

# 유동유체에 의한 파이프의 동적안정성에 미치는 외부감쇠와 말단질량의 영향

## Effect of External Damping and Tip Mass on Dynamic Stability of Pipes Conveying Fluid

김 효 준\* · 류 봉 조† · 정 승 호\*\*

H. J. Kim, B. J. Ryu and S. H. Jung

(2009년 3월 4일 접수 ; 2009년 5월 7일 심사완료)

**Key Words :** Dynamic Stability(동적안정성), External Damping(외부감쇠), Tip Mass(말단질량), Pipes Conveying Fluid(유동 유체 파이프)

### ABSTRACT

The paper presents the influences of the external damping and the tip mass on dynamic stability of a vertical cantilevered pipe conveying fluid. In general, real pipe systems may have some valves and attached mechanical parts, which can be regarded as attached lumped masses and support-dampers. The support-dampers can be assumed as viscous dampers. The equations of motion are derived by energy expressions using extended Hamilton's principle, and some numerical results using Galerkin's method are presented. Critical flow velocities and stability maps of the pipe with external dampers and tip mass are obtained for various tip mass ratios, external damping coefficients and positions of the viscous dampers.

### 1. 서 론

내부에 유동유체가 흐르는 파이프의 동적안정성 및 진동에 관한 연구는 Ashley와 Haviland<sup>(1)</sup>에 의한 연구를 초기연구의 시초로 일컫는데, 이들은 Trans-Arabian 송유관의 진동문제를 연구하는 시도를 하였다. Feodos'ev<sup>(2)</sup>는 유동유체가 내부에 흐르는 파이프에 대한 정확한 선형 운동방정식을 유도하고, 파이프의 동역학적 문제를 병행하여 연구하였다.

이와 같이 초기의 연구들은 파이프 외부에 어떤 것도 부착되지 않은 파이프만의 운동방정식의 유도나 임계유속을 구하는 수치해석적 및 실험적 연구들이 대부분 이었다

그 후, 내부 유동유체에 의한 파이프의 동역학과 진동에 관한 이론 및 실험의 병행 연구는 Benjamin<sup>(3,4)</sup>의 의해 이루어졌는데 그는 2자유도 분절된 송수관의 동적안정성에 관한 연구를 하였고, Gregory와 Paidoussis<sup>(5,6)</sup>는 유체가 흐르는 외팔 파이프의 동적안정성과 진동에 대한 이론과 실험적 연구를 하였다.

비보존계 문제의 하나로 볼 수 있는 내부 유동유체에 의한 외팔 파이프의 동적 안정성과 진동에 관한 문제는 현재까지 많은 연구가 진행되어져 왔으며, 초기의 대부분의 연구들은 파이프의 진동현상과 동적안정성에 초점이 맞추어졌다. 그 후, 계를 구성하는 시스템 파라미터가 파이프의 동적안정성에 미치는 효과에 대한 연구가 이루어졌다.

Hill과 Swanson<sup>(7)</sup>은 파이프에 집중질량이 존재하는 경우, 이러한 집중질량이 파이프의 동적 안정성에 미치는 효과에 대해서 처음 연구하였으며, 이들은 파이프에 부가 집중질량이 복수로 존재하는 경우에 대해서도 처음의 연구를 확장하여 연구하였다.

† 교신저자; 정회원, 한밭대학교 기계공학부  
E-mail : bjryu701@hanbat.ac.kr  
Tel : (042)821-1159, Fax : (042)821-1587

