

비격자메쉬에서의 고차오더 대류 방정식 해결방법

허남빈 고흥석

그래픽스 및 미디어 연구실, 서울대학교
{heo, ko}@graphics.snu.ac.kr

CIP method on Triangular Meshes

Nambin Heo Hyeong-Seok Ko

Graphics and Media Lab, Seoul National University

요약

이 논문은 비격자메쉬에서의 비물리적 감쇄현상을 감소시키는 새로운 CIP 대류방법을 제안한다. 제시되는 방법은 물리량과 물리량의 미분정보를 함께 사용하여 기존의 선형방법보다 더 정확한 물리현상을 반영할 수 있다. 비격자메쉬에서 해결하기 힘든 CIP의 비대류항을 풀기 위해 기존의 격자 메쉬에서 사용되었던 유한차분법 방법과는 다른 유한체적법을 사용하였다. 그리고 대류항의 보다 나은 정확도를 위해 여러가지 보간법에 대해 정확도 실험을 수행하였으며, 선형방법과의 비교 실험을 통해 보다 적은 비물리적 감쇄현상을 보임을 확인할 수 있었다.

Abstract

This paper presents a new CIP method for unstructured mesh to reduce the numerical dissipation. To reflect precise physical characteristics, CIP method updates both the physical quantity and the derivative information. The proposed method uses the Finite Volume Method(FVM) to solve the non-advection term of CIP equation. And we performed several experiments to improve the accuracy of third-order interpolation. Our result shows that our algorithm has less numerical dissipation than that of linear advection solver.

키워드: 대류방정식, 유체시뮬레이션, 비격자메쉬, 비물리적 감쇄현상

Keywords: Advection, CIP, Fluid Simulation, Unstructured Mesh, Numerical Dissipation

1. 서론

최근 유체 시뮬레이션은 컴퓨터 그래픽스 분야에 중요한 연구영역으로 자리잡았다. 보다 나은 시뮬레이션 결과를 위해서는 실제 현상에 관련된 물리현상을 엄밀히 반영하여 물리량을 정확하게 측정해 주는 것이 필수적이다. 1999년 Stam[1]이 Stable Fluid를 제안한 이후, 보다 다양한 현상과 정확한 시뮬레이션을 위해 많은 연구가 진행되었다.

그래픽스 분야에서 제안된 많은 유체 시뮬레이터는 격자메쉬(Regular Grid)를 기반으로 한다. 격자메쉬는 구조적인 일관성을 가지고 유한차분법(Finite Difference) 방법이 매우 적합하여, 다루기 쉽고 프로그래밍하기 용이하다는 장점을 가지고 있다. 하지만 그에 반해 임의의 기하학적인 구조에서 물체의 경계를 정확히 캡처하지 못하여 정확성이 떨어진다 단점이 있다. 안정성과 속도보다 높은 정확도를 중시하는 전산 유체 역학(Computational Fluid Dynamics)분야에서는, 오랫동안 비격자메쉬(Unstructured Mesh)를 이용한 다양한 유체 시뮬레이션 방법이 제안되어 왔다.[2, 3, 4] 반면 그래픽스 분야에서는 Feldman[5]이후 몇몇 방법들이 제안되었지만, 비격자메쉬는 격자 메쉬에 비해 다양한 환경에 대해 적응적이라는 장

점을 가지지만, 근본적인 구조적 비일관성으로 인해, 격자메쉬와는 달리 유한차분법과 수치보간법(Interpolation)이 용이하지 않다. 그에 따라 그래픽스 분야에서는 비격자메쉬에서의 수치적인 계산을 위하여 Moving Least Square 방법과 유한체적법(Finite Volume Method) 등이 사용되어왔다. 이런 어려움으로 인해 비격자메쉬는 격자 메쉬와는 달리 물리량의 미분값을 구하는 것이 매우 어렵다. 특히 물리량의 움직임을 직접적으로 나타내는 나비에-스톡스 방정식의 대류항(Advection)을 푸는데 있어, 많은 근사로 인해 비물리적 감쇄현상을 나타내는 단점이 있었다. 특히 Feldman[5]과 Klingner[6]는 대류항을 다룸에 있어 일차정확도를 가지는 방법을 사용하고 있다. 낮은 정확도의 방법은 비물리적 감쇄현상으로 인해 유체의 움직임이 단조로워지는 결과를 보인다.

