

완전이진트리의 교차큐브에 대한 임베딩 (Embedding Complete Binary Trees into Crossed Cubes)

김 숙 연 [†]

(Sook-Yeon Kim)

요 약 교차큐브는 하이퍼큐브의 변형으로서 하이퍼큐브의 절반 정도의 지름을 가지는 등의 개선된 망성질을 가진다. N -노드 완전이진트리는 $(N+1)$ -노드 교차큐브의 부그래프임이 알려져 있으나 [P. Kulasinghe and S. Bettayeb, 1995] 완전이진트리의 노드 개수가 교차큐브의 노드 개수보다 더 큰 경우에 대한 효과적인 임베딩 방법은 알려져 있지 않다. 본 논문에서는 N -노드 완전이진트리를 M -노드 교차큐브에 연장율 1, 부하율 $\lceil N/M \rceil$ 로 임베딩할 수 있음을 보인다($N > M \geq 2$). 여기서 연장율과 부하율은 최적적이다. 본 논문에서 제시하는 임베딩 방법은 같은 레벨의 트리 노드들을 교차큐브의 노드들에 골고루 분포시키는 특징도 가지고 있다. 이 특징은 트리 구조 알고리즘을 교차큐브에서 레벨 단위로 실행할 때 특히 유용하다.

키워드 : 교차큐브, 완전이진트리, 연장율, 부하율, 트리 구조 알고리즘

Abstract The crossed cube, a variation of the hypercube, possesses a better topological property than the hypercube in its diameter that is about half of that of the hypercube. It has been known that an N -node complete binary tree is a subgraph of an $(N+1)$ -node crossed cube [P. Kulasinghe and S. Bettayeb, 1995]. However, efficient embedding methods have not been known for the case that the number of nodes of the complete binary tree is greater than that of the crossed cube. In this paper, we show that an N -node complete binary tree can be embedded into an M -node crossed cube with dilation 1 and load factor $\lceil N/M \rceil$, $N > M \geq 2$. The dilation and load factor is optimal. Our embedding has a property that the tree nodes on the same level are evenly distributed over the crossed cube nodes. The property is especially useful when tree-structured algorithms are processed on a crossed cube in a level-by-level way.

Key words : crossed cube, complete binary tree, dilation, load factor, tree-structured algorithm

1. 서 론

그래프 G 의 그래프 H 에 대한 임베딩은 그래프 G 의 노드 집합 $V(G)$ 의 그래프 H 의 노드 집합 $V(H)$ 에 대한 함수 ψ 이다 ($\psi: V(G) \rightarrow V(H)$). 여기서 그래프 G 를 손님 그래프(guest graph)라 하고 그래프 H 를 주인 그래프(host graph)라고 한다. 그래프 임베딩은 용량이 큰 작업을 작은 작업들로 나누어 병렬처리 시스템에 할

당하는 문제에 활용되어 왔다. 이는 처리해야 할 작업들과 그들간의 통신을 손님 그래프 G 로 모델링하고 병렬 처리 시스템의 프로세서들과 그들간의 연결 상태를 주인 그래프 H 로 모델링함으로써 가능하다. 또한 그래프 임베딩은 상호연결망간의 시뮬레이션, 병렬 알고리즘의 프로세서 할당, VLSI 설계 등을 위해서도 중요 기술로 여겨져 왔다.

연장율(dilation)과 부하율(load factor), 확장율(expansion)은 임베딩의 성능을 측정하는 척도이다. 손님 그래프가 처리해야 할 작업들과 그들간의 통신을 나타내고 주인 그래프가 병렬처리 시스템의 프로세서들과 그들간의 연결 상태를 나타낼 때 임베딩의 연장율은 통신지연(communiation delay)을 측정하는 척도가 되고 부하율과 확장율은 프로세서 이용도(processor utilization)를 측정하는 척도가 된다. 손님 그래프 G 의 에지(u, v)에 대해서 에지(u, v)의 연장율은 두 노드 $\psi(u)$ 와 $\psi(v)$

[†] 정 회 원 : 한경대학교 컴퓨터공학과 교수
sookyeon@hknu.ac.kr
논문접수 : 2008년 3월 27일
심사완료 : 2009년 1월 22일

Copyright©2009 한국정보과학회: 개인 목적이거나 교육 목적인 경우, 이 저작물의 전체 또는 일부에 대한 복사본 혹은 디지털 사본의 제작을 허가합니다. 이 때, 사본은 상업적 수단으로 사용될 수 없으며 첫 페이지에 본 문구와 출처를 반드시 명시해야 합니다. 이 외의 목적으로 복제, 배포, 출판, 전송 등 모든 유형의 사용행위를 하는 경우에 대하여는 사전에 허가를 얻고 비용을 지불해야 합니다.

정보과학회논문지: 시스템 및 이론 제36권 제3호(2009.6)

간의 최단 거리이다. 임베딩 ψ 의 연장율은 손님 그래프의 에지 집합 $E(G)$ 에 속한 에지들의 연장율 중 최대값이다. 손님 그래프의 모든 노드들을 주인 그래프의 노드 한 개에 대응시키는 특별한 경우를 제외하고 임베딩의 연장율의 최소값은 1이다. 주인 그래프 H 의 노드 w 의 부하율은 노드 w 에 할당되는 손님 그래프 G 의 노드의 개수다. 임베딩 ψ 의 부하율은 주인 그래프의 노드 집합 $V(H)$ 에 속한 노드들의 부하율 중 최대값이다. 따라서 임베딩의 부하율은 적어도 $\lceil |V(G)|/|V(H)| \rceil$ 이다. 만약 주인 그래프의 노드 개수가 손님 그래프의 노드 개수 이상이라면 부하율이 1이 되게 임베딩할 수 있다.

그래프 임베딩을 다루는 많은 기존의 연구들에서는 주인 그래프의 노드 개수가 손님 그래프의 노드 개수 이상인 임베딩 문제를 다루었다. 그러한 연구들은 대부분 부하율을 1로 고정한 상태에서 연장율을 줄이는 것을 목표로 하였다. 부하율이 1로 고정될 경우 부하율은 임베딩의 성능을 측정하는 척도가 되지 못하므로 대신 확장율을 사용한다. 확장율은 손님 그래프에 대한 주인 그래프의 노드 개수의 비율 $|V(H)|/|V(G)|$ 이다.