\* 정회원, 강원대학교 기계자동차공학부

\*\* 정회원, 한국원자력연구소

그 후, Sugiyama 등<sup>(8)</sup>은 비보존계의 안정성 문제에 있어서 중요한 역할을 하는 것으로 알려진 내부감쇠의 효과를 고려하여, 이론과 실험을 병행하여 연구하였다. Becker<sup>(9)</sup>는 수평 외팔 파이프의 자유단만이 병진 스프링으로 지지된 경우 스프링 상수의 변화가 계의 동적안정성에 미치는 영향에 대해 연구하였고, Edelstein과 Chen<sup>(10)</sup>은 수평 외팔파이프에 있어서 중간 지지점이 파이프의 안정성에 미치는 영향에 대하여 조사하였다. Sugiyama와 그의 공동연구자들<sup>(11)</sup>은 2자유도 분절된 수평 파이프를 모델로 하여 외부감쇠가 파이프의 안정성에 미치는 효과를 이론적으로 예측하고 실험적으로 검증하였다. 또한, Sugiyama와 그의 공동연구자들<sup>(12)</sup>은 수평 파이프에 대해 탄성 스프링 지지와 집중질량이 계의 동적안정성에 미치는 복합효과에 대하여도 연구하였다. 그 후, Sugiyama 등<sup>(13)</sup>은 탄성 스프링 지지되고 집중질량을 갖는 파이프의 동적안정성 연구, 부가 질량과 감쇠를 갖는 파이프의 안정성 문제, 물속에 잠겨있는 배관계의 진동과 동적안정성 연구를 하였다. 이러한 연구는 계속되어 Ryu와 그의 공동연구자들<sup>(14,15)</sup>은 내부유동유체가 흐르는 파이프의 고유치 분기와 플러터 모드의 형상에 대한 연구뿐만 아니라 말단질량을 갖는 외팔 송수관의 고유치 분기와 플러터 모드에 대한 연구를 하였고, 그 후, Ryu 등<sup>(16)</sup>은 탄성기초위에 놓인 파이프의 진동과 동적안정성 문제를 다루었다.

위의 연구들의 대부분은 내부유동 유체가 흐르는 파이프만의 안정성 문제라든지 파이프에 부착된 이산 스프링지지 및 분포스프링지지, 부가 집중질량과 내부감쇠가 파이프의 동적안정성에 미치는 영향 등을 살펴본 것인데, 실제로 파이프 등의 배관계는 경우에 따라서는 밸브를 갖거나 진동을 감소시키기 위해 외부에 탄성지지 또는 감쇠기를 설치하는 경우도 있다.

이 논문에서는 부가질량과 외부감쇠를 갖는 내부유동유체에 의한 파이프의 동적안정성과 진동문제를 부가질량의 크기, 감쇠기의 위치변화 및 감쇠상수의 변화에 따라 연구하는데 목적이 있다.

## 2. 이 론

### 2.1 수학적 모델 및 지배방정식

내부에 유체가 흐르고, 임의의 위치  $e_1$ 과 끝단에 외부감쇠기를 가지며, 끝단에 집중질량  $M$ 을 갖는 외팔 수직 파이프의 수학적 모델에 대한 그림은 Fig. 1과 같고, 운동방정식을 유도하기 위하여 에너지 표현식을 사용하면 다음과 같다.

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L m_p \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L m_f \left\{ U^2 + 2U \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t \cdot \partial x} \right) + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right\} dx + \frac{1}{2} M \left( \frac{\partial w(L,t)}{\partial t} \right)^2 \quad (1)$$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L mg(L-x) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} Mg \int_0^L \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \quad (2)$$

$$\delta W_{nc,id} = - \int_0^L E^* I \left( \frac{\partial^3 w}{\partial t \partial x^2} \right) \delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx \quad (3)$$

$$\delta W_{c,ed} = - C_0 \frac{\partial w(L,t)}{\partial t} \delta w(L,t) - \int_0^L C_1 \frac{\partial w}{\partial t} \delta(x - e_1) \delta w dx \quad (4)$$

