韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2009. 05. 제 48권, 제 2호, 141-148.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
May. 2009, Vol. 48, No. 2, 141-148.

문제해결에서 분석의 역할

유 윤 재 (경북대학교)

I. 서 론

분석[1]은 수학 지식의 발견 또는 정당화에서 중요한 역할을 했다는 것은 이미 고대 그리스 수학자들에서 널리 알려져 있었다(Heath, 1981). Descartes는 그의 <서설>에서 보다 일반적인 상황에서 적용할 수 있는 분석 원리를 제창함으로써 가설-연역적 추론이라는 현대 분석법의 기초를 마련했고 Polya(1957)는 그의 <문제해결>에서 Pappus의 분석을 상기시키면서 분석의 중요성을 재차 강조하고 있다.

그러나 현 학교수학 교과서의 기하 영역에서 제시된 명제들을 보면 가설로부터 출발하여 연역하여 어떤 결과를 얻는 일련의 추측 과정은 사라지고 대신에 그 추측의 결과로부터 얻은 결론들에 의하여 대치된 소위 '가정-결론' 형식으로 되어 있다. 동시에 분석 과정이 수행되는 곳은 반드시 필요조건 개념이 동반되는데 그렇지만 교과서에는 필요조건은 집합과 명제 단원에서만 소개될 뿐 그 이후의 단원에서는 단순히 형태 재인 학습 수준에 머물고 있다.[2]

Polya(1957)이 주장하는 바와 같이 분석이 문제해결 과정의 한 영역인 문제제기 영역에서 중요한 역할을 한다는 것을 인정한다면 학생들은 분석의 절차를 정확하게 사용할 수 있도록 가르쳐야 할 부분이지만 실상은 교사들도 분석의 원리를 분명하게 인식하고 있는 것 같지 않다.[3]

문제해결과 관련된 학습지도를 위해서 본 연구는 분석의 올바른 절차가 무엇이고, 정교한 분석을 위해서 필요한 도구는 무엇이며 학교수학에서 어떻게 구현되어야 하는가를 다룬다. 이는 분석에 대한 국내 최초의 연구자인 강문봉(1992)의 연구의 역사적 관점에 대한 수학적 관점이다.

II. 분석의 필요성, 원리와 절차

분석 과정이나 절차를 이해하기 위해서는 먼저 분석에 대한 일반적 개관이 필요하다. 분석은 가설 H에 대하여 $H \to C$가 참이고 C가 참일 때 H가 참일 개연성이 있다는 추측으로 시작한다.[4]

추론에서 분석에 의한 진술은 '가설-(연역)추론-결론'이라는 형식을 가지나 형식주의적 기술은 '가설-결론-(연역)추론'이라는 형식을 가지기 때문에 두 형식은 진술 순서 차이에 있다고 할 수 있다. 그러나 분석 과정은 형식주의에서 보는 바와 같이 결론이 제시되어 있는 것이 아니라 결론을 발견한다는 점에서 형식주의적 기술보다는 발견적이며 따라서 더 높은 수준의 사고를 요한다.

분석 개념에 대하여 선행 연구와 관련되어 약간 언급해 둘 게 있다. 분석의 절차에서 방향성에 대한 논쟁이

* 접수일(2008년 12월 26일), 수정일(1차 : 2009년 5월 4일, 2차 : 2009년 5월 15일), 게재확정일(2009년 5월 15일)
* ZDM분류 : 01A20, 97C90
* MSC2000분류 : U24, H14, F54, G78
* 주제어 : 분석, 필요조건, 충분조건, 문제해결, 문제제기

1) 수학에서 분석이라는 용어가 두 가지 의미로 사용되는데 하나는 추론으로서 분석이고 다른 하나는 어떤 수학적 대상을 수식으로 표상할 때 보통 해석적으로 표현한다는 경우를 말한다. 그러나 해석적이라는 용어와 분석적이라는 용어는 영어권에서는 같은 용어를 사용한다.

2) 방정식의 풀이 과정은 모두 분석을 하고 있는 것임에도 불구하고 무연근 개념을 사용함으로써 필요조건 개념을 제거하고 있다. 이와 같이 필요조건 개념은 명제 단원 이후에서 연결되지 않고 있다.

3) 이것은 교육대학원 학생들과의 면담을 통하여 확인한 결과이다.

4) Polya(1968)는 이 추론 양상을 개연 추론(plausible reasoning)의 여러 양상의 하나로 보았다. 이 형식에서 필요조건을 선택하고 처리하는 방식에서 분석과 귀납으로 나누어진다.