한편 하이퍼큐브는 정규 분지수, 작은 지름, 재귀적 구조, 대칭성, 고장 감내성, 단순한 라우팅 등의 유용한 성질들을 가지고 있어 병렬 처리 시스템의 구조로서 매우 잘 알려져 있다. 하이퍼큐브의 변형들 중 하나인 교차 큐브(crossed cube)는 하이퍼큐브의 절반 정도밖에 안 되는 지름을 가지는 등 개선된 망 성질들을 가지므로 각광 받게 되었다[1-4]. 따라서 교차큐브에 최단경로, 해밀톤 경로, 사이클, 트리, 메쉬와 같은 손님그래프들을 임베딩하는 연구 성과들도 발표되었다[1,2,5-9]. 교차큐브는 다양한 경로를 포함하고 있고[10-13] node-pancyclic 일뿐 아니라 edge-pancyclic 이다[13,14]. 또한 2차원 메쉬와 3차원 메쉬를 포함하고 있음이 알려졌으며 [8,9] 고장을 감내하는 해밀톤 경로나 사이클도 포함하고 있다[5,6,15].

완전이진트리를 교차큐브에 임베딩하는 문제는 Kulsinghe와 Bettayeb에 의해서 연구되었다[7]. 그들은 N 노드 완전이진트리를 $(N+1)$ -노드 교차큐브에 연장율 1, 부하율 1로 임베딩할 수 있음을 보였다. 완전이진트리가 교차큐브의 부그래프가 됨을 보인 이 연구는 손님 그래프인 완전이진트리의 노드 개수가 주인 그래프인 교차큐브의 노드 개수보다 작은 경우에 대한 것이다. 그러나 한정된 성능의 병렬처리 시스템에서 용량이 큰 작업을 해결하기 위해서는 손님 그래프의 노드 개수가 주인 그래프의 노드 개수보다 큰 경우에 대한 임베딩 연구가 필요하다.

노드 개수가 많은 트리를 교차큐브에 임베딩할 경우엔 다수 개의 트리 노드들이 같은 교차큐브 노드에 대

응될 수 있다. 그러나 같은 레벨의 트리 노드들은 가능하면 다른 교차큐브 노드로 분산시키는 것이 바람직하다. 왜냐하면 분할 정복법을 비롯한 다수의 트리 구조의 작업 처리 기법에서 같은 레벨의 노드들은 동시에 처리되어야 병렬 처리 효과를 최대화 할 수 있기 때문이다. 다시 말해서 동시에 처리되어야 하는 작업들이 병렬처리 시스템에 골고루 할당되어야만 부하를 효과적으로 분산시킬 수 있다.

본 논문에서는 완전이진트리의 노드 개수가 교차큐브의 노드 개수보다 많은 경우에 완전이진트리를 교차큐브에 최적으로 임베딩하는 방법을 제시한다. 본 방법은 N -노드 완전이진트리를 M -노드 교차큐브에 연장율 1, 부하율 $\lceil N/M \rceil$ 로 임베딩한다($N > M \geq 2$). 제시하는 임베딩 방법은 같은 레벨의 트리 노드들을 교차큐브의 노드들에 골고루 분포시키는 특징도 가지고 있어($M \neq 8$) 레벨 단위로 진행되는 트리 구조 작업을 교차큐브에서 실행할 때에도 유용하다.

2절에서는 교차큐브의 정의와 기본적인 성질들을 제시하고 3절에서는 완전이진트리를 작은 교차큐브에 임베딩하는 방법을 제시하고 4절에서는 결론을 맺는다.

2. 정의와 표현

이 절에서는 교차큐브의 정의와 기본적인 성질들을 제시한다. m -차원 교차큐브 Q_m 은 2^m 개의 노드를 가진다. 교차큐브의 각 노드는 길이가 m 인 이진 스트링의 주소를 가진다. 이진 스트링 중 연속해서 나오는 같은 비트들은 지수를 이용해서 간단히 표현할 수 있다. 예를 들어 $00001 = 0^4 \cdot 1 = 0^4 \cdot 1$ 이고 $100000 = 10^5 = 1 \cdot 0^5$ 이다. 비트들의 연결(concatenation)를 나타내는 연산자 \cdot 는 생략할 수 있으나 판독성을 증진시키기 위해서 필요 시 삽입한다. 주소 중 어떤 비트가 x 로 표시되어 있으면 그 비트가 0일 수도 있고 1일 수도 있음을 의미한다. 따라서 x 가 포함된 주소는 노드 집합을 의미한다. 예를 들어 $0x = \{00,01\}$ 이고 $x^2 \cdot 1 = \{001,011,101,111\}$ 이다. 교차큐브의 에지들을 설명하기 위해서 다음과 같은 정의들이 필요하다.

정의 2.1 길이가 2인 이진스트링 x 와 y 에 대해서 만약 $(x, y) \in \{(00,00), (10,10), (01,11), (11,01)\}$ 이라면 그들은 서로 짝꿍(pair related)이라고 불린다. 그 역도 성립한다. 만약 길이가 2인 이진스트링 x 와 y 가 짝꿍이면 $x \sim y$ 로 나타낸다.

정의 2.2 길이가 m 인 두 개의 이진스트링 $u = u_{m-1}u_{m-2}\dots u_1u_0$ 와 $v = v_{m-1}v_{m-2}\dots v_1v_0$ 이 있다고 하자. 이진스트링 u 와 v 의 부스트링 $u_{n-1}u_{n-2}\dots u_{k+1}u_k$ 와 $v_{n-1}v_{n-2}\dots v_{k+1}v_k$ 은 다음과 같은 정수 d 가 존재하면 차원 d 에 대해서 인접하다고 말한다.

- 1) k 는 짝수이고 $m \geq n > d \geq k \geq 0$
- 2) $u_d \neq v_d$
- 3) 모든 $j, n > j > d$,에 대해서 $u_j = v_j$
- 4) 만약 $d-k$ 가 홀수이면 $u_{d-1} = v_{d-1}$
- 5) 모든 $i, \lfloor d/2 \rfloor > i \geq k/2$,에 대해서

$$u_{2i-1}u_{2i} \sim v_{2i-1}v_{2i}.$$

이제 위의 정의들을 이용해서 교차큐브를 정의하겠다.

정의 2.3 m -차원 교차큐브 Q_m 은 다음과 같이 재귀적으로 정의된다. Q_1 은 두 노드로 구성된 완전 그래프이다. 교차큐브 Q_m 은 두 개의 $(m-1)$ -차원 교차큐브 Q_{m-1}^0 와 Q_{m-1}^1 로 구성된다. 부큐브 Q_{m-1}^0 와 Q_{m-1}^1 에 속하는 노드들의 주소는 첫비트가 각각 0과 1이다. 부큐브 Q_{m-1}^0 에 속하는 노드 $u = 0 \cdot u_{m-2} \cdots u_1 u_0$ 와 부큐브 Q_{m-1}^1 에 속하는 노드 $v = 1 \cdot v_{m-2} \cdots v_1 v_0$ 은 이진스트링 u 와 v 가 차원 $m-1$ 에 대해서 인접하면 예지가 있다. 그 역도 성립한다.