반면 격자 메쉬에서는 대류항의 보다 나은 정확도를 위해 많은 연구가 이루어져 왔다.[7, 8, 9, 10, 11] 특히, Stam[1]이후 많은 연구들이 세미-라그랑지안(Semi-Lagrangian) 방법에서 보이는 비물리적 현상을 극복하고자 진행되었다. 그중 CIP 방법[9]은 물리량과 미분값을 동시에 계산하는 방법으로 물리량을 보다 정확하게 추산할 수 있음을 보여왔다.

본 논문에서는 CIP방법을 비격자메쉬에 적용하는 방법을 제안하였다. 미분량의 계산을 위해 유한체적법을 사용하였으

며, 대류항의 정확한 계산을 위해 다양한 삼차보간 방법에 대해 정확도 분석을 시행하였다. 그리고 기존의 선형방법과의 비교를 통해 보다 다이나믹한 유체 움직임을 생성함을 확인할 수 있었다.

본 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 2절에서는 관련 연구를 살펴보고, 3절은 비격자메쉬에서 유체 시뮬레이터의 개요를 설명할 것이며, 4절에서는 비격자메쉬에서 다양한 대류 방정식을 푸는 방법을 소개하고 각각의 장단점을 살펴볼 것이다. 5절에서는 비격자메쉬에서의 CIP를 소개할 것이고, 6절에서는 실험결과를 보여주고, 마지막으로 7장에서 결론을 맺을 것이다.

2. 관련 연구

1999년 Stam[1]이 안정적인 유체 시뮬레이터를 소개한 이후 그래픽스 분야에 많은 연구가 진행되어 왔다. Stam의 시뮬레이터에서는 큰 시간 간격에 대해 안정적인 결과를 만들어내기 위해 프로젝션(Projection) 방법과 세미-라그랑지안(Semi-Lagrangian) 방법을 제안하였다. 이 방법은 안정적으로 동작하지만 많은 비물리적 감쇄현상을 나타내었다. 특히 대류항을 풀기 위한 세미-라그랑지안 방법은 일차정확도를 가지는 방법으로 수치적으로 많은 비물리적 확산 효과를 보이는 것으로 알려져 있다. 세미-라그랑지안 방법에서 보이는 감쇄현상을 극복하기 위해 그래픽스 분야에서는 많은 연구들이 진행되어 왔다. 그 중 CIP 방법은 삼차정확도를 가지는 방법으로, 그래픽스에서 자주 사용되는 방법 중 가장 높은 정확도를 지니며, 다양한 연구[9, 11]를 통해 좋은 결과를 보여왔다.

최근 그래픽스 분야에서는 비격자메쉬를 이용한 유체 시뮬레이션의 다양한 연구가 진행되었다. Feldman[5]은 비격자메쉬와 격자메쉬를 혼합한 방식의 시뮬레이터를 제안하였고, Klingner[6]는 물체의 움직임에 따라 시뮬레이션 공간을 다시 생성하는 방법을 제안하였다. Chentanez[12]는 비정규메쉬를 Semi-Lagrangian Contouring[13]방법과 결합하여 액체 시뮬레이션 결과를 보여주었다.

3. 개요

우리는 비압축성이고 점성이 없는 유체를 가정하였다.[5] 비압축성 오일러 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\mathbf{f}}{\rho} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

여기서 \mathbf{u} 는 속도, p 는 압력, \mathbf{f} 는 외력, ρ 는 밀도이다. 위 유체방정식을 풀기 위해 우리는 Stam[1]이 제안한 Fractional-step method를 사용하였다. 즉, 식(1)에서 대류항과 외력항을 차례로 풀고, 식(2)의 질량 보존 방정식은 Projection Method를 사용하여 푼다. 이 논문에서는 식(1)의 대류항의 수치적 풀이에 초점이 맞추어져 있다. 기존의 비격자 메쉬에서 사용한 일차정확도의 대류항 방법([6, 12])이 아닌 고차오더의 정확도를 가지는 CIP방법을 통해 보다 다이나믹한 유체의 움직임을 만들고자 한다.