있는데 Robinson의 주장[5]과 Cornford의 주장[6]이 대표적이다.[7] Polya(1957)는 수학적 명제에 대해서는 분석 개념을 Robinson의 해석과 같은 입장을 취하고 있다. 그러나 Polya(1957)의 강 건너기 문제를 보면 "거꾸로 연구하기"도 분석 개념으로 간주함으로써 Cornford의 개념도 수용하는 것 같이 보인다. 강 건너기 문제는 강을 건너기 위하여 '톱이 있다→나무를 절단한다→통나무 다리를 만든다→강을 건넌다.'와 같은 해결 절차를 제시할 수 있는데 여기서 중요한 점은 이 해결 절차의 각 단계에 대한 선행 조건을 찾는 일련의 추론 과정이 수리/논리적 함의 관계에 의한 연결이 아니라 단순히 작업 절차 또는 작업 순서의 연결을 의미함에 있다. 그러므로 Polya(1957)가 의미하는 거꾸로 연구하기 개념은 연역에 의하여 수행되는 논리적 절차가 아니라 과제를 해결하기 위한 일반적인 수단 또는 절차를 의미하며(Anderson, 1995; Newell & Simon, 1972) 따라서 본 연구에서 의미하는 바와 같은 논리/수학적 개념으로서의 충분조건 찾기 개념과는 다르다. Polya의 문제해결 전략에서는 다리 건너기 문제와 같은 비수학적 문제도 포함되어 있기 때문에 분석에 대하여 Cornford의 해석을 했을 수도 있고 보다 광의의 의미로서 문제해결을 정의한다면 그러한 해석도 가능하다고 본다. 그러나 앞에서도 언급했듯이 여기서 말하는 분석 개념은 Robinson 의미이다. 즉 주어진 가설 H에 대하여 $H \rightarrow C$가 참이 되는 명제 C를 찾는 과정이다.

인지적 관점에서 분석이란 H에 포함된 개념들을 보다 친숙한 개념들로 구성된 명제 C와 연결함으로써 이해의 폭을 확장한다는데 있고 논리적 관점에서 분석이란 H와 동치되는 기성의 명제와 연결하는 것이다. 이와 같이 분석 추론은 개념적 연결성에 초점을 맞추기 위한 하나의 도구이다. 더욱이 가설 연역적 추론의 구조가 본질적으로 분석 추론이라는 점은 수학에서 분석이 자연과학의 발견 과정이 본질적으로 다르지 않음을 배움으로써 수학과 과학의 연결성을 이해할 수 있다. 동시에 가정과 결론을 제시한 후 증명을 요구하는 것, 즉 형식적 탐구 과정보다는 결론까지 발견하도록 하는 탐구 과정은 앞에서도 언급했다시피 보다 상위 수준의 수학 활동이다. 이런 점에서 분석은 문제 발견 또는 문제 제기의 학습에서 보다 근원적이라고 할 수 있다.

분석의 절차를 제시하기 전에 형식적 전개보다 분석적 전개 형식을 염두에 둔 교과서를 추천한다면 Buck(1965)의 <Advanced Calculus>와 Herstein(1964)의 <Topics in Algebra>를 제안하고 싶다.

분석의 절차는 다음과 같이 진행된다.

i) 먼저 가설을 설정한다. 예를 들면 가설은 '삼각형의 외심은 각 변의 수직 이등분선의 교점이다.' 또는 '삼각형의 세 변이 $a^2+b^2=c^2$을 만족하면 그 삼각형은 직각삼각형이다.'와 같은 '가정-결론 형식의 진술'이 아니라 '삼각형의 외심은 존재한다.'와 '삼각형의 세 변이 $a^2+b^2=c^2$을 만족한다.'와 같이 가설적 형태의 진술로 주어진다.

ii) 이제 이런 가설을 H라고 하면 이를 바탕으로 $H \rightarrow C$가 참이 되는 추론을 실행한다. 이제 이 연역의 결과로 나타난 명제 C를 주목한다. 여기서 $H \rightarrow C$는 참이지만 C가 참이라는 보장은 없다. 따라서 C는 참이 되거나 거짓이 되는데 여기서 참/거짓의 판단 근거는 기존의 지식에 의거한다.

iii) 여기서 만약 C가 거짓이라면 가설 H는 기각된다.

iv) 그러나 C가 참이라면 C가 H의 필요조건이 되는데, 만약 이 경우에 C가 H의 충분조건이 되면 결국 '$C \Rightarrow H$'라는 정리를 얻는다.

v) 여기서 C가 H의 충분조건이 되지 않는다면 조건 C로부터 특수한 경우를 선택하여 그것을 H의 충분

5) Pappus의 분석 개념에 대한 Robinson의 해석은 주어진 가설 H에 대하여 C_1, C_2, …를 실행하여 이미 알고 있는 지식 A에 도착하는 $H \Rightarrow C_1 \Rightarrow C_2 \Rightarrow \cdots C_n \Rightarrow A$를 실행하는 과정으로서 결국 H의 필요조건 찾기에 해당된다(강문봉, 1992).