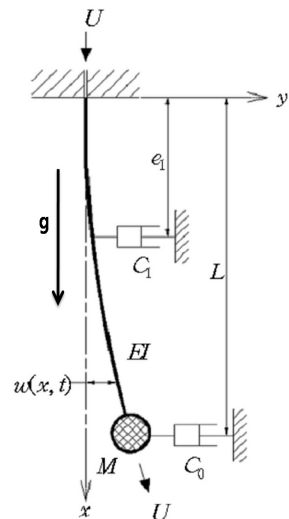


Fig. 1 Mathematical model of a pipe conveying fluid with tip mass and external dampers

$$\delta W_f = -m_f U \left( \frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} \right) \delta w \Big|_{x=L} + m_f U^2 \int_0^L \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \delta \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx + \varphi \left\{ \frac{\partial w}{\partial \xi} - (1-\xi) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right\} + \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \gamma \frac{\partial^5 w}{\partial \xi^4 \partial \tau} + \nu_1 \frac{\partial w}{\partial \tau} \delta(\xi - \xi_1) - \bar{M} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0 \quad (5)$$

식 (1)은 운동에너지에 관한 식으로 각 항들은 순서대로 파이프, 유체 그리고 말단질량의 병진운동에 의한 운동에너지를 나타내며,  $m_p$ 와  $m_f$ 는 각각 파이프와 유체의 단위길이당 질량을 나타낸다. 식 (2)는 포텐셜에너지에 관한 식으로 첫째 항은 파이프의 굽힘에 의한 탄성 포텐셜에너지, 둘째 항은 유체와 파이프의 중력 포텐셜에너지, 셋째 항은 말단질량의 중력 포텐셜에너지를 나타낸다. 또한,  $E$ 는 파이프의 탄성계수,  $I$ 는 단면의 2차모멘트,  $m$ 은 단위 길이당 파이프와 유체의 질량,  $g$ 는 중력가속도를 나타낸다.

식 (3)에서 식 (5)는 가상일들에 관한 것으로, 식 (3)은 재료의 내부감쇠에 의한 가상일을 나타내고, 식 (4)는 외부점성감쇠에 의한 가상일, 식 (5)는 파이프의 자유단에서 유속  $U$ 에 의한 가상일을 나타낸다. 또한,  $E^*$ 는 점성저항계수,  $C_0$ 와  $C_1$ 은 각각 파이프의 말단과  $e_1$ 위치에서의 외부 점성감쇠계수를 나타낸다.

식 (1)에서 식 (5)를 확장된 해밀톤 원리

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta V + \delta W_{nc,id} + \delta W_{c,ed} + \delta W_f) dt = 0 \quad (6)$$

에 대입하고 변분을 정리한 후, 계산상의 편의를 위하여 다음과 같은 무차원화된 파라미터들과 좌표들

$$\beta = \frac{m_f}{m}, u = UL \sqrt{\frac{m_f}{EI}}, \varphi = \frac{mgL^3}{EI}, \alpha = \frac{M}{mL}, \gamma = \frac{E^*}{EL^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}, \nu_0 = \frac{C_0 L}{\sqrt{Elm}}, \nu_1 = \frac{C_1 L}{\sqrt{Elm}}, \bar{M} = \frac{MgL^2}{EI}, \xi = \frac{x}{L}, \xi_1 = \frac{e_1}{L}, \tau = \frac{t}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad (7)$$

을 도입하면 다음과 같은 무차원화된 운동방정식과 경계조건식을 얻게 된다.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + 2\beta^2 u \frac{\partial^2 w}{\partial \tau \cdot \partial \xi} + u^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}$$

$$\frac{\partial^2 w(1,\tau)}{\partial \xi^2} + \gamma \frac{\partial^3 w(1,\tau)}{\partial \xi^2 \partial \tau} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial^3 w(1,\tau)}{\partial \xi^3} + \gamma \frac{\partial^4 w(1,\tau)}{\partial \xi^3 \partial \tau} - \nu_0 \frac{\partial w(1,\tau)}{\partial \tau} - \bar{M} \frac{\partial w(1,\tau)}{\partial \xi} - \alpha \frac{\partial w(1,\tau)}{\partial \tau} = 0 \quad (10)$$

$$w(0,\tau) = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial w(0,\tau)}{\partial \xi} = 0 \quad (12)$$

