

중도절단계획 하에서 보증시간을 가지는 부하분배모형의 신뢰도추정[†]

차영준¹

안동대학교 정보통계학과

접수 2009년 2월 9일, 수정 2009년 5월 8일, 게재확정 2009년 5월 15일

요약

시스템의 한 부품이 고장 나면 고장 난 부품이 분담하던 부하가 고장 나지 않은 다른 부품에 전가되어 다른 부품의 고장률에 영향을 주는 부하분배시스템에 대한 연구가 신뢰성 공학과 생물의학 분야에서 다양하게 이루어져왔다. 본 연구에서는 최소수명을 보증하는 부하분배체계의 체계단위수명 시험에서 부품의 수명관측이 불가능하며 체계의 수명관측이 가능한 경우에, 중도절단된 체계 고장데이터를 이용하여 부하분배체계의 평균수명과 체계 신뢰도의 최우추정치와 추정오차를 줄일 수 있는 수정된 최우추정치를 구하고 컴퓨터 모의실험을 통하여 그 성능을 비교한다.

주요용어: 보증시간, 부하분배모형, 신뢰도, 중도절단된 시스템수명, 평균수명.

1. 서론

쌍발엔진을 장착한 비행기, 이중구조 플라이 휠, 두 개의 신장을 가지는 인체기관 등과 같이 한 부품이 고장 나면 고장 난 부품이 분담하던 부하가 고장 나지 않은 다른 부품에 전가되어 운용부품의 고장률에 영향을 주는 부하분배시스템 (shared load system)에 대한 연구는 고장 메커니즘, 가정하는 통계 모형, 구성부품의 독립성 여부 등의 측면에서 매우 다양하게 이루어져왔다. 부품 및 시스템의 고장에 영향을 주는 외부 쇼크의 유형, 특정 부품의 고장이 다른 부품의 수명분포에 미치는 방식과 통계적 가정 등에 따라 시스템의 수명모형은 여러 가지 형태로 나누어진다 (Freund, 1961; Marshall와 Olkin, 1967; Block와 Basu, 1974; Proschan와 Sullo, 1976; Kapur와 Lamberson, 1977; Kunchur와 Munoli, 1994).

Freund (1961)는 한 부품이 고장이 나면 고장 난 부품이 분담하던 부하가 고장 나지 않은 다른 부품에 전가되어 정상부품의 고장률에 영향을 미치는 부하분배시스템모형을 다음과 같이 정의하였다. 두 부품이 모두 작동할 때 부품1과 2의 고장률을 각각 α, β 라고 하면, 부품1이 x_1 에서 고장 나는 순간 부품2는 x_1 시점부터 부품1이 분담하던 부하를 이전받아 고장률이 β 에서 β' 으로 변화하는 모형이다.

$$f_F(x_1, x_2) = \begin{cases} \alpha\beta' \exp\{-\beta'x_2 - (\alpha + \beta - \beta')x_1\}, & 0 < x_1 < x_2, \\ \alpha'\beta \exp\{-\alpha'x_1 - (\alpha + \beta - \alpha')x_2\}, & 0 < x_2 < x_1, \end{cases}$$

여기서 $\alpha, \alpha', \beta, \beta' > 0$ 이다.

[†] 이 논문은 2007학년도 안동대학교 국제학술교류보조금에 의하여 연구되었음.

¹ (760-749) 경북 안동시 송천동 388번지, 안동대학교 정보통계학과, 교수. E-mail: yjcha@andong.ac.kr

Freund (1961)모형을 이용하여 Hong (1998)은 품질 개선 및 신뢰성 증대 이유 등으로 시스템의 사용 초기에 고장이 거의 없는 경우를 고려한 즉 시스템의 최소 보증수명 (guarantee lifetime)을 반영할 수 있는 확장된 모형을 제안하였다.

$$f_H(x, y) = \begin{cases} \alpha\beta' \exp\{-\beta'(y - \mu) - (\alpha + \beta - \beta')(x - \mu)\}, & \mu < x < y, \\ \alpha'\beta \exp\{-\alpha'(x - \mu) - (\alpha + \beta - \alpha')(y - \mu)\}, & \mu < y < x. \end{cases}$$

이 때 순간고장률이 각각 α 와 β 이고 동일한 최소보증수명 μ 를 공통으로 가지며 두 부품 1과 2가 병렬구조를 이루는 시스템에서 부품1이 x 시점에서 먼저 고장이 나는 순간 부품2는 부품1이 분담하던 부하를 이전받아 순간고장률이 β 에서 β' 으로 변화한다. 한편, 부품2가 y 시점에서 먼저 고장이 나면 부품1의 순간고장률도 α 에서 α' 으로 변화하는 상황을 설명한다. 단, 두 개의 부품이 동시에 고장이 날 확률은 0이라 가정한다. 한편, 분해수리가 가능한 경우에는 부품의 고장정보를 파악할 수 있으므로 부품의 수명데이터를 모수의 추정에 활용할 수 있으나 수리가 불가능한 경우에는 부품에 고장이 발생하여도 시스템의 운용 중에 고장부품을 교체할 수 없을 뿐만 아니라 시스템에 고장이 발생하여야 고장사실을 인지할 수 있고 단지 시스템의 수명시간만 관측할 수 있다. 이와 관련하여 모형 및 관측 자료의 유형에 따라 다양한 연구가 있어왔는데, Hanagal (1992)은 Proschan와 Sullo (1976)이 제안한 모형 하에서 독립성과 대칭성에 대한 연구를 하였고 Hong 등 (1995)은 Freund 모형에서 신뢰함수에 대한 최우 추정량, 순서 제약된 최우추정치 및 일양최소분산불편추정량을 구하였다. Cho와 Kim (2003)은 이변량 지수모형 하에서 데이터가 제1종 관측중단된 경우에 모수를 추정하였다. Hong과 Kwon (1997)은 부품의 수명이 Freund 모형에서 부품수명을 관측할 수 없고 시스템수명만 관측할 수 있는 경우에 시스템 신뢰도의 최우추정량을 구하였으며, Hong과 Kwon (2002)은 부품의 수명이 Hong (1998)의 모형을 따를 때 부품의 수명자료를 관측할 수 있는 경우에 이를 이용하여 모형의 모수에 대한 최우추정량을 구하였다. Iyer와 Rossetti (1985)는 소프트웨어의 신뢰도가 처리시간 및 부하량의 영향을 받는다고 하였다.