6) Pappus의 분석 개념에 대한 Cornford의 해석은 주어진 가설 H에 대하여 C_1, C_2, …를 실행하여 이미 알고 있는 지식 A에 도착하는 $A \Rightarrow C_n \Rightarrow \cdots \Rightarrow C_2 \Rightarrow C_1 \Rightarrow H$를 실행하는 과정으로서 결국 H의 충분조건 찾기에 해당된다(강문봉, 1992). 이 개념은 강문봉도 지적했듯이 C_j를 구하는 과정은 논리적 절차에 의하여 주어지는 것이 아니라 어떤 "선택"과 같은 사적 방법에 좌우된다. 그러므로 이것은 논리-수학적 절차가 아니다.

7) 분석의 역사적 측면에 대한 논의는 유윤재(2009)에서 다루고 있다.

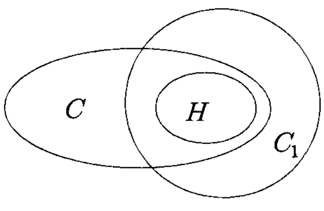
조건으로 선택할 수 있다.

vi) 그러나 이런 선택이 만족스럽지 않을 경우, C를 전제로 하여 새로운 필요조건을 탐색한다. 이 경우는 C를 얻을 때와 다른 수학적 자원을 이용하는 것이 바람직하다. 이제 새로운 H의 필요조건을 얻어서 그것을 C_1이라고 하면 $C_1 \wedge C$는 논리적으로 C_1이나 C보다 개선된 H의 필요조건이 된다. 그러므로 $C_1 \wedge C$이 참이라는 것이 확인되면 이것으로부터 다시 $C_1 \wedge C$의 전제하에서 H의 충분조건을 모색한다. 만약 $C_1 \wedge C$이 H의 충분조건이라면 $C_1 \wedge C \Rightarrow H$라는 정리를 얻게 된다. 만약 $C_1 \wedge C$이 H의 충분조건이 아니라면 단계 v)로 진행한다.

vii) 이와 같은 단계를 계속하여 만족스런 결과가 도출될 때 까지 추론을 진행한다.

분석의 원리를 요약하면 다음과 같다.

첫째, 분석을 비유적으로 말한다면 H의 필요조건 C는 H를 포획하기 위한 포위망이라고 간주할 수 있고 따라서 분석 과정이란 H를 포획하기 위한 포위망을 수립하는 과정이라고 할 수 있다. 이 때 다른 H의 필요조건 C_1을 가져오면 $C_1 \wedge C$는 H를 포획하기 위한 C 보다 더 축소된 포위망이 된다. 이런 과정을 되풀이 하면 H를 포획하기 위한 포위망은 점점 좁아지게 되고 결국 H를 포획하게 된다.



<그림 1> 포획자로서의 필요조건

둘째, 분석은 주어진 가설의 필요조건을 찾는 과정으로 시작한다. 이 때 필요한 추론은 연역이다. 그리고 그렇게 찾은 필요조건이 충분조건이 될 가능성을 타진하기 위해서는 선택이라는 절차가 필요하다. 강문봉(1992)은 충분조건 찾기가 "직관"이나 "선택"이라는 다소간 신비스런 과정이 있음을 주장하는데 문제해결을 위하여 그렇게 되어야 할 상황이 있을지도 모르지만 분석에서 선택이란 무비판적 선택이 아니라 필요조건을 통한 합리적 선택이다.

마지막으로 분석 과정에서 가장 중요한 것은 H의 필요조건을 찾기 위한 연역 과정이 효과적으로 작동할 수 있는 수학적 지식 또는 자원을 선택하는 일인데 이 선택은 해결자의 통찰이나 수학적 경험 또는 시행착오 등과 같은 다양한 인지 방법에 의하여 주어진다. 이 점은 나중에 다시 논의하겠다.

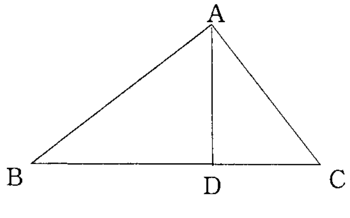
분석의 절차에 대한 이해를 돕기 위하여 먼저 다음과 같은 기하 문제를 보자.

i) 가설 설정: '직각삼각형이 존재한다.'라는 가설을 H라고 하자. 각각의 수에 대응하는 길이를 가진 도형의 존재 여부를 모르는 상태, 예를 들면 자연수의 세계 또는 유리수의 세계에서는 유의미한 가설이다.

ii) 연역: 삼각형 $\triangle ABC$에서 $\angle BAC$를 직각이라고 하고 $\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=c$, $\overline{AC}=b$라고 하면 $\overline{AD}=\frac{ab}{c}$이고 따라서 $\overline{BD}=\frac{a^2}{c}$이고 $\overline{CD}=\frac{b^2}{c}$가 된다. 그러므로 $c=\overline{BC}=\overline{BD}+\overline{CD}=\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{c}$으로부터 $c^2=a^2+b^2$을 얻는다.

iii) H의 필요조건 구하기: $c^2=a^2+b^2$는 직각삼각형의 존재에 대한 필요조건이다.

iv) H의 충분조건 구하기: 여기서 $c^2=a^2+b^2$는 다시 H의 충분조건이 됨을 확인 할 수 있다.