이제 식 (8)의 해  $w(\xi,\tau)$ 를 내부 유동유체가 없는 경우의 한단고정-타단자유의 경계조건을 만족시키는 고유함수

$$\phi_j(\xi) = \cosh s_j \xi - \coss_j \xi - \sigma_j (\sinh s_j \xi - \sins_j \xi) \quad (13)$$

를 이용하여 다음과 같이 가정한다.

$$w(\xi,\tau) = \sum_{j=1}^{\infty} q_j(\tau) \phi_j(\xi) \quad (14)$$

여기서,  $s_j$ 는 외팔보의  $j$ 번째 고유치(eigenvalue)이며,  $\sigma_j$ 는 다음과 같다.

$$\sigma_j = \frac{\sinh s_j - \sins_j}{\cosh s_j + \coss_j} \quad (15)$$

식 (14)로 가정된 해를 식 (8)에 대입하고  $j=1$ 부터 유한개의 항  $q$ 까지 Galerkin 적분을 행한 후, 행렬형태의 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$[A]\{\ddot{q}\} + [B]\{\dot{q}\} + [C]\{q\} = \{0\} \quad (16)$$

과 같고, 각 행렬  $[A],[B],[C]$ 의 성분은 다음과 같다.

$$A_{ij} = (\phi_i, \phi_j) + \alpha \phi_i(1) \phi_j(1) \quad (17)$$

$$B_{ij} = 2u\beta^2 (\phi_i, \phi_j') + \gamma (\phi_i, \phi_j^{iv}) \quad (18)$$

$$\begin{aligned}
 & + \nu_1 \phi_i(\xi_1) \phi_j(\xi_1) + \nu_0 \phi_i(1) \phi_j(1) \\
 C_{ij} = & (u^2 - \xi - \bar{M})(\phi_i, \phi_j'') + \psi(\phi_i, \phi_j') \\
 & + \psi(\phi_i, \xi \phi_j'') + (\phi_i, \phi_j^{iv}) \\
 & + \bar{M} \phi_i(1) \phi_j'(1)
 \end{aligned} \tag{19}$$

여기서,  $(\phi_i, \phi_j) = \int_0^1 \phi_i(\xi) \phi_j(\xi) d\xi$ 이다.

식 (16)은 고유치 문제를 풀기위하여

$$\{Z\} = [P]\{Z\} \tag{20}$$

로 변환되며, 여기서,

$$\begin{aligned}
 \{Z\} &= \begin{pmatrix} \dot{q} \\ q \end{pmatrix}, \quad [P] = \begin{bmatrix} -[V] & -[W] \\ [I] & [0] \end{bmatrix} \\
 [V] &= [A]^{-1}[B], \quad [W] = [A]^{-1}[C]
 \end{aligned} \tag{21}$$

이고,  $[I]$ 는 단위행렬을 나타낸다.

이제 식 (20)의 해의 거동은 고유치  $\lambda_i$ 에 의해 지배되며 일반적으로 감쇠가 존재하는 경우의  $\lambda_i$ 는 다음과 같이 복소수 형태로 표현된다.

$$\lambda_i = \alpha_i \pm i\omega_i \tag{22}$$

### 2.2 안정성 해석

파이프의 안정성은 식 (22)의 고유치  $\lambda_i$ 의 실수부분  $\alpha_i$ 의 부호에 의해 결정된다.  $\alpha_i < 0$ 이면, 송수관은 안정하고,  $\alpha_i > 0$ 이면 불안정이 되는데, 이 경우  $\omega_i \neq 0$ 일때는 플러터 형태의 불안정,  $\omega_i = 0$ 일때는 발산형태의 불안정으로 된다.