그림 1에 교차큐브 Q_3 가 그려져 있다. 그림 1(a)와 그림 1(b)는 같은 교차큐브 Q_3 을 다르게 그린 것이다. 그림 2에는 교차큐브 Q_4 가 그려져 있다. 앞으로 교차큐브 Q_m 을 간단히 큐브 Q_m 이라고 부르겠다. 큐브 Q_m 의 두 노드가 d 차원에 대해서 인접하면 그 두 노드를 연결하는 예지를 d 차원 예지라고 부른다. 이제 교차큐브의 기본적인 세 가지 성질을 제시한다[7].

성질 2.1 임의의 이진 스트링 $s, |s| < m$ 에 대해서 큐브 Q_m 의 노드들 중 주소가 s 로 시작하는 노드들 $s \cdot x^{m-|s|}$ 로부터 인접스된 부그래프는 큐브 $Q_{m-|s|}$ 과 동형(isomorphic)이다.

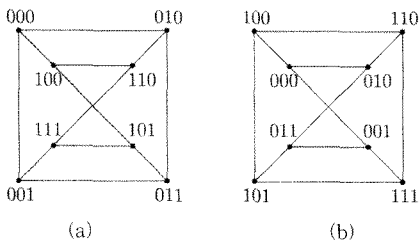


그림 1 교차큐브 Q_3

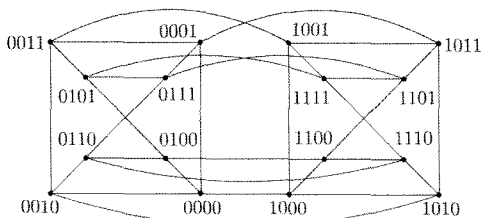


그림 2 교차큐브 Q_4

성질 2.2 두 개의 이진스트링 s 와 t 에 대해서 $|s|=|t| < m$ 이고 $m-|s|$ 가 짝수라고 하자. 큐브 Q_m 에 대해서 만약 이진스트링 s 와 t 가 인접하다면 주소가 s 로 시작하는 노드들 $s \cdot x^{m-|s|}$ 과 t 로 시작하는 노드들 $t \cdot x^{m-|s|}$ 로부터 인접스된 부그래프는 $Q_{m-|s|+1}$ 과 동형이다.

성질 2.3 큐브 Q_m 의 두 노드 u 와 v 의 주소가 첫비트만 다르고 나머지는 모두 같다면 u 를 v 에 대응시키는 차원 보존 동형이 존재한다.

차원 보존 동형이란 큐브 Q_m 의 노드집합 $V(Q_m)$ 에 대한 순열 ϕ 로서 노드 x 와 y 가 차원 d 에 대해서 인접하다면 노드 $\phi(x)$ 와 $\phi(y)$ 도 차원 d 에 대해서 인접하는 성질을 가진다.

3. 완전이진트리의 작은 교차큐브에 대한 임베딩

이 절에서는 N -노드 완전이진트리를 M -노드 교차큐브에 연장을 1, 부하율 $\lceil N/M \rceil$ 로 임베딩할 수 있음을 보인다($N > M$). 이 임베딩은 같은 레벨의 트리 노드들을 교차큐브($M \neq 8$)에 골고루 분포시키는 특징도 가지고 있다. 다시 말해서 트리의 어떤 레벨에 k 개의 노드가 존재한다면 M -노드 교차큐브의 각 노드에는 최대 $\lceil k/M \rceil$ 개의 그 레벨 노드가 할당된다. 앞으로 N -노드 완전이진트리는 트리 $B_n, N=2^n-1$, 으로 나타내겠고 M -노드 교차큐브는 큐브 $Q_m, M=2^m$, 으로 나타내겠다. 특별한 언급이 없으면 연장은 항상 1이다.

먼저 트리 B_n 을 큐브 Q_{n-1} 에 임베딩하는 방법을 제시한 후 이를 확장하여 트리 B_n 을 큐브 $Q_m, m < n$, 에 임베딩하는 방법을 제시하겠다. 트리 B_n 의 노드 개수는 (2^n-1) 이고 큐브 Q_{n-1} 의 노드 개수는 2^{n-1} 이다. 그러므로 트리 B_n 의 큐브 Q_{n-1} 에 대한 임베딩의 부하율은 적어도 2이다. 앞으로 트리 B_n 을 큐브 Q_{n-1} 에 임베딩할 때 항상 한 개의 큐브노드만 부하율이 1이 되게 하고 나머지 노드들은 부하율이 2가 되게 하겠다. 또한 부하율이 1인 노드에는 단말노드만 할당되게 하고 부하율이 2인 나머지 노드들은 단말노드와 내부노드가 한 개씩 할당되게 하겠다. 이렇게 하면 트리의 모든 단말노드들은 자기 다른 큐브노드에 대응하게 되고 모든 내부노드들도 자기 다른 큐브노드에 대응하게 된다.

트리 B_2 를 큐브 Q_1 에 그림 3과 같이 임베딩해 보자. 루트는 큐브노드 0에 대응시킨다. 오른쪽 자식인 단말노드는 큐브노드 1에 대응시킨다. 왼쪽 자식인 단말노드는 부모와 같은 큐브노드 0에 대응하므로 큐브노드 표시를 생략하였다. 앞으로 나오는 모든 그림에서 왼쪽 자식인 단말노드가 부모와 같은 큐브노드에 대응하면 큐브노드 표시를 생략하겠다. 트리 B_2 를 큐브 Q_1 에 그림 3과 같이 임베딩하면 큐브노드 1은 부하율이 1이고 큐브노드 0은 부하율이 2이다. 큐브노드 1에는 단말노드만 할당되



그림 3 트리 B_2 의 큐브 Q_1 에 대한 임베딩

고 큐브노드 0에는 단말노드와 내부노드가 한 개씩 할당된다.

트리 B_3 를 큐브 Q_2 에 그림 4와 같이 임베딩하면 노드 11은 부하율 1이고 나머지 노드들은 부하율 2이다. 부하율 1인 노드 11에는 단말노드만 할당되고 부하율 2인 나머지 노드들에는 단말노드와 내부노드가 한 개씩 할당된다. 또한 트리의 모든 단말노드들은 각기 다른 큐브노드에 대응되고 모든 내부노드들도 각기 다른 큐브노드에 대응된다.

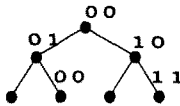


그림 4 트리 B_3 의 큐브 Q_2 에 대한 임베딩

이제부터 $n=4k+2, k \geq 1$, 일 경우에 트리 B_n 을 Q_{n-1} 에 임베딩한 후 n 이 다른 경우도 다루겠다.