<그림 2> 피타고라스 정리

필요조건인 동시에 충분조건이 되는 경우의 대수적 예로서 $x^2-3x+2=0$의 근의 존재 문제를 보자. 이 문제에 대한 분석 절차는 다음과 같은 단계를 밟게 된다.

i) 가설 설정: '주어진 방정식 $x^2-3x+2=0$이 근을 가진다.'라는 가설을 H라고 하자.

ii) 연역: 주어진 방정식 (동치) 변형하면 $(x-2)(x-1)=0$을 얻고 이것은 다시 '$x=2$ 또는 $x=1$이다.'을 얻는다.

iii) H의 필요조건 구하기: '$x=2$ 또는 $x=1$이다.'를 명제 C라고 하면 C는 H의 필요조건이다.

iv) H의 충분조건 구하기: 여기서 C는 다시 H의 충분조건임을 알 수 있다.

그러나 어떤 명제가 가설의 필요조건은 되지만 충분조건이 되지 않는 경우는 허다하게 있는데 예를 들어 방정식 $\sqrt{x}=-x$이 그런 경우이다. 이 방정식에 대한 분석 과정은 다음과 같다.

i) 가설 설정: '주어진 방정식 $\sqrt{x}=-x$이 실근을 가진다.'라는 가설을 H라고 하자.

ii) 연역: 주어진 방정식의 근을 x라고 하면 양변을 제곱하여 $x=x^2$을 만족하고 이것은 '$x=0$ 또는 $x=1$이다.'를 함의한다.

iii) H의 필요조건 구하기: '$x=0$ 또는 $x=1$이다.'를 명제 C라고 하면 C는 H의 필요조건이다.

iv) H의 충분조건 구하기: 여기서 C는 H의 충분조건이 아니다. 그러므로 C로부터 $x=1$을 제거하고 남은 명제, 즉 '$x=0$'를 C_1이라고 하면 C_1은 H의 충분조건이다. 그러므로 주어진 방정식의 실근을 가지기 위한 필요충분조건은 '$x=0$'이다. 이 과정에서 필요조건으로부터 선택이라는 절차에 의하여 충분조건이 확립되었다.

분석의 과정에서 다양한 대수적 조작을 가하여 연역을 하게 되는데 이 때 사용하는 대수적 조작이 비가역적일 경우, 일반적으로 필요조건이 곧바로 충분조건이 되지는 않는다. 예를 들면 방정식 $\sqrt{x}=-x$의 변형 과정에서 양 변을 제곱하는 조작은 조작자 $\Phi(x)=x^2$를 적용하는 과정인데 여기서 Φ는 1-1이 함수가 아니므로 이 조작은 가역적이 아니다. 현행 교과서에서 충분조건의 찾기에 대한 지도는 분석에 대한 일반적인 지도 대신에 사안별로 접근하고 있는데 예를 들면 분수방정식 또는 무리방정식 문제에서는 무연근이라는 개념을 사용한다.

현행 교과서의 진술을 보면 분석 절차를 사용하면서도 그 절차를 명료화하기 보다는 표준적인 풀이 방법을 제시하고 학생들로 하여금 자동화하기를 기대한다. 그 결과 자동화가 되었다고 하더라도 그 과정이 반성적으로 접근되지 않았기 때문에 구조적으로 약간 더 복잡한 문제를 만나게 되면 기존 방법은 효과적으로 작동되지 않는 현상이 나타난다. 이는 Skemp(1971)가 말하는 전형적인 도구적 이해가 되는 경우이다. 이 상황을 이해하기 위하여 연립방정식

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y=x+k \end{cases}$$

가 실근을 가지기 위한 k의 값을 결정하는 문제를 보자. 현행 교과서에서는 이 연립방정식의 풀이를 어떻게 소개하고 있을까? 현행 교과서에 의하면 먼저 주어진 두 방정식을 연립하여 $x^2+(x+k)^2-1=0$을 얻고 이 방정식을 정돈하여 $2x^2+2kx+k^2-1=0$을 구하여 방정식의 실근을 가질 조건으로부터 $k^2-2(k^2-1)\geq 0$을 얻는다. 여기서 다시 이것을 정돈해서 풀면 $|k|\leq\sqrt{2}$라는 결과를 얻는다. 여기까지는 거의 자동적으로 수행된다.