### 3. 수치해석 결과 및 검토

외부감쇠와 말단질량을 갖고 유동유체에 의한 외팔 수치파이프의 동적안정성에 관한 수치해석 결과는 Galerkin의 모드합 방법에 의해 얻어졌으며, 수치해를 위한 파이프의 물성치는 Table 1에 나타난 바와 같다.

수치해의 결과를 논하기에 앞서 Fig. 1의 감쇠기를 다음과 같이 명명한다. 먼저 위치이동이 가능한 감쇠기는 중간감쇠기(intermediate damper)라 하고 파이프의 자유단에 부착된 감쇠기는 말단 감쇠기라

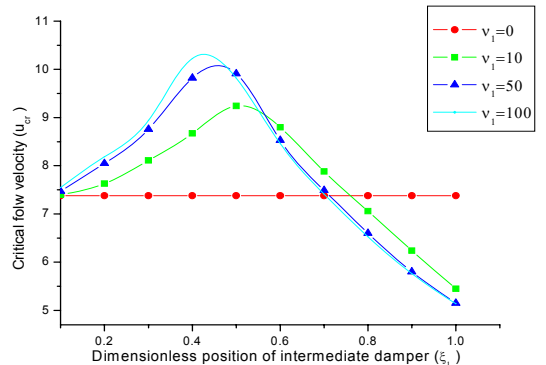
한다.

Fig. 2는 말단질량이 없고 말단감쇠기도 없는 경우, 중간감쇠기의 감쇠상수와 위치변화에 따른 임계유속 값을 보여주는 그림이다. 이 그림에서 알 수 있는 것은 다음과 같다. 중간감쇠기의 고정된 감쇠상수 값에서 중간감쇠기의 위치가 파이프의 고정단으로부터 자유단쪽으로 이동됨에 따라 임계유속 값이  $\xi_1=0.5$  부근까지 증가했다가 감소되는 현상을 보이며, 최대 임계유속 값을 나타내는 중간감쇠기의 위치는 감쇠상수 값에 관계없이 약  $\xi_1=0.4 \sim 0.5$ 부근이다.

Fig. 3은 말단질량이 없고 말단감쇠기는 있는 경우로서, 이 경우도 Fig. 2에서와 유사하게 중간감쇠기의 고정된 감쇠상수 값에 대해 중간감쇠기의 위치가 파이프의 고정단에서 자유단쪽으로 이동됨에 따라 임계유속 값이 증가했다가 감소되지만, 최대 임계유속 값은  $\xi_1=0.6$ 부근에서 나타남을 알 수 있다. 또한, 중간감쇠기의 어떤 위치에서나 중간감쇠기의 감쇠상수가 증가됨에 따라 임계유속 값이 증가됨을 알 수 있다.

**Table 1** Details of the pipe for numerical analysis

	Materials	Silicon rubber
Pipe	Length $L$	545 mm
	Outer diameter $d_0$	13.5 mm
	Inner diameter $d_i$	6.7 mm
	Young's modulus $E$	9.72 MPa
	Viscous damping coefficient $E^*$	$1.723 \times 10^5$ N·sec/m <sup>2</sup>
	Pipe mass per unit length $m_p$	0.139 kg/m



**Fig. 2** Stability map of the pipe without tip mass and tip damper( $\alpha=0.0, \nu_0=0.0$ )

Fig. 4와 Fig. 5는 말단질량이 공히 존재하는 경우로서 Fig. 4는 말단감쇠기가 없는 경우, Fig. 5는 말

단감쇠기가 있는 경우이다. Fig. 4와 Fig. 5에서 우선적으로 알 수 있는 것은 고정된 중간감쇠기의 감쇠상수 값에 있어 중간감쇠기의 위치가 자유단쪽으로 이동됨에 따라 임계유속 값이 증가했다가 감소되는 것이며, 이러한 현상은 말단질량이 없는 경우인 Fig. 2와 Fig. 3에서의 경향과 유사하다. 또한 말단감쇠기의 유무에 관계없이 최대 임계유속을 유발하는 중간감쇠기의 위치  $\xi_1$ 은 약  $\xi_1=0.5\sim 0.6$ 부근임을 알 수 있다. 한편, Fig. 5의 말단감쇠기가 존재하는 경우 고정된 중간감쇠기의 위치에 있어 중간감쇠기의 감쇠상수가 증가함에 따라 임계유속 값은 증가됨을 알 수 있다.