소정리 3.1 $n=4k+2, k \geq 1$, 일 때 트리 B_n 을 Q_{n-1} 에 다음 두 가지 조건을 만족하면서 임베딩할 수 있다. 첫째, 트리 B_n 의 루트는 노드 0^{n-1} 에 대응된다. 둘째, 노드 10^{n-2} 는 부하율 1로서 단말노드만 할당되고 나머지 모든 큐브 노드들은 부하율 2로서 단말노드와 내부노드가 한 개씩 할당된다.

증명. 정수 k 에 관한 수학적 귀납법으로 증명하겠다. $k=1$ 인 경우 트리 B_6 을 큐브 Q_5 에 그림 5와 같이 임베딩한다. 그림 5에는 B_6 이 나타나 있는데 단말노드들은 자신의 부모 노드에 붙어 있는 삼각형으로 그려져 있다. 트리 B_6 의 내부 노드들은 윗쪽에 적혀 있는 큐브노드에 대응시킨다. 부모의 왼쪽 자식인 단말노드는 부모 노드와 같은 노드에 대응시키고 부모의 오른쪽 자식인 단말

노드는 해당 삼각형의 아래에 적힌 큐브노드에 대응시킨다. 예를 들어 맨 오른쪽 단말노드는 노드 11000에 대응시키고 그 단말노드의 바로 왼쪽에 있는 형제 단말노드는 노드 11010에 대응시킨다.

그림 5를 자세히 살펴보면 다음 두 가지 조건을 만족함을 알 수 있다. 첫째, 트리 B_6 의 루트는 노드 00000에 대응된다. 둘째, 노드 10000은 부하율 1로서 단말노드만 할당되고 나머지 모든 큐브 노드들은 부하율 2로서 단말노드와 내부노드가 한 개씩 할당된다. 따라서 $k=1$ 인 경우 본 소정리가 성립한다.

$n=4k+2, k \geq 1$, 일 때 본 소정리가 성립한다고 가정하자. 이제 $n=4(k+1)+2=4k+6$ 일 때 본 소정리가 성립함을 보이겠다. 큐브 Q_{n-1} 의 노드들 중 처음 5 비트가 같은 노드들로부터 인두스된 그래프를 수퍼노드라고 하자. 그러면 32개의 수퍼노드가 생긴다. 성질 2.1에 의해서 각 수퍼노드는 큐브 Q_{4k} 와 동형이다. 큐브 Q_{n-1} 의 노드들 중 0^{4k} 로 끝나는 노드를 수퍼노드의 시작점이라고 하자. 예를 들어 수퍼노드 00100의 시작점은 $00100 \cdot 0^{4k}$ 이다. 수퍼노드를 나타내는 5 비트 이진스트링이 서로 인접하면(정의 2.2 참조) 두 수퍼노드가 인접하고 그 역도 성립한다고 하자. 그러면 두 개의 인접한 수퍼노드에 속한 노드들로부터 인두스된 부그래프는 큐브 Q_{4k+1} 과 동형이다(성질 2.2 참조). 예를 들어 수퍼노드 00110과 00010은 서로 인접하므로 노드 집합 $00110 \cdot 0^{4k}$ 와 $00010 \cdot 0^{4k}$ 로부터 인두스된 부그래프는 큐브 Q_{4k+1} 과 동형이다.

트리 B_n 의 부그래프 중 B_n 의 루트를 포함하면서 B_5 와 동형인 그래프를 C 라고 하자. 그림 5의 트리를 B_n 이라고 보면 부그래프 C 는 점선으로 둘러싸여 있다. 부그래프 C 의 노드들은 수퍼노드의 시작점들에 대응시킨다. 예를 들어 부그래프 C 의 루트는 수퍼노드 00000의 시작점 $00000 \cdot 0^{4k}$ 에 대응시키고 루트의 오른쪽 자식은 수퍼노드 00100의 시작점 $00100 \cdot 0^{4k}$ 에 대응시킨다. 그러면 수퍼노드의 시작점 32개 중 31개에는 부그래프 C 의 노드 한 개가 할당되지만 수퍼노드 10000의 시작점

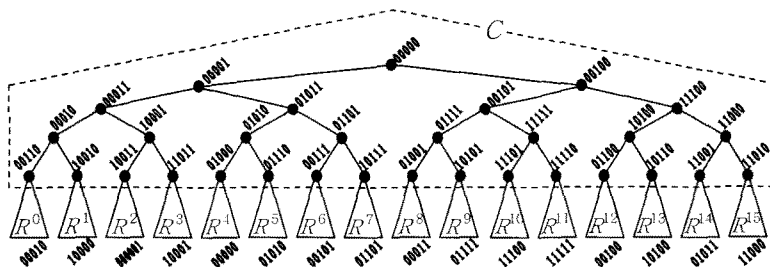


그림 5 $n=4k+2, k \geq 1$ 일 때 트리 B_n 의 큐브 Q_{n-1} 에 대한 임베딩

$10000 \cdot 0^{4k}$ 에는 부그래프 C 의 노드가 할당되지 않는다.

부그래프 C 의 단말노드에 매달려 있는 부트리 R^i $0 \leq i < 16$ 라 하자. 그림 5의 트리를 B_n 이라고 보면 부트리 R^i 는 삼각형으로 표시되어 있다. 부트리 R^i 의 루트는 부그래프 C 의 단말노드며 부트리 R^i 는 B_{4k-2} 와 동형이다. 각 R^i 의 루트에 붙어있는 5 비트는 어떤 슈퍼노드를 나타낸다고 볼 수 있는데 부트리 R^i 의 아래쪽에 붙어 있는 5 비트의 슈퍼노드와 서로 짝을 이룬다고 정의하겠다. 예를 들어 부트리 R^3 의 슈퍼노드 11011과 슈퍼노드 10001은 서로 짝을 이루고 부트리 R^{15} 의 슈퍼노드 11010과 슈퍼노드 11000은 서로 짝을 이룬다.

그림 5를 살펴보면 서로 짝을 이루는 슈퍼노드들은 서로 인접함을 알 수 있다. 서로 짝을 이루는 두 슈퍼노드에 속한 노드들로부터 유도된 부그래프를 P_i , $0 \leq i < 16$ 라고 할 때 부그래프 P^i 는 큐브 Q_{4k+1} 과 동형이다(성질 2.2 참조). 예를 들어 부큐브 P^3 는 슈퍼노드 11011과 슈퍼노드 10001로 구성되고 부큐브 P^{15} 는 슈퍼노드 11010과 슈퍼노드 11000으로 구성된다.