그러나 이 분석에 대하여 다음과 같은 분석을 대조해보자. 먼저 '연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y=x+k \end{cases}$이 실근을 가질 k가 존재한다.'는 가설을 여전히 H라고 하고, 명제 '방정식 $x^2+(x+k)^2-1=0$는 실근을 가진다.'를 C라고 하며, 명제 '방정식 $x^2+(x+k)^2-1=0$는 $|x|\leq 1$에서 실근을 가진다.'를 D라고 하면 여기서 H에 대하여 분석 과정은 H로부터 C를 함의하는 연결과 H로부터 D를 함의하는 연결을 생각할 수 있는데 두 결과는 동일하게 $|k|\leq\sqrt{2}$라는 H의 필요조건을 얻는다. 그러나 이 두 연결에 의한 결과의 일치는 우연이다. 그러므로 이 과정에서 얻은 결과는 항상 충분조건이 될 수 있는가를 검사해야 한다. 만약 충분성을 검사하지 않고 그냥 둔다면 보다 복잡한 문제를 해결하는데 장애를 야기한다.[8] 연립방정식

8) 실제로 원래 문제를 무비판적으로 접근하게 되면 연립방정

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y^2=x+k \end{cases}$$

이 실근을 가지기 위한 k를 결정하는 문제가 이러한 상황을 예시해준다. 만약 주어진 문제 $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y^2=x+k \end{cases}$를 연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y=x+k \end{cases}$의 문제의 풀이와 동일한 것으로 간주한다고 유추한다면[9] 먼저 $y^2=x+k$을 x에 대하여 정돈하여 $x^2+y^2=1$에 대입하여 $x^2+x+k=1$을 얻는다. 이 식으로부터 x가 실근을 가질 조건을 구하는데 이렇게 풀면 $k \leq \frac{5}{4}$라는 필요조건을 얻는다.[10] 그러나 이 조건은 주어진 방정식이 실근을 가지기 위한 충분조건이 아니다. 따라서 주어진 방정식의 근의 존재에 대한 충분조건을 구하기 위해서는 좀 더 정교한 추론이 필요하다. 즉 H로부터 함의될 다음 단계는 '방정식 $x^2+x+k=1$이 실근을 가진다'라는 명제가 아니라 '방정식 $x^2+x+k=1$이 $|x| \leq 1$에서 실근을 가진다.'는 명제이다. 후자의 조건에 의거하게 되면 $-1 \leq k \leq \frac{5}{4}$을 얻고 이것은 주어진 연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y^2=x+k \end{cases}$이 실근을 가지기 위한 충분조건임을 확인할 수 있다. 실제로 상세한 분석 절차에 의하면 주어진 연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y^2=x+k \end{cases}$은 k의 값의 변화에 따라 근의 개수가 다음 표와 같이 됨을 확인할 수 있다.

<표 1> k의 값에 따른 근의 개수의 변화

k	…	-1	…	1	…	$\frac{5}{4}$	…
$x^2+x+k=1$의 $\lvert x \rvert \leq 1$에서 근의 개수	0	1	2	2	2	1	0
주어진 연립방정식의 근의 개수	0	1	2	3	4	2	0

이제 이 문제를 약간 수정하여 다음과 같은 문제를 생각해보자. 즉 연립방정식

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y=x+k \end{cases}$$

가 중근을 가질 k를 구하라는 문제를 생각해보자. 현행 교과서에 의하면 이 문제는 주어진 방정식의 둘째 식을 첫째 식에 대입하여 $x^2+(x+k)^2-1=0$을 얻고 이것을 정돈하여 $2x^2+2kx+k^2-1=0$을 구하여 방정식의 중근을 가질 조건으로부터

$$k^2-2(k^2-1)=0$$

을 얻으며 이것을 정돈해서 풀면 $|k|=\sqrt{2}$라는 결과를 얻는다. 여기서 방정식 $x^2+(x+k)^2-1=0$이 $|x| \leq 1$에서 중근을 가질 조건을 구하지 않았지만 결과는 동일하다. 이제 여기서도 연립방정식

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y^2=x+k \end{cases}$$

가 중근을 가질 k를 구하라는 문제를 생각해볼 수 있는데 이 경우에는 위의 표 1도 즉각적인 도움은 되지 않으며[11] 두 방정식이 만드는 그래프를 비교함으로서 답을 확인할 수 있다.[12] 그러나 그래프에 의존하는 것이 만족스럽지 않다면 다른 도구를 사용하여 가능하다. 여기서 제안하는 방법은 학교수학의 수준을 넘을지도 모르지만 일단 소개하기로 한다.[13] 물론 여기서도 분석을 사용한다는 점은 앞에서 했는바와 그대로이다. 먼저 곡선

식 $x^2+y^2=1$과 $y=x+k$가 $0 \leq x \leq 1$에서 실근을 가질 조건을 구하는 문제에서 난관에 봉착하게 된다.