4. 대류항의 수치적 해결

이 절에서는 대류항 풀이를 위한 다양한 수치 방법들을 소개한다. 그래픽스 분야에 제시되었던 비격자메쉬에서의 기존 연구들의 문제점과 어려움을 소개한 후, 전산유체 분야에 알려져 있는 다양한 수치적 방법을 소개한다. 그리고 격자 메쉬에서 성공적으로 쓰이고 있는 대류항 해결방법에 대해 소개한 후, 비격자 메쉬에서의 CIP방법에 대해 기술한다.

4.1 엇갈림격자에서의 수치 방법

최근 그래픽스에 소개된 비격자 메쉬에서의 유체 시뮬레이터[5, 6, 12]는 (그림1)과 같은 엇갈림 격자(Staggered Grid)에서의 수치 방법을 보여주고 있다.

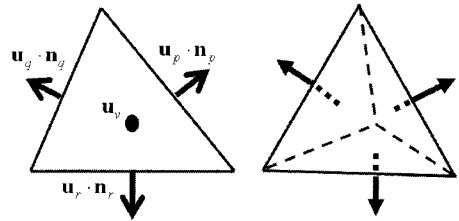


그림 1: 엇갈림 격자 셀 (2D, 3D)

Feldman은 임의의 점에서의 물리량의 보간(Interpolation)을 위해 Moving-Least Square(MLS)방법을 사용하였다. 이후 Klingner와 Chentanez는 마찬가지로 엇갈림 격자를 사용하였으나 보간법에 있어 Feldman과는 다른 방법을 취하고 있다.

우선 선형시스템을 풀어 각 면에 저장된 방향속력을 이용하여 외심에서 속도를 구한다. 그리고 임의의 점에서의 보간을 위해 Warren[14]이 제안한 보르노이 셀(Voronoi Cell)을 사용한 보간법을 사용하고 있다.

Klingner[6]의 논문에서 저자들은 각면에 저장한 방향속력을 외심에 가져오는 선형 시스템은, 유체의 비압축성을 나타내는 식(2)를 통해 랭크가 하나 부족하여 최소자승 근사(Least-Square Approximation)임에도 어려가 없는 시스템이라고 기술하고 있다. 하지만 이 방법의 근본적인 가정은 한 삼각형 내에서의 속도가 모두 같다는 일차근사를 내포하고 있다. 즉, 그것은 위 방법의 수치적 정확도가 $O(\Delta x)$ 를 넘지 못한다는 것을 의미한다. [15, 16] 따라서 이 방법은 세미-라그랑지안 방법과 마찬가지로 많은 비물리적 감쇄현상을 초래한다.

4.2 비격자메쉬에서의 고차 수치 방법

전산유체 분야에서는 비격자 메쉬의 장점을 극대화 하기 위해, 대류 방정식에 대한 다양한 수치 방법을 개발해 왔다. 그 중 TVB(Total Variation Bound), TVD(Total Variation Diminishing)와 같은 좋은 성질을 가지는 ENO, WENO 방법에 대한 연구가 최근 활발하게 이루어졌다.[3, 17] ENO, WENO는 각각 삼차, 오차의 높은 정확도를 가지고, 이의 다양한 좋은 성질들로 인해 비압축성, 압축성 유체 모두에서 널리 사용되어 왔다. 하지만 격자 메쉬에서와 마찬가지로 큰 스텐실(Stencil)을 지니는 단점으로 인해, 경계부근에서 사용하기가 용이하지 않다는 단점을 가지고 있었다. 또한 비격자 메쉬에서는 (그림2)와 같이 보간 영역이 매우 넓어지고 모호해진다는 단점이 있어, 이전 격자메쉬에서의 간편함을 많이 잃어버린다는 단점이 있