이제 부트리 R^i 를 부큐브 P^i 에 임베딩한다. 트리 B_{4k+2} 와 동형인 R^i 를 큐브 Q_{4k+1} 에 다음 두 조건을 만족하면서 임베딩할 수 있다고 이미 가정하였다. 첫째, 트리 R^i 의 루트는 노드 $0 \cdot 0^{4k}$ 에 대응된다. 둘째, 노드 $1 \cdot 0^{4k}$ 은 부하율 1로서 단말노드만 할당되고 나머지 모든 노드들은 부하율 2로서 단말노드와 내부노드가 한 개씩 할당된다. 부큐브 P^i 를 구성하는 두 슈퍼노드 중 그림 5에서 부트리 R^i 의 루트에 붙어 있는 슈퍼노드의 노드들을 $0 \cdot x^{4k}$ 로 보고 부트리 R^i 의 아래쪽에 붙어 있는 슈퍼노드의 노드들은 $1 \cdot x^{4k}$ 로 보자. 그러면 부큐브 P^i 의 노드들 중 한 노드만 트리 R^i 의 단말노드 한 개만 할당되고 나머지 노드들에는 부트리 R^i 의 단말노드와 내부노드가 한 개씩 할당된다.

부큐브 P^i 의 노드들 중 부트리 R^i 의 내부노드가 할당되지 않은 노드에는 이미 부트리 C 의 내부 노드가 할당되어 있음을 기억하자. 단 슈퍼노드 10000의 시작점에는 부트리 C 의 노드가 할당된 바가 없다. 슈퍼노드 10000은 부큐브 P^i 를 구성하는 두 슈퍼노드 중 하나이고 부큐브 P^i 에는 부트리 R^i 가 할당되었으므로 슈퍼노드 10000의 시작점 $10000 \cdot 0^{4k}$ 에는 부트리 R^i 의 단말노드만 할당되어 있음을 알 수 있다.

따라서 노드 $10000 \cdot 0^{4k}$ 는 부하율 1로서 트리 B_n 의 단말노드 하나만 할당되며 나머지 모든 노드들은 단말노드와 내부노드가 하나씩 할당된다. 또한 트리 B_n 의 루트는 노드 0^{n-1} 에 대응되어 있음도 기억하자. 결과적으로 $n=4(k+1)+2=4k+6$ 일 때 본 소정리가 성립한다. □

소정리 3.1로부터 다음과 같은 따름정리를 얻을 수 있

는데 이는 큐브 Q_{n-1} 의 노드 $0 \cdot 0^{n-2}$ 를 $1 \cdot 0^{n-2}$ 에 대응시키는 차원 보존 동형이 존재하기 때문이다.

따름정리 3.1 $n=4k+2$, $k \geq 1$, 일 때, 트리 B_n 을 Q_{n-1} 에 다음 두 가지 조건을 만족하면서 임베딩할 수 있다. 첫째, 트리 B_n 의 루트는 노드 $1 \cdot 0^{n-2}$ 에 대응된다. 둘째, 노드 $0 \cdot 0^{n-2}$ 는 부하율 1로서 단말노드만 할당되고 나머지 모든 큐브 노드들은 부하율 2로서 단말노드와 내부노드가 한 개씩 할당된다.

이제까지 트리 B_n 을 큐브 Q_{n-1} 에 임베딩함에 있어 $n=4k+2$ 인 경우를 다루었는데 이제부터 $n=4k$ 인 경우를 다루겠다.

소정리 3.2 $n=4k$, $k \geq 2$, 일 때, 트리 B_n 을 Q_{n-1} 에 다음 두 가지 조건을 만족하면서 임베딩할 수 있다. 첫째, 트리 B_n 의 루트는 노드 $0 \cdot 0^{n-2}$ 에 대응된다. 둘째, 노드 $1 \cdot 0^{n-2}$ 는 부하율 1로서 단말노드만 할당되고 나머지 모든 큐브 노드들은 부하율 2로서 단말노드와 내부노드가 한 개씩 할당된다.

증명. 정수 k 에 관한 수학적 귀납법으로 증명하겠다. $k=2$ 인 경우 그림 6과 같이 트리 B_8 을 큐브 Q_7 에 임베딩한다. 큐브 Q_7 의 노드 중 00으로 시작하는 노드들 $00 \cdot x^5$ 로부터 유도된 부그래프를 Q^{00} 이라 하자. 마찬가지로 01, 10, 11로 시작하는 노드들 $01 \cdot x^5$, $10 \cdot x^5$, $11 \cdot x^5$ 로부터 유도된 부그래프를 각각 Q^{01} , Q^{10} , Q^{11} 이라 하자. 그림 5에서 점선으로 표시된 네 개의 타원은 부그래프 Q^{00} , Q^{01} , Q^{10} , Q^{11} 을 의미한다.

그림 6에서 보듯이 트리 B_8 의 루트는 노드 $00 \cdot 00000$ 에 대응한다. 루트의 왼쪽과 오른쪽 자식은 각각 $00 \cdot 00010$ 과 $01 \cdot 00000$ 에 대응한다. 루트의 왼쪽 자식에 붙어 있는 두 개의 부트리를 각각 T^{LL} 과 T^{LR} 이

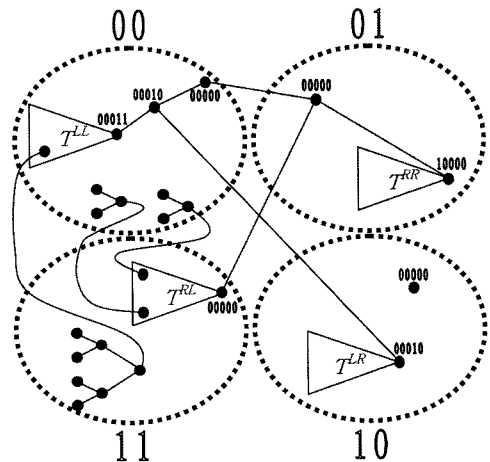
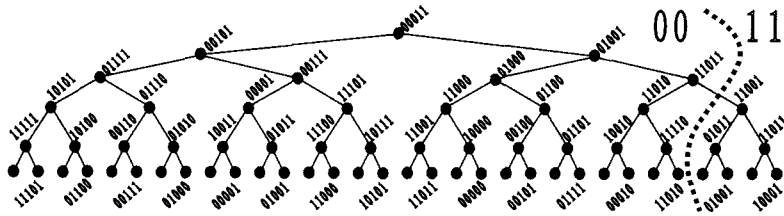
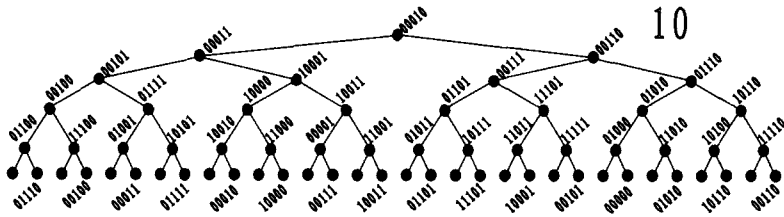