9) 학생뿐만 아니라 심지어 많은 교사들도 이 문제를 그와 같이 다룬다는 것을 관찰 결과로부터 확인할 수 있었다. 이런 점은 기계적 학습이 세습된 것과 같은 인상을 준다.

10) 이 문제를 어떤 교사 집단들을 대상으로 검사를 실시한 결과 72%가 이와 같은 답을 제시했다. 그러나 기하학적으로 접근한 경우에는 이보다 나은 비율로 개선되었다. 그러나 그 경우에도 대수적으로 처리한 결과와 기하학적으로 처리한 결과의 서로 다른 점을 설명할 수 없었다.

11) 실제로는 근의 개수가 홀수 개가 되는 점에 주의하면 중근을 찾는 것은 가능하다.

12) 여기서 중근을 가질 k의 값은 각각 $k=\frac{5}{4}$이거나 $k=1$이거나 $k=-1$이다.

13) 사실 법선 개념을 사용하지 않고 접선 개념을 사용한다면 고등학교에서도 이해할 수 있는 수준이지만 법선 개념이 약간 편리한 점이 있다.

$x^2+y^2=1$과 곡선 $y^2=x+k$가 한 점에서 접한다면 그 점에서 법선 벡터가 일차 종속이 되어야 한다는 점에 착안한다. 즉 각각의 접점에서 두 곡선의 법선 벡터는 일차종속이 되므로 바로

$$\det\begin{pmatrix} 2x & 2y \\ -1 & 2y \end{pmatrix}=0$$

을 만족한다. 이것을 풀면 $y=0$ 또는 $x=-\frac{1}{2}$를 얻고 이것으로부터 주어진 두 곡선이 접하기 위한 필요조건으로서 접점의 x 좌표가 각각 $x=-1$, $x=-\frac{1}{2}$, $x=1$임을 얻는다. 이 점을 원래의 식에 대입하면 k는 각각 $k=1$, $k=\frac{5}{4}$, $k=-1$이 된다. 역으로 k의 이 세 값은 주어진 두 곡선이 접하기 위한 충분조건이 된다는 것을 확인할 수 있다.

이런 예에서 볼 수 있는 것이 아니라고 하더라도 무비판적 풀이에 의한 자동화는 실제로 많은 문제에서 문제해결력의 향상을 가로막고 있다. 예를 들면 $y=\frac{1+x}{1+x+x^2}$의 값의 범위를 결정하는 문제에서 주어진 문제를 x에 대한 이차방정식

$$y(1+x+x^2)=1+x$$

문제로 변형하고 그것이 실근을 가질 조건을 찾는다. 여기서 이 방정식을 x에 대한 식으로 정돈하면

$$yx^2+(y-1)x+y-1=0$$

된다. 그런데 $y\neq 0$이면 이 이차방정식이 실근을 가지기 위한 문제가 되므로 그 동치되는 조건, 즉 판별식이 0 이상임을 사용하면 주어진 문제는 즉시 해결된다. 그러나 $y=0$가 되는 경우라면 이 방정식은 이차방정식이 아니므로 여기서는 기계적 방법이 효과적이지 않음이 발견된다. 이와 같은 풀이 방법을 정확하게 이해하고 있는가를 확인하기 위해서는 '$y=\frac{1+x^2}{1+x^2+x^4}$의 값의 범위를 결정하라'는 문제를 제시하면 충분하다.[14]

III. 좋은 분석이 되기 위한 전제

분석의 절차를 사용하는 것과 좋은 분석이 된다는 것은 별개의 문제이다. 그 이유는 전자는 논리적 문제이고 후자는 수학적 문제이기 때문이다. 수학적 문제라는 의미는 문제해결에서 가설 H에 대하여 좋은 필요조건을 얻기 위해서는 보다 정교한 수학적 장치를 가져야 한다는 점을 말한다. 동시에 분석 과정에서 가설 H에 대한 충분조건을 통찰이나 직관에 의하여 찾는 것은 논리적 과정이 아니라 심리적 과정이기 때문에 여기서는 다룰 쟁점은 아니다.