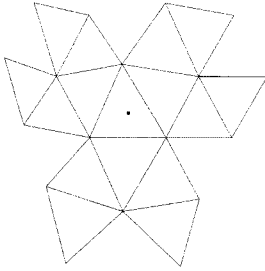


그림 2: 비격자메쉬에서의 ENO, WENO의 스텐실(Stencil)

었다. 이에 반해 CIP 방법은 작은 스텐실을 가지고 삼차의 정확도를 가진다는 장점이 있다.

4.3 CIP 방법

오일러 방정식(식(1))과 다음과 같은 대류 방정식(Advection Equation)(식(3))은 비선형적이고 hyperbolic한 성질을 지닌다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = 0 \quad (3)$$

대류 방정식을 풀기 위한 대표적인 수치 방법으로는 세미-라그랑지안 방법이 있다.[18] 하지만 이 방법은 선형보간법으로 인해 일차의 정확도를 가지고, 그에 따른 수치 에러에서 발생하는 비물리적인 확산 현상이 발생함이 알려져 있다. 이를 극복하기 위해 세미-라그랑지안 방법의 일환으로 BFEC[7], MacCormack[8], CIP[19, 20, 21]와 같은 방법이 개발되었다.

CIP는 세미-라그랑지안 방법 중 가장 높은 삼차 정확도를 지닌다. 이 방법은 높은 정확도와 작은 스텐실을 유지하기 위하여 본 물리량 뿐 아니라 공간적 미분량도 같이 대류시킨다. CIP방법은 미분량의 시간적 갱신을 위해 기존 대류 방정식을 미분하여 다음과 같은 매개 방정식을 만들었다.(식(4))

$$\frac{\partial \phi_x}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi_x = -\mathbf{u}_x \cdot \nabla \phi \quad (4)$$

위 식은 본 물리량 ϕ 와는 달리 공간적으로 서로 다른 두개의 향으로 구성되어 있다. 즉, 매개 방정식을 대류항과 비대류항으로 나누어 볼 수 있다. 이 식을 풀기 위해 [1]의 방법과 마찬가지로 fractional step method를 쓴다.[19, 20] 우선, 비대류항을 갱신하고, 그 이후 대류항을 역추적과 삼차보간 방법으로 갱신하는 방식이다. 격자메쉬에서는 Central Difference를 사용하여 비대류항을 갱신하는 방법이 일반적이다.[19, 20] 하지만 비격자메쉬에서는 유한차분법이 용이하지 않다. 이런 어려움을 극복하기 위해, 다음장에서는 비격자메쉬에서의 새로운 CIP 방법을 제안하고자 한다.

5. 비격자메쉬에서의 CIP

비격자메쉬에서의 CIP는 격자메쉬와 수치방법론적으로 큰 차이를 보인다. 특히 대류항 계산을 위한 물리량 삼차보간 방법과, 비대류항의 계산 방법은 비격자메쉬에서 어려운 계산중 하나이다. 이중 CIP의 정확도에 가장 큰 영향을 끼치는 것은 대류항에서의 물리량 보간 방법이다. 위의 두가지 논점에 대해 차례로 기술하도록 하겠다.

5.1 대류항 계산 수치 방법

CIP에서의 대류항의 수치적 해결은 역추적(Back-Tracking)과 삼차보간법(Third-Order Interpolation)을 근간으로 한다. 임의의 점에서의 물리량을 속도장을 이용하여 역추적 하는것은, 격자메쉬와 비격자메쉬가 차이가 없는 요소이다. 하지만 역추적 이후 보간법은 격자메쉬의 경우 간단한 삼차보간[19, 20, 9, 11]을 사용할 수 있지만, 비격자메쉬의 경우 직관적이고 간단한 해결방법이 없다.[3] 우리는 이 상황에서 가능한 세가지의 보간방법을 제안하고 각각의 방법에 대해 정확도를 분석해 보았다.