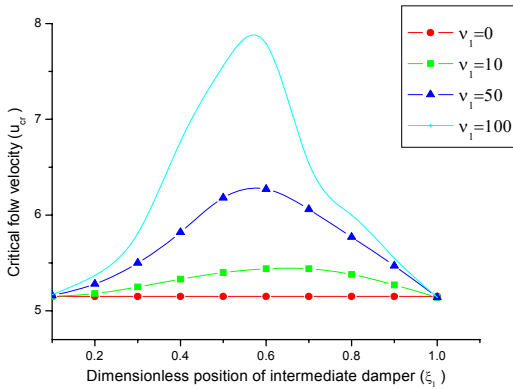


Fig. 3 Stability map of the pipe without tip mass and with tip damper( $\alpha=0.0, v_0=50.0$ )

#### 4. 결 론

내부에 유체가 흐르고, 외부감쇠기와 말단질량을 갖는 외팔 수직파이프의 동적안정성에 관한 수치해석 결과 다음과 같은 결론을 얻었다. 첫째, 말단감쇠기의 유무에 관계없이, 최대 임계유속 값을 나타내는 중간감쇠기의 위치  $\xi_1$ 은 말단질량이 없는 경우는 약  $\xi_1=0.4\sim 0.6$ 부근, 말단질량이 있는 경우는 약  $\xi_1=0.5\sim 0.6$ 부근이다. 둘째, 말단질량의 유무에 관계없이, 말단감쇠기의 존재는 중간감쇠기의 동일한 위치와 감쇠상수 값에 대해 임계유속 값을 감소시킨다. 셋째, 말단질량의 유무에 관계없이, 말단감쇠기가 존재하는 경우, 고정된 중간감쇠기의 위치에 대해 중간감쇠기의 감쇠상수가 증가됨에 따라 임계유속 값은 증가된다.

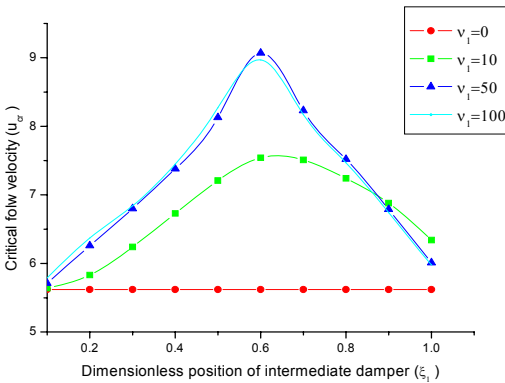


Fig. 4 Stability map of the pipe with tip mass and without tip damper( $\alpha=0.5, v_0=0.0$ )

#### 참 고 문 헌

- (1) Ashley, H. and Haviland, G., 1950, "Bending Vibrations of a Pipe Line Containing Flowing Fluid," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 17, pp. 229~232.
- (2) Feodos'ev, V. P., 1951, "Vibrations and Stability of a Pipe when Liquid Flows through It," *Inzhenernyi Sbornik*, Vol. 10, pp. 169~170.
- (3) Benjamin, T. B., 1961, "Dynamics of a System of Articulated Pipes Conveying Fluid (I. Theory)," *Proceedings of the Royal Society, Series A*, Vol. 261, pp. 457~486.