작도 문제와 동등한 초등 기하의 문제나 동치 조작으로 이루어진 분석이라면 일반적으로 그 결과는 주어진 가설의 필요조건인 동시에 충분조건이 된다.[15] 그러나 대부분의 수학 문제는 분석의 결과로 발견한 필요조건이 즉시 충분조건이 되지 않으며 문제가 복잡해질수록 이러한 경향성은 높아진다. 그러나 그럼에도 불구하고 앞에서 예시한 바와 같이 두 곡선의 접점을 구하는 문제에 대한 두 가지 표상, 즉 이차 방정식의 문제로의 표상과 법선 벡터의 문제로의 표상이 보여주는 것과 같이 '정교한 문제해결 도구'가 주어진다면 가설로부터 얻은 필요조건은 즉각적으로 충분조건이 될 수 있다. 여기서 '정교한 수학적 도구'라는 의미를 이해하기 위해서 다음 2 가지 사례를 통해서 설명하겠다.

예 1. 방정식 $\sqrt{x}=-x$의 근의 존재 문제를 생각해보자. 이 방정식의 근이 존재한다는 가설을 H라고 하자. 통상적 분석으로는 $\sqrt{x}=-x$에 양변을 제곱하여 $x-x^2=0$를 얻고 이것으로부터 H의 필요조건 '$x=0$ 또는 $x=1$'을 얻는다. 그러나 여기서 주어진 H의 필요조건은 충분조건이 아니다. 반면에 주어진 방정식을 $\sqrt{x}+\sqrt{x}\sqrt{x}=0$과 같이 변형하면 이것은 다시 $\sqrt{x}(1+\sqrt{x})=0$가 되며 여기서 $1+\sqrt{x}$는 0이 될 수 없다는 것을 이용하면 결국 $\sqrt{x}=0$이 되어 그 결과 H의 필요조건 '$x=0$'을 얻는데 이것은 H의 충분조건

14) 이 경우에는 주어진 문제를 원래 문제로 환원할 경우, $x\geq 0$인 경우에 대하여 생각해야 한다. 즉 $y(1+x+x^2)=1+x$이 $x\geq 0$에서 실근을 가질 조건을 구해야 한다.

15) 우정호(2002)가 제시된 기하 문제들은 모두 필요조건인 동시에 충분조건이다. 그러나 기하 문제들에서 필요조건이 다시 충분조건이 될 필요는 없다. 예를 들면 본문에서 제시한 원과 포물선의 교점에 관한 문제들이 그러한 경우이다.

이다.

필요조건에서 근의 개수가 유한인 경우는 그 근을 선별하여 H의 충분조건을 얻을 수 있다. 실제로 학교수학에서는 무연근 개념을 도입하여 이런 문제를 처리하고 있다. 그러나 일반적으로 충분조건이 그렇게 선별될 수 있는 것은 아니다. 다음 예 2는 미분가능 함수의 극값을 가질 조건을 찾는 과정인데 대부분의 기초 미적분학 교재에 나타난다.

예 2. '함수 f가 $x=a$에서 극소가 될 조건을 구하는 문제'를 생각해보자. 여기서 편의상 f는 몇 번이고 미분가능하다고 전제하자. 이제 주어진 문제에 대한 가설은 '함수 f가 $x=a$에서 극소이다.'가 되겠다. 이 가설을 편의상 H라고 하자. 가장 원초적 수학적 도구라면 미분법의 정의를 사용하는 것이 되겠는데 이 지식에 바탕을 둔다면 충분히 0에 가까운 양수 h에 대하여 $f(a+h)-f(a) \geq 0$이고 동시에 충분히 0에 가까운 음수 h에 대하여 $f(a+h)-f(a) \geq 0$이므로 따라서 이 두 식으로부터 $f'(a)=0$를 얻는다. 그러므로 조건 '$f'(a)=0$'을 C라고 하면 C는 H의 필요조건이다. 그러나 C는 H의 필요조건이 아니다. 여기서 H의 충분조건으로서 변곡점 개념을 제시할 수 있는데 변곡점 개념은 단순히 그래프의 개형으로부터 발견될 수 있겠지만 이 개념이 충분조건으로 작용하기 위해서는 Taylor 정리와 같은 보다 정교한 수학적 지식이 필요하다. 그러므로 주어진 문제를 해결하기 위하여 주어진 함수 f에 대한 1차 테일러 다항식을 사용하면

$$f(a+h)-f(a)=f'(a)h+\frac{f''(\xi)h^2}{2}$$

를 얻는다. 여기서 f가 $x=a$에서 극소라면, $f'(a)=0$이고 동시에 $f''(a) \geq 0$가 된다. 그러나 '$f'(a)=0$이고 동시에 $f''(a) \geq 0$이다.'는 H의 충분조건이 아니다.[16] 그러나 $f'(a)=0$이고 $f''(a)>0$이면 f는 $x=a$에서 극소이다. 여기서 테일러 근사식을 더 정교하게 사용할 수 있다면, 즉 f가 충분히 미분가능이라면 H의 충분조건은 보다 정교하게 세분화될 수 있다.

16) 예를 들면 $f(x)=x^3$과 같은 함수는 $f'(0)=0$이고 $f''(0) \geq 0$이지만 $x=0$에서 극소가 아니다.