5.1.1 사분면을 이용한 보간법

비격자메쉬에서의 삼차보간은 메쉬가 가진 근본적인 구조적 비일관성 때문에, 공간상에 주어진 임의의 파티클로부터의 보간과 마찬가지로 생각할 수 있다. 따라서 미분입자(Derivative Particles)[10]에서 사용한 방법과 마찬가지로 삼차보간을 수행할 수 있다. 공간상의 각 사분면에서 가장 가까운 점을 하나씩 찾아 차원분할을 통해 삼차보간하는 방식이다.

5.1.2 최소자승근사 보간법

비격자메쉬에서 사용할 수 있는 또 다른 보간법은 그림과 같이 듀얼셀을 통해 최소자승근사(Least-Square Fitting)를 수행하는 것이다. 삼차보간을 위해 필요한 계수는 $1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3$ 과 같이 총 10개의 변수이므로, 10×10 행렬 방정식을 계산함으로써 최소자승근사를 통해 계수를 예측하고, 그에 따라 임의의 점에서의 물리량을 구할 수 있다.[20]

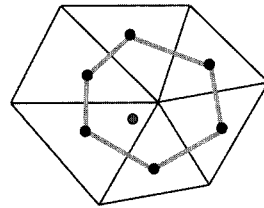


그림 3: 듀얼셀 (Dual Cell)

5.1.3 듀얼삼각형 보간법

사분면을 이용한 보간법은 보간을 위한 스텐실이 한 삼각형보다 크고, 때에 따라 스텐실이 더욱 커질 수 있다는 단점이 있다. 또한 최소자승근사 보간법은 스텐실의 크기는 일정 수준 이하로 보장할 수 있으나 최소자승근사에 따른 행렬방정식의 풀이가 많은 시간을 요구한다. 따라서 작은 스텐실과 빠른 속도를 위해, 다음과 같은 듀얼삼각형을 이용한 보간법을 수행할 수 있다. 우선 삼각형의 무게중심들을 꼭지점으로 하여 델로니 삼각화를 수행한다. 그리고 이 삼각형들로부터 만들어진 영역을 기준으로 미분입자[10]에서 사용한 방법과 마찬가지로 차원분할(Dimensional Splitting)을 통하여 보간법을 수행할 수 있다.

이와 같은 방법은 스텐실의 크기를 줄여 어느 정도의 정확도 향상을 기대할 수 있지만, 듀얼삼각형의 바람직한 기하학적 성질을 보장할 수 없어 항상 좋은 결과를 도출하지는 않는다.

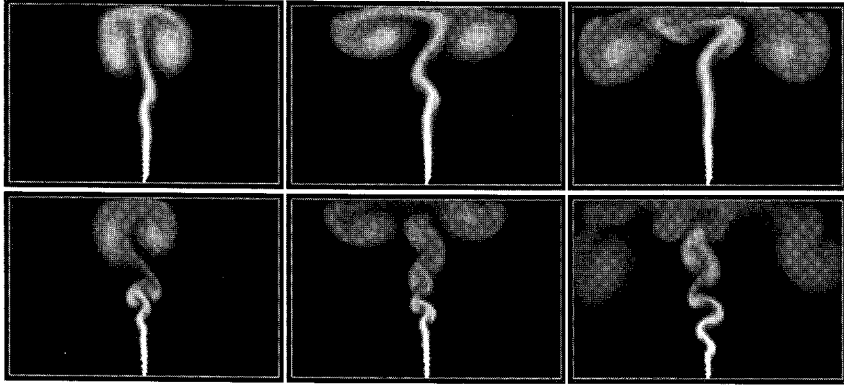


그림 4: 이차원 비격자 유체 시뮬레이션 : 위와 아래의 그림들은 각각 선형대류방법과 CIP대류방법으로 구현한 결과를 보여주고 있다. (삼각형의 개수는 총 삼만개이다)