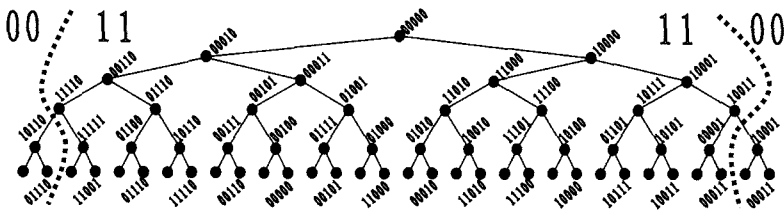
그림 6 트리 B_8 의 큐브 Q_7 에 대한 임베딩



(a) T^{LL} 의 임베딩



(b) T^{LR} 의 임베딩



(c) T^{RL} 의 임베딩

그림 7 부트리 T^{LL} , T^{LR} , T^{RL} 의 임베딩

라 하고 오른쪽 자식에 붙어 있는 두 개의 부트리를 각각 T^{RL} 과 T^{RR} 이라고 하자. 그러면 4개의 부트리 T^{LL} , T^{LR} , T^{RL} , T^{RR} 은 모두 B_5 과 동형이다. 부트리 T^{LL} , T^{LR} , T^{RL} , T^{RR} 은 각각 부그래프 Q^0 , Q^1 , Q^1 , Q^0 에 임베딩한다. 단 부트리 T^{LL} 의 노드들 중 7개는 부그래프 Q^1 의 노드에 대응시키고 부트리 T^{RL} 의 노드들 중 6개는 부그래프 Q^0 의 노드에 대응시킨다. 이제부터 네 개의 부트리 T^{LL} , T^{LR} , T^{RL} , T^{RR} 가 어떻게 임베딩되는지 그림 7을 통해 차례로 설명한다.

부트리 T^{LL} 의 임베딩은 그림 7(a)에 나타나 있다. 그림 7(a)의 각 트리 노드에는 5 비트 이진스트림이 붙어 있는데 큐브노드의 뒤쪽 5 비트를 의미한다. T^{LL} 의 오른쪽 7개의 노드는 부그래프 Q^1 의 노드에 대응하고 나머지 노드들은 부그래프 Q^0 의 노드에 대응한다. 예를 들어 부트리 T^{LL} 의 루트의 오른쪽 자식은 00·01001에 대응하고 맨 오른쪽 단말노드는 11·00011에 대응한다. 부트리 T^{LL} 의 루트가 00·00011에 대응함은 그림 7(a)와 그림 6에서 동시에 확인할 수 있다.

부트리 T^{LR} 의 임베딩은 그림 7(b)에 나타나 있다. 그

림 7(b)를 자세히 살펴보면 부그래프 Q^0 의 노드들 중 10·00000만 부하율 1로서 단말노드만 할당되고 나머지 노드들은 부하율 2로서 내부노드와 단말노드가 한 개씩 할당된다. 노드 10·00000에는 트리 B_5 의 어떤 내부노드도 할당되지 않는다. 부트리 T^{RL} 의 임베딩은 그림 7(c)에 나타나 있다. 부트리 T^{RR} 은 따름정리 3.1에 따라 부그래프 Q^1 에 임베딩한다. 그러면 부그래프 Q^0 의 모든 노드는 부하율 2로서 트리 B_5 의 내부노드와 단말노드가 한 개씩 할당된다.

결과적으로 큐브 Q_7 의 노드들 중 10·00000만 부하율 1로서 트리 B_5 의 단말노드만 할당되고 나머지 모든 노드들은 부하율 2로서 내부노드와 단말노드가 각각 한 개씩 할당된다. 따라서 $k=2$ 인 경우 본 소정리가 성립한다.

$n=4k$, $k \geq 2$ 일 때, 본 소정리가 성립한다고 가정하자. 이제 $n=4(k+1)$ 일 때 본 소정리가 성립함을 보이겠다. $n=4(k+1)$ 일 때 본 소정리가 성립함을 보이는 과정은 소정리 3.1의 증명의 후반부와 비슷하다. 그림 5를 이용하여 트리 B_{4k+4} 를 큐브 Q_{4k+3} 에 임베딩할 수 있음을 보인다. 소정리 3.1의 증명과 다른 점은 각 수퍼노드가 Q_{4k-2}

와 동형이고 부트리 R^i 가 B_{4k} 와 동형이라는 점이다. 따라서 두 개의 수퍼노드로 구성된 부그래프 P^i , $0 \leq i < 16$ 는 큐브 Q_{4k-1} 과 동형이다.

결과적으로 수퍼노드 10000의 시작점 $10000 \cdot 0^{4k-2}$ 는 부하율 1로서 단말노드만 할당되며 나머지 모든 노드들은 부하율 2로서 단말노드와 내부노드가 한 개씩 할당된다. 또한 트리 B_n 의 루트는 노드 $0 \cdot 0^{n-2}$ 에 대응함도 기억하자. 따라서 $n=4(k+1)$ 일 때 본 소정리가 성립한다. □

소정리 3.2로부터 다음과 같은 따름정리를 얻을 수 있는데 이는 큐브 Q_{n-1} 의 노드 $0 \cdot 0^{n-2}$ 를 노드 $1 \cdot 0^{n-2}$ 에 대응시키는 차원 보존 동형이 존재하기 때문이다.

따름정리 3.2 $n=4k$, $k \geq 2$, 일 때, 트리 B_n 을 Q_{n-1} 에 다음 두 가지 조건을 만족하면서 임베딩할 수 있다. 첫째, 트리 B_n 의 루트는 노드 $1 \cdot 0^{n-2}$ 에 대응된다. 둘째, 노드 $0 \cdot 0^{n-2}$ 는 부하율 1로서 단말노드만 할당되고 나머지 모든 노드들은 부하율 2로서 단말노드와 내부노드가 한 개씩 할당된다.

이제까지 트리 B_n 을 Q_{n-1} 에 임베딩함에 있어 n 이 짝수인 경우를 다루었고 이제부터 n 이 홀수인 경우를 포함하여 다루겠다.

소정리 3.3 트리 B_n , $n \neq 4$, 을 Q_{n-1} 에 다음 조건을 만족하면서 임베딩할 수 있다. 한 큐브노드는 부하율 1로서 단말노드만 할당되고 나머지 모든 큐브노드들은 부하율 2로서 단말노드와 내부노드가 한 개씩 할당된다.

