각도 제한 단층영상재구성을 다루었다. 제안된 방법은, 주어진 프로젝션 데이터에 여현 역투사를 적용하여 신속하게 영상을 복원하고, 복원된 영상으로부터 관측하지 않은 각도에서의 프로젝션 데이터를 완결하는 과정을 반복적으로 수행한다. 또한, 관측된 각도에서의 프로젝션과 관측되지 않은 각도에서의 프로젝션의 조화로운 결합을 위해 일관성 조건을 새로이 완결되는 프로젝션 데이터가 만족하도록 한다.

제안된 방법은 선형적 정보를 필요로 하지 않는다는 점과 함께 빠른 수렴속도를 장점으로 갖는다는

사실을 기대치 최소화 방법과의 비교실험을 통해 확인할 수 있었다. 또한, 제안된 방법은 반복의 중단조건이 명확하다는 부가적인 장점도 가지고 있다.

본 논문에서는 관측과정 자체가 정확히 Radon 변환모형을 따르지 않는 경우, 예를 들어, 거리 의존적 흐트러짐이 있는 경우는 고려하지 않았다. 본 논문에서 제안된 여현 역투사 기반 반복적 데이터 완결을 각도 제한뿐만 아니라 거리 의존적 흐트러짐에 의해 왜곡이 발생하는 경우에도 효과적으로 적용할 수 있는 방법에 대한 연구를 추후 연구대상으로 하고자 한다.

### 참 고 문 헌

- [1] A.C. Kak and M. Slaney, *Principles of Computerized Tomography Imaging*, IEEE Press, New York, 1987.
- [2] L.A. Shepp and B.F. Logan, "The Fourier reconstruction of a head section," *IEEE Trans. Nuclear Sci.*, Vol.21, pp. 21-43, 1974.
- [3] L.A. Shepp and Y. Vardi, "Maximum likelihood reconstruction for emission tomography," *IEEE Trans. Medical Imaging*, Vol. 1, pp. 113-122, 1982.
- [4] M.E. Davison, "The ill-conditioned nature of the limited angle tomography problem," *SIAM J. Appl. Math.*, Vol.43, pp. 428-448, 1983.
- [5] A. Ramm, "Inversion of limited-angle tomographic data," *Comput. Math. Appl.*, Vol.22, pp. 101-111, 1992.
- [6] F. Natterer and F. Wubbeling, *Mathematical methods in image reconstruction*, SIAM, Philadelphia, 2001.
- [7] R.M. Lewitt, "Image reconstruction from projections III: Projection completion methods(theory)," *Optik*, Vol.50, pp. 180-205, 1978.
- [8] F. Natterer, *The mathematics of computerized tomography*, John Wiley, B.G. Teubner, New York, 1986.
- [9] A.K. Louis and A. Reider, "Incomplete data problems in x-ray computerized tomography

II: Truncated projections and region-of-interest tomography,” *Numer. Math.* Vol.56, pp.371-383, 1989.

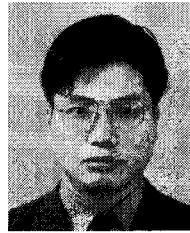
[10] G.L. Zeng, G.T. Gullberg, B.M.W. Tsui, and J.A. Terry, “Three-dimensional iterative reconstruction algorithms with attenuation and geometric point response correction,” *IEEE Trans. Nuclear Science*, Vol.38, No.2, pp. 693-702, 1991.

[11] J. Y. Hesterman and M. A. Kupinski, “The multi-module, multi-resolution system (M3R): A novel small-animal SPECT system,” *Med. Phys.*, Vol.34, Issue 3, pp. 987-993, 2007.

[12] G. Wang, L. Fu, and J. Qi, “Maximum a posteriori reconstruction of the Patlak parametric

image from sinograms in dynamic PET,” *Phys. Med. Biol.*, Vol.53, pp. 593-604, 2008.

[13] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, and B.P. Flannery, *Numerical Recipes in C*, University Press, Cambridge, 1992.



이 남 용

1990년 서울대학교 자연과학대학 수학과(학사)  
1997년 Purdue University 수학과(박사)  
2002년 ~ 현재 인제대학교 컴퓨터 응용과학부 조교수

관심분야: 의료영상처리, 응용수학, 정보보안