5.1.4 정확도 분석

위의 세가지 방법에 대해 다음과 같이 정확도를 분석해 보았다. 임의의 함수값을 각 셀의 무게중심(또는 외심)에 정의하고 영역상에 규칙적으로 뽑은 만개의 점들에서 보간을 수행하여 L2 에러를 측정하였다. 삼각형 개수를 5000, 20000, 80000으로 늘려가며 정확도의 오더를 분석한 결과는 아래(그림5)와 같다. 결과에서 알 수 있듯이 가장 좋은 정확도를 보인 결과는 최소자승근사를 이용한 보간법이다. 하지만 유체 실험시에 가장 효과적인 결과를 보였던것은 사분면을 이용한 보간법이다. 최소자승근사 보간법 사용시 OverShoot을 막아주기 위하여 보간에 사용한 노드의 최대값과 최소값을 이용하여 보간된 값을 Clipping하였다. 최소자승근사 보간법은 수치적인 정확도는 높았지만 국지적인 메쉬의 모양에 따라 행렬이 Ill-conditioned되는 경우가 발생하는 등, 시뮬레이션 과정에서 불안정성을 가져올 수 있는 요소가 다소 많았다. 이때 행렬의 Condition-number를 통해 보간영역을 제정의 해야하는 등의 구현상의 어려움이 있었다.([3])

n	사분면		최소자승근사		듀얼삼각형	
	Error	Order	Error	Order	Error	Order
5000	2.64e-3	-	1.81e-3	-	2.57e-3	-
20000	2.95e-4	3.17	1.20e-4	3.91	1.95e-4	3.72
80000	3.46e-5	3.09	7.66e-6	3.98	1.52e-5	3.68

그림 5: 각각의 보간법에 대한 정확도 분석

5.2 비대류항 계산 수치 방법

격자메쉬에서 비대류항의 수치적 해결은 Central Difference에 의한 유한차분법이였다. 하지만 비격자메쉬에서는 유한차분법이 용이하지 않다. 따라서 우리는 유한체적법(Finite Volume Method)에 의한 비대류항의 수치적 해결 방법을 제안하고자 한다.

비대류항의 계산을 위해서는 물리량이 정의된 삼각형의 무게중심에서 미분값들을 구해내는 것이 중요하다. 유한체적법

에 의해 물리량의 미분값을 구하는 방법은 다음과 같은 적분식으로 변환이 가능하다. [2]

$$\int g_x dS = \int \nabla \cdot (g, 0, 0) dS \quad (5)$$

$$= \int (g, 0, 0) \cdot ndl \quad (6)$$

$$= \int g \cdot \mathbf{n}_1 dl \quad (7)$$

위 식을 통해 임의의 삼각형 무게중심에서 미분값을 구하는 문제는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$g_x = \frac{1}{S} \sum_{k=1}^3 (g_k \mathbf{n}_1) l_k \quad (8)$$

위의 식으로 인해 물리량의 미분값(g_x)을 구하는 문제는 각 변(edge)에서의 물리량($g_k, k = 1, 2, 3$)을 보간하는 문제로 변환되었다. 이때 비대류항의 계산 정확도를 향상시키기 위해서는 보다 높은 정확도를 가지는 보간이 필요하다. 이때 이용할 수 있는 보간 방법은 논문 [2]에서 제안된 보간법과 Warren[14]이 제안한 일반적인 다각형에서의 선형보간법이 있다. 두 방법 모두 이차의 정확도를 가지고 있는 방법이다. 실험결과 두 방법은 정확도(이차오더)나 실험 결과에 있어 큰 차이가 없었으며, 구현은 Warren의 방식이 훨씬 용이하였다.

6. 실험결과

비격자메쉬에서 구현된 CIP의 효율성을 판단하기 위해 Klingner[6]의 방법과 비교하였다.(그림4) 구조적인 자유로움이 없는 격자메쉬와는 달리, 비격자메쉬의 경우 메쉬의 질이 시뮬레이션 결과를 많이 좌우함을 확인 할 수 있었다. 실험에 사용된 삼각형의 개수는 총 삼만개이며, 보다 나은 시뮬레이션을 위해 Alliez[22]의 방법을 이용하여 최적화를 통해 메쉬의 질을 향상시켰다.