증명. n 이 2와 3인 경우엔 그림 3과 그림 4와 같이 임베딩하고 n 이 5인 경우엔 그림 8과 같이 임베딩하면 본 소정리가 성립한다.

n 이 6이상의 짝수인 경우엔 소정리 3.1과 소정리 3.2에 의해서 본 소정리가 성립한다. n 이 7이상의 홀수인 경우, 그림 9와 같이 트리 B_n 을 큐브 Q_{n-1} 에 임베딩한다. 그림 9에서 0이라고 붙어 있는 점선 타원은 0으로 시작하는 노드들 $0 \cdot x^{n-2}$ 로부터 인두스된 부그래프 Q^0 를 나타내고 1이라고 붙어 있는 점선 타원은 1로 시작하는 노드들 $1 \cdot x^{n-2}$ 로부터 인두스된 부그래프 Q^1 를 나타낸다. 부그래프 Q^0 와 Q^1 는 큐브 Q_{n-2} 와 동형이다. 예를 들어 0이 붙어 있는 점선 타원 안의 점 $10 \dots 0$ 은 노드 $0 \cdot 10^{n-3}$ 을 나타내고 1이 붙어 있는 점선 타원

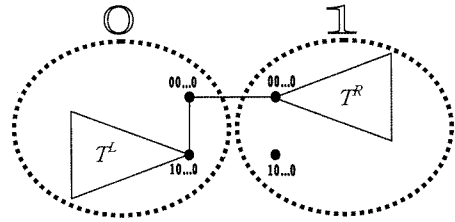


그림 9 n 이 홀수일 때 트리 B_n 의 큐브 Q_{n-1} 에 대한 임베딩

안의 점 $00 \dots 0$ 은 노드 $1 \cdot 00^{n-3}$ 을 나타낸다. 그림 9와 같이 트리 B_n 의 루트를 $0 \cdot 00^{n-3}$ 에 대응시키고 왼쪽 부트리 T^L 과 오른쪽 부트리 T^R 을 부큐브 Q^0 와 Q^1 에 각각 임베딩한다.

왼쪽 부트리 T^L 을 부큐브 Q^0 에 임베딩할 때 따름정리 3.1과 따름정리 3.2를 이용하여 루트를 노드 $0 \cdot 10^{n-3}$ 에 대응시키고 노드 $0 \cdot 00^{n-3}$ 에는 내부노드가 할당되지 않게 한다. 오른쪽 부트리 T^R 을 부큐브 Q^1 에 임베딩할 때 소정리 3.1과 소정리 3.2를 이용하여 루트를 노드 $1 \cdot 00^{n-3}$ 에 대응시키고 노드 $1 \cdot 10^{n-3}$ 에는 내부노드가 할당되지 않게 한다.

왼쪽 부트리 T^L 을 부큐브 Q^0 에 임베딩할 때 내부노드가 할당된 바 없는 노드 $0 \cdot 00^{n-3}$ 에는 트리 B_n 의 루트가 할당된다. 결과적으로 노드 $1 \cdot 10^{n-3}$ 는 부하율 1로서 단말노드만 할당되고 나머지 모든 노드들은 부하율 2로서 단말노드와 내부노드가 한 개씩 할당된다. 따라서 n 이 7이상의 홀수인 경우에도 본 소정리가 성립한다. □

소정리 3.3은 $n=4$ 인 경우에는 성립하지 않는다. 만약 트리 B_4 를 큐브 Q_3 에 임베딩할 때 한 큐브노드는 부하율 1로서 단말노드만 할당되고 나머지 모든 큐브노드들은 부하율 2로서 단말노드와 내부노드가 한 개씩 할당된다고 해보자. 그러면 내부 노드들이 모두 다른 노드에 대응되고 단말노드들도 모두 다른 노드에 대응되어야 한다. 또한 트리 B_4 의 루트는 어떤 단말노드 v 와 같은 큐브노드에 대응되어야 한다. 이는 루트에서 단말노드 v 까지 경로상의 모든 내부노드가 서로 다른 큐브노드에 대응해야 함을 의미한다. 그것은 길이가 3인 사이클이 Q_3 에 존재해야 함을 의미하기도 한다. 그러나 길이가 3

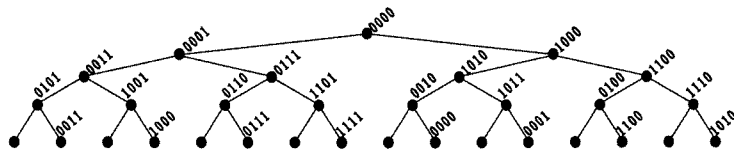


그림 8 트리 B_5 의 큐브 Q_4 에 대한 임베딩

인 사이클이 Q_3 에 존재하지 않는다. 따라서 트리 B_4 를 큐브 Q_3 에 임베딩할 때 한 큐브노드는 단말노드만 할당되고 나머지 모든 큐브노드들은 단말노드와 내부노드가 한 개씩 할당되게 할 수 없다.

이제까지 트리 B_n 을 큐브 Q_{n-1} 에 임베딩하는 방법을 제시하였다. 이제 이를 확장하여 트리 B_n 을 큐브 Q_m , $m < n$, 에 임베딩하는 방법을 제시하겠다.

정리 3.1 트리 B_n 을 Q_m 에 부하율 2^{n-m} 로 임베딩할 수 있다($n > m \geq 1$).

증명. 먼저 $m \neq 3$ 인 경우만 고려해 보자. B_n 은 반드시 다음과 같은 두 조건을 만족하는 부그래프 S 를 가진다: 첫째, 부그래프 S 는 B_n 의 루트를 포함한다; 둘째, 부그래프 S 는 트리 B_{m+1} 과 동형이다. 그러면 부그래프 S 를 Q_m 에 소정리 3.3과 같이 임베딩할 수 있다. 부그래프 S 에 속하지 않는 노드 u 가 B_n 에 존재할 경우엔 노드 u 의 조상 중 부그래프 S 의 단말노드인 노드와 똑같이 대응시킨다. 그러면 B_n 을 Q_m 에 부하율 2^{n-m} 로 임베딩할 수 있다. 이때 트리의 같은 레벨 노드들은 큐브 Q_m 에 골고루 분포된다.

이제부터 $m=3$ 인 경우를 다루겠다. $n=4$ 인 경우엔 그림 10과 같이 임베딩하면 부하율 2로 임베딩할 수 있다. 그림 10을 살펴보면 앞노들이 존재하는 네번째 레벨을 제외하고 같은 레벨 노드들이 큐브 Q_3 에 골고루 분포됨을 알 수 있다.