이와 같이 주어진 명제의 충분조건을 얻기 위해서는 먼저 필요조건 찾기를 통하여 선택의 범위를 좁힐 수 있다는 것을 알 수 있고 더 좋은 충분조건이 될 수 있는 필요조건을 구하기 위해서는 해결자의 수학적 도구 조작능력이 중요한 역할을 한다는 것을 확인할 수 있다.

Ⅳ. 결론과 제언

필요조건과 충분조건 개념은 집합, 논리, 명제를 다루는 단원에서 소개된다. 그러나 이 단원에서 도입된 필요조건/충분조건 개념은 이후에 주어진 단원에 나타나는 개념들과 연결되어 있지 않고 있음을 현행 중등 교과서로 부터 확인할 수 있는 바이다. 실제로 필요조건이라는 용어는 급수의 수렴성과 관련된 부분에서 단 한번 언급되고 있다. 이와 같이 필요조건/충분조건 개념이 고립되어 있다면 이 개념을 교육과정에서 삭제되어도 문제될 것이 없지 않는가? 실제로 학생들은 필요조건과 충분조건 개념을 도구적으로 이해하고 있고 교사들도 그 개념을 가르치는 이유에 대하여 분명한 대답을 제시하지 못하고 있으며 그 결과 이 개념을 기계적으로 지도하고 있는 실정이다. 이 점에 대해서 결론은 하나뿐이다: 필요조건 충분조건을 수학교육에서 삭제하자. 아니면 분석 추론을 명시화 하여 필요조건/충분조건과 같은 분석 개념의 하위 개념들을 논리적으로 연결하자. 이렇게 하여 형식주의에 의하여 잠간 동안 사라진 분석을 전면에 내세우자. 지금은 문제해결이 학교수학에서 중핵을 차지하고 있는 만큼 분석 개념이 부활될 때도 되었다.

분석은 그 내적 과정에서 연역이 포함되어 있기 때문에 학습이 용이한 주제가 아니다. 이 점은 분석이 연역보다 더 높은 수준의 사고를 요구한다는 것을 시사한다. 이러한 관찰은 분석 절차를 학교수학의 모든 곳에 적용한다는 것은 무리가 있음을 시사한다. 그러나 분석 개념은 방정식과 같은 대수적 문제에서 무비판적이지만 이미 사용하고 있다. 이것은 분석 개념을 선택적으로 적용하면 학교수학에서 명시적으로 지도 가능하다는 것을 시사한다. 즉 현 교과서에서 가정-결론-증명의 형식을 사안에 따라 분석 추론이라는 보다 원초적인 형식으로 전환함에 있어서 타당성이 보인다. 또 수월성 교육이나 영재교육에서는 보다 높은 수준의 추론이나 반성적 사고가

요구되는 만큼 이런 영역에서 분석의 학습은 문제 제기에서 필요하고 더 나아가 자연과학의 영역과 연결성을 도모할 수 있다는 점에서도 고무적이라고 판단된다

참 고 문 헌

강문봉 (1992). 분석법에 관한 고찰, 대한수학교육학회 논문집. 2(2). pp.81-93.

우정호 (2002). 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울: 서울대학교 출판부.

유윤재(2009). 분석에 대하여, 한국수학사학회지. 22(1). pp.75-88.

Anderson, J. R. (1995). *Cognitive Psychology and Its Application*. New York: W. H. Freeman

Buck, R. C. (1965). *Advanced Calculus.(2nd ed.)* New York: McGraw-Hill.

Heath, T. L. (1981). *A History of Greek Mathematics*. New York: Dover.

Herstein, I. N. (1964). *Topics in Algebra*. New York: Blaisdell.

Newell, A., & Simon, H. (1972). *Human Problem Solving*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Polya, G. (1957). *How to Solve It(2nd ed.)*, Princeton: Princeton University Press.

Polya, G. (1968). *Mathematics and Plausible Reasoning. Vol. II*: Patterns of Plausible Inference(2nd ed.) Princeton: Princeton University Press.

Skemp, R. R. (1971). *The Psychology of Learning Mathematics*. Harmondsworth: Penguin Books

Roles of Analysis In Problem Solving

Yoo, Yoon Jae
Department of Mathematics Education, Teachers' College
Kyungpook National University
E-mail: yjyoo@knu.ac.kr

The article discusses roles of analysis in problem solving, especially the problem posing. The author shows the procedure of analysis like the presentation of the hypothesis, the reasoning for the necessary conditions and the sufficient condition. Finally the author suggests that the analysis should be reviewed in the school mathematics.

* ZDM Classification : 01A20, 97C90
* 2000 Mathematics Subject Classification : U24, H14, F54, G78
* Key Words : analysis, necessary condition, sufficient condition, problem solving, problem posing