실험 결과 같은 인풋에 대해 [6]의 경우 일차 정확도를 가지는 방법이 흔히 보여주는 다소 점성이 강한듯한 움직임을 보여주었다. 대조적으로, CIP를 이용한 경우 보다 활발한 유체

의 움직임을 만들어 낼 수 있었다. 이것으로 우리는 고차정확도를 가지는 대류방정식 수치 방법이 비격자메쉬에서의 유체 애니메이션에 쓰이기 유용함을 알 수 있었다.

7. 결론

이 논문에서 우리는, 비격자메쉬에서의 유체 시뮬레이션에 대해 대류항의 정확도를 증가시키는 CIP방법을 제안하였다. 기존 널리 사용되는 격자메쉬와 달리, 유한차분법과 삼차보간법이 용이하지 않은 비격자메쉬에서의 수치 방법을 위해 다음과 같은 두가지를 제안하였다. 첫째, 대류항을 풀기 위한 세가지의 삼차보간방법을 제안하였다. 둘째, 비대류항의 계산을 위해 유한체적법에 근간한 미분값 계산 방법을 제안하였다.

CIP에서 수행하는 삼차보간은 Overshoot의 위험성이 있어 그것에 대한 많은 해결책이 제시되어왔다. 본 논문에서 다른 최소자승근사 보간법 또한 정확도가 높은 반면 속도가 느리고 Overshoot의 위험성이 있다는 단점이 있었다. 최근에 제안된 CIP-MM-FVM[23]과 같은 보존적(Conservative) CIP 방법을 사용하면 보다 안정적인 결과와 좋은 정확도를 얻을 수 있을 것으로 기대된다. 이 논문에서는 이차원의 삼각메쉬에 대해서만 실험을 수행하였다. 삼차원으로의 확장과 엄밀한 정확도의 오더 분석, 그리고 보다 빠른 대류방정식의 수치방법 연구가 필요할 것이다.

8. 감사의 글

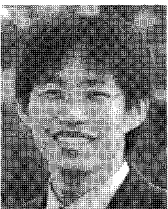
본 연구는 정보통신부 국가지정연구실 (NRL M106000023206J0000-23210), 교육인적자원부 두뇌 한국 21 프로젝트, 서울대학교 자동차 시스템 공학 연구소의 지원을 받았다.