$m=3$ 이고 $n \geq 5$ 인 경우에 B_n 은 반드시 다음과 같은 두 조건을 만족하는 부그래프 S' 를 가진다: 첫째, 부그래프 S' 은 B_n 의 루트를 포함한다; 둘째, 부그래프 S' 은 트리 B_5 과 동형이다. 부그래프 S' 를 Q_3 에 그림 11과 같이 부하율 4로 임베딩한다. 그림 11을 자세히 살펴보면 각 큐브노드에 2개씩의 단말노드가 할당되어 있음을 알 수 있다. 부그래프 S' 에 속하지 않는 노드 u 가 트리 B_n 에 존재할 경우엔 노드 u 의 조상 중 부그래프 S' 의 단말노드인 노드와 똑같이 대응시킨다. 그러면 B_n 을 Q_m 에 부하율 2^{n-m} 로 임베딩할 수 있다. 이 때 세번째와 네번째 레벨을 제외한 모든 레벨에 대해서 같은 레벨 노드들이 큐브 Q_m 에 골고루 분포된다. □

정리 3.1에서 트리 B_n 의 노드 개수를 N 이라 하고 교차큐브 Q_m 의 노드 개수를 M 이라 하면 다음과 같은 따름정리를 얻을 수 있다.

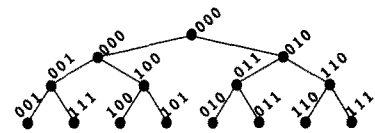


그림 10 트리 B_4 의 큐브 Q_3 에 대한 임베딩

따름정리 3.3. N -노드 완전이진트리를 M -노드 교차큐브에 부하율 $\lceil N/M \rceil$ 로 임베딩할 수 있다($N > M \geq 2$).

4. 결론

본 논문에서는 N -노드 완전이진트리를 M -노드 교차큐브에 부하율 $\lceil N/M \rceil$, 연장을 1로 임베딩하는 방법을 제시하였다($N > M \geq 2$). 본 임베딩 방법은 부하율과 연장을 측면에서 최적이고 같은 레벨의 트리 노드들을 교차큐브의 노드들에 골고루 분포시키는 특징도 가지고 있어($M \neq 8$) 레벨 단위로 진행되는 트리 구조 알고리즘에 대해서도 적용성이 뛰어나다.

완전이진트리에 국한되지 않는 임의의 트리나 caterpillar를 교차큐브에 임베딩하는 문제, 동적으로 변하는 트리를 임베딩하는 문제[16], 고장난 노드를 포함하는 교차큐브에 트리를 임베딩하는 문제 등은 향후 과제로 남아 있다.

참고 문헌

- [1] C.-P. Chang, T.-Y. Sung, and L.-H. Hsu, "Edge congestion and topological properties of crossed cubes," IEEE Trans. Parallel and Distributed Systems, Vol.11, No.1, pp. 64-80, Jan. 2000.
- [2] K. Efe, "A variation on the hypercube with lower diameter," IEEE Trans. Computers, Vol.40, No.11, pp. 1312-1316, Nov. 1991.
- [3] K. Efe, "The crossed cube architecture for parallel computing," IEEE Trans. Parallel and Distributed Systems, Vol.3, No.5, pp. 513-524, Sept.-Oct. 1992.
- [4] K. Efe, P.K. Blachwell, W. Slough, and T. Shiau, "Topological properties of the crossed cube architecture," Parallel Computing, Vol.20, pp. 1763-1775, 1994.
- [5] W.-T. Huang, Y.-C. Chuang, J.M. Tan, and L.-H. Hsu, "On the fault-tolerant hamiltonicity of faulty crossed cubes," IEICE Trans. Fundamentals, Vol.

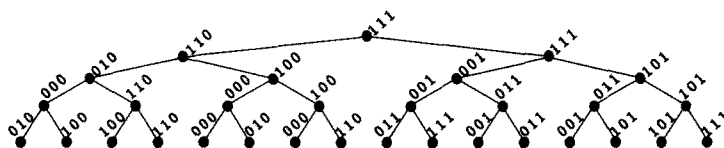


그림 11 트리 B_5 의 큐브 Q_3 에 대한 임베딩

- E85-A, No.6, pp. 1359-1370, Jun. 2002.
- [6] M.-C. Yang, T.-K. Li, J.J.M. Tan, and L.-H. Hsu, "Fault-tolerant cycle-embedding of crossed cubes," *Information Processing Letters*, Vol.88, No.4, pp. 149-154, Nov. 2003.
 - [7] P. Kulasinghe and S. Bettayeb, "Embedding binary trees into crossed cubes," *IEEE Trans. Computers*, Vol.44, No.7, pp. 923-929, Jul. 1995.
 - [8] J. Fan, X. Jia, "Embedding meshes into crossed cubes," *Information Sciences* Vol.177, No.15, pp. 3151-3160, 2007.
 - [9] Q. Dong, X. Yang, J. Zhao and Y.Y. Tang, "Embedding a family of disjoint 3D meshes into a crossed cube," *Information Sciences*, In Press, 2008.
 - [10] J. Fan, X. Jia, and X. Lin, "Complete path embeddings in crossed cubes," *Information Sciences* Vol. 176, No.22, pp. 3332-3346, 2006.
 - [11] J. Fan, X. Lin, and X. Jia, "Optimal path embedding in crossed cubes," *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, Vol.16, No.12, pp. 1190-1200, 2005.
 - [12] J.-M. Xu, M. Ma, and M. Lv, "Paths in mobius cubes and crossed cubes," *Information Processing Letters*, Vol.97, No.3, pp. 94 - 97, 2006.
 - [13] J. Fan and X. Jia, "Edge-pancyclicity and path-embeddability of bijective connection graphs," *Information Sciences*, Vol.178, No.2, pp. 340-351, 2008.
 - [14] J. Fan, X. Lin, and X. Jia, "Node-pancyclicity and edge-pancyclicity of crossed cubes," *Information Processing Letters*, Vol.93, pp.133-138, Feb. 2005.
 - [15] H.-S. Hung, J.-S. Fu, G.-H. Chen, "Fault-free hamiltonian cycles in crossed cubes with conditional link faults," *Information Sciences*, Vol.177, No.24, pp. 5664-5674, 2007.
 - [16] V. Hcun and E.W. Mayr, "Optimal dynamic embeddings of complete binary trees into hypercubes," *Journal of Parallel and Distributed Computing*, Vol.61, Issue 8, pp. 1110-1125, Aug. 2001.



김 숙 연

1991년 연세대학교 전산학과(학사). 1993년 한국과학기술원(KAIST) 전산학과(공학석사). 1998년 한국과학기술원(KAIST) 전산학과(공학박사). 1998년 3월~2004년 2월 한국전자통신 연구원(ETRI) 선임연구원. 2004년 3월~현재 환경대학교 컴퓨터공학과 교수. 관심분야는 병렬처리, 그래프 임베딩, 상호연결망, 네트워크 등