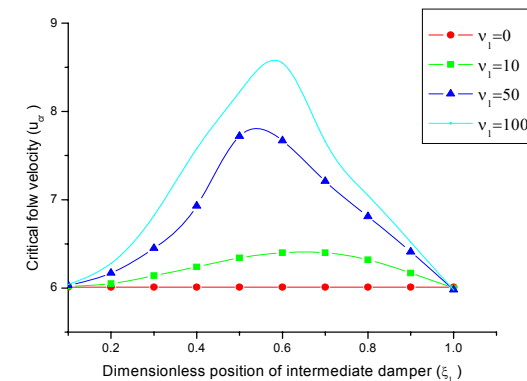


Fig. 5 Stability map of the pipe with tip mass and tip damper( $\alpha=0.5, v_0=50.0$ )

- (4) Benjamin, T. B., 1961, "Dynamics of a System of Articulated Pipes Conveying Fluid(II. Experiment)," Proceedings of the Royal Society, Series A, Vol. 261, pp. 487~499.
- (5) Gregory, R. W. and Paidoussis, M. P., 1966, "Unstable Oscillation of Tubular Cantilevers Conveying Fluid(I. Theory)," Proceedings of the Royal Society (London), Series A, Vol. 293, pp. 512~527.
- (6) Gregory, R. W. and Paidoussis, M. P., 1966, "Unstable Oscillation of Tubular Cantilevers Conveying Fluid(II. Experiment)," Proceedings of the Royal Society(London), Series A, Vol. 293, pp. 528~542.
- (7) Hill, J. L. and Swanson, C. P., 1970, "Effects of Lumped Masses on the Stability of Fluid Conveying Tubes," Journal of Applied Mechanics, Vol. 37, pp. 494~497.
- (8) Sugiyama, Y., Kumagai, Y., Kishi, T. and Kawagoe, H., 1985, "Studies on Stability of Pipes Conveying Fluid(The Effect of a Lumped Mass and Damping)," Journal of Japan Society Mechanical Engineering,(in Japanese), Vol. 51, pp. 1506~1512.
- (9) Becker, O., 1979, "Zum Stabilitätsverhalten des Durchstromten Garaden Rohres Mit Elastischer Ouerstutyung," Maschinenbautechnik, Vol. 28, pp. 325~327.
- (10) Edelstein, W. S. and Chen, S. S., 1985, "Flow-induced Instability of an Elastic Tube with a Variable Support," Nuclear Engineering and Design, Vol. 84, pp. 1~11.
- (11) Sugiyama, Y., Matsumoto, S. and Iwatsubo, T., 1986, "Studies on Stability of Two-degree-of-freedom Articulated Pipes Conveying Fluid(The Effect of a Damper)," Journal of Japan Society Mechanical Engineering,(in Japanese), Vol. 52, pp. 264~269.
- (12) Sugiyama, Y., Kawagoe, H., Kishi, T. and Nishiyama, S., 1988, "Studies on Stability of Pipes Conveying Fluid(The Combined Effect of a Spring Support and Lumped Mass)," JSME International Journal, Vol. 31, pp. 20~26.
- (13) Sugiyama, Y., Katayama, T., Kanki, E., Chiba, M., Shiraki, K. and Fujita, K., 1996, "Stability of Vertical Fluid Conveying Pipes having the Lower End Immersed in Fluid," JSME International Journal, Series B, Vol. 39, pp. 57~65.
- (14) Ryu, S. U., Sugiyama, Y. and Ryu, B. J., 2002, "Eigenvalue Branches and Modes for flutter of Cantilevered Pipes Conveying Fluid," Computers and Structures, Vol. 80, pp. 1231~1241.
- (15) Ryu, B. J., Ryu, S. U. and Lee, J. W., 2003, "Eigenvalue Branches and Flutter Modes of a Cantilevered Pipe Conveying Fluid and Having a Tip Mass," Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 13, No. 12, pp. 956~964.
- (16) Ryu, B. J., Ryu, S. U., Kim, G. H. and Yim, K. B., 2004, "Vibration and Dynamic Stability of Pipes Conveying Fluid on Elastic Foundations," KSME International Journal, Vol. 18, pp. 2148~2157.