참고 문헌

- [1] J. Stam, "Stable fluids," *ACM SIGGRAPH '99*, pp. 121–128, 1999.
- [2] D. Kim and H. Choi, "A second-order time-accurate finite volume method for unsteady incompressible flow on hybrid unstructured grids," *Journal of Computational Physics* 162, pp. 411–428, 2000.
- [3] Y.-T. Zhang and C.-W. Shu, "High-order weno schemes for hamilton-jacobi equations on triangular meshes," *SIAM Journal of Scientific Computing*, pp. 1005–1030, 2003.
- [4] S. Ii, M. Shimuta, and F. Xiao, "A 4th-order and single-cell-based advection scheme on unstructured grids using multi-moments," *Computer Physics Communications* 173, pp. 17–33, 2005.
- [5] B. E. Feldman, J. F. O'Brien, and B. Klingner, "Animating gases with hybrid meshes," *ACM Transactions on Graphics* 24, 3, pp. 904–909, 2005.
- [6] B. M. Klingner, B. E. Feldman, N. Chentanez, and J. F. O'Brien, "Fluid animation with dynamic meshes," *ACM Transactions on Graphics* 25, 3, pp. 820–825, 2006.
- [7] B. Kim, Y. Liu, I. Llamas, and J. Rossignac, "Advections with significantly reduced dissipation and diffusion," *IEEE Trans. Vis. Comput. Graph* 13, 1, pp. 135–144, 2007.
- [8] A. Selle, R. Fedkiw, B. Kim, Y. Liu, and J. Rossignac, "An unconditionally stable maccormack method," *SIAM Journal of Scientific Computing*, p. (in press), 2008.
- [9] O.-Y. Song, H. Shin, and H.-S. Ko, "Stable but non-dissipative water," *ACM Transactions on Graphics* 24, 1, pp. 81–97, 2005.
- [10] O.-Y. Song, D. Kim, and H.-S. Ko, "Derivative particles for simulating detailed movements of fluids," *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics* 13, 4, pp. 711–719, 2007.
- [11] D. Kim, O.-Y. Song, and H.-S. Ko, "A semi-lagrangian cip fluid solver without dimensional splitting," *Computer Graphics Forum* 27, pp. 467–475, 2008.
- [12] N. Chentanez, B. Feldman, F. Labelle, J. O'Brien, and J. Shewchuk, "Liquid simulation on lattice-based tetrahedral meshes," *In Proceedings of ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation*, pp. 219–228, 2007.
- [13] A. W. Bargteil, T. G. Goktekin, J. F. O'Brien, and J. A. Strain, "A semi-lagrangian contouring method for fluid simulation," *ACM Transactions on Graphics* 25, 1, pp. 19–38, 2006.
- [14] J. Warren, S. Schaefer, A. N. Hirani, and M. Desbrun, "Barycentric coordinates for convex sets," *Advances in Computational and Applied Mathematics*, pp. 319–338, 2007.
- [15] F. Losasso, F. Gibou, and R. Fedkiw, "Simulating water and smoke with an octree data structure," *In the Proceedings of ACM SIGGRAPH 2004*, pp. 457–462, 2004.
- [16] F. Gibou, R. Fedkiw, L.-T. Cheng, and M. Kang, "A second order accurate symmetric discretization of the poisson equation on irregular domains," *Journal of Computational Physics* 176, pp. 205–227, 2002.
- [17] C. W. Shu and S. Osher, "Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes," *Journal of Computational Physics* 77, pp. 439–471, 1988.
- [18] A. Staniforth and J. Cote, "Semi-lagrangian integration scheme for atmospheric model - a review," *Mon. Weather Rev.* 119, 12, pp. 2206–2223, 1991.
- [19] T. Yabe and T. Aoki, "A universal solver for hyperbolic equations by cubic-polynomial interpolation i. one-dimensional solver," *Computer Physics Communications* 66, pp. 219–232, 1991.
- [20] —, "A universal solver for hyperbolic equations by cubic-polynomial interpolation ii. two and three-dimensional solver," *Computer Physics Communications* 66, pp. 232–242, 1991.
- [21] T. Yabe, F. Xiao, and T. Utsumi, "The constrained interpolation profile method for multiphase analysis," *Journal of Computational Physics* 169, pp. 556–593, 2001.

- [22] P. Alliez, D. Cohen-Steiner, M. Yvinec, , and M. Desbrun, "Variational tetrahedral meshing," *In the Proceedings of ACM SIGGRAPH 2005*, pp. 617-625, 2005.
- [23] S. Ii and F. Xiao, "Cip/multi-moment finite volume method for euler equations : A semi-lagrangian characteristic formulation," *Journal of Computational Physics* 222, pp. 849-871, 2007.

〈 저자 소개 〉



허 남 빈
 2004년 8월 한국과학기술원 컴퓨터 공학부 (학사)
 2006년 8월 한국과학기술원 컴퓨터 공학부 (석사)
 2007년 2월 ~ 현재 서울대학교 전기 및 컴퓨터 공학부 박사과정
 <관심분야> 물리기반 애니메이션



고 형 석
 1985년 2월 서울대학교 전산학과 (학사)
 1987년 2월 서울대학교 전산학과 (석사)
 1994년 2월 University of Pennsylvania 전산학과 (박사)
 1994년 8월 ~ 1995년 12월 Assistant Professor at University of Iowa
 1996년 2월 ~ 현재 서울대학교 전기 및 컴퓨터 공학부 교수
 <관심분야> 옷, 유체, 헤어, 탄성체 시뮬레이션, 움직임, 얼굴 애니메이션