본 연구에서는 품질 개선 및 신뢰성 증대 등의 이유로 시스템의 사용 초기에 고장이 거의 없는 경우를 고려한 즉 시스템의 최소보증수명을 반영할 수 있는 시스템단위수명 시험에서 부품의 수명관측이 불가능하며 체계의 수명관측이 가능한 경우에 부하분배체계의 평균수명 (mean time to failure; MTTF)과 시스템 신뢰도함수 (reliability function)의 최우추정치와 추정오차를 줄일 수 있는 수정된 최우추정치를 구하고 컴퓨터 모의실험을 통하여 그 성능을 비교한다.

2. 보증시간이 있는 부하분배모형에서 MTTF와 신뢰도 추정

시스템의 수명분포가 보증시간이 있는 부하분배모형을 따르는 n 개의 시스템을 수명시험하여 r 개의 시스템이 고장 나면 시험을 종료하는 상황을 고려하자. (x_i, y_i) 를 시스템 i 를 구성하는 관측 불가능한 두 부품의 수명, $v_i = \max(x_i, y_i)$ 를 관측 가능한 시스템 i 의 수명, $v_{(1)} \leq v_{(2)} \leq \dots \leq v_{(r)}$ 을 시스템수명의 순서화된 관측치로 정의한다. 또한 시험 중에 고장 난 부품 및 시스템은 교체할 수 없으며, 한 부품에서 고장이 발생하기 전까지 고장이 나지 않은 부품의 고장률은 동일하며 ($\alpha = \beta = \lambda$), 최소보증수명인 위치모수 (μ) 는 부품의 고장에 영향을 받지 않는다고 하자. 한 부품의 고장발생 전 고장률 (λ)과 고장발생 후 생존부품의 고장률 (α', β')의 비율을 나타내는 부하전이모수 θ ($\theta = \alpha'/\lambda = \beta'/\lambda$)를 활용하여 간단히 하면

$$h(v, w) = 2\theta\lambda^2 \exp\{-(2\lambda - \theta\lambda)(w - \mu) - \theta\lambda(v - \mu)\}, \quad (2.1)$$

이 된다. 여기서 $V = \max(X, Y), W = \min(X, Y)$ 이다. 위 결과를 이용하면 V 의 주변밀도함수

$h(v) = \int_{\mu}^v h(v, w)dw$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$h(v) = \begin{cases} \frac{2\theta\lambda}{2-\theta} [\exp\{-\theta\lambda(v-\mu)\} - \exp\{-2\lambda(v-\mu)\}], & \theta \neq 2, \\ (2\lambda)^2(v-\mu) \exp\{-2\lambda(v-\mu)\}, & \theta = 2. \end{cases}$$

그러므로 부하분배시스템의 평균수명과 신뢰도는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$MTTF = \begin{cases} \frac{1}{\theta\lambda} + \frac{1}{2\lambda} + \mu, & \theta \neq 2, \\ \frac{1}{\lambda} + \mu, & \theta = 2. \end{cases} \quad (2.2)$$

$$R(t) = \begin{cases} \frac{2}{2-\theta} \cdot \exp\{-\theta\lambda(t-\mu)\} - \frac{\theta}{2-\theta} \cdot \exp\{-2\lambda(t-\mu)\}, & \theta \neq 2, \\ \{1 + 2\lambda(t-\mu)\} \cdot \exp\{-2\lambda(t-\mu)\}, & \theta = 2. \end{cases} \quad (2.3)$$

수명분포 (2.2)를 따르는 n 개의 시스템을 수명 시험하여 고장 난 시스템을 교체하지 않고 $r(\leq n)$ 개의 시스템이 고장 날 때까지 얻어지는 시스템의 수명데이터를 $v_{(1)} \leq v_{(2)} \leq \dots \leq v_{(r)}$ 이라하면, $\theta \neq 2$ 일 경우의 우도함수는

$$L(\lambda, \theta, \mu | \text{데이터}) \propto \prod_{i=1}^r \left[\frac{2\theta\lambda}{2-\theta} [\exp\{-\theta\lambda(v_{(i)}-\mu)\} - \exp\{-2\lambda(v_{(i)}-\mu)\}] \right] \cdot \left[\frac{2}{2-\theta} \exp\{-\theta\lambda(v_{(r)}-\mu)\} - \frac{\theta}{2-\theta} \cdot \exp\{-2\lambda(v_{(r)}-\mu)\} \right]^{n-r} \quad (2.4)$$

이고, $\theta = 2$ 인 경우의 로그우도함수는 다음과 같다.

$$\ln L(\lambda, \mu | \text{데이터}) = 2r \ln 2\lambda + \sum_{i=1}^r \ln(v_{(i)} - \mu) - 2\lambda \sum_{i=1}^r (v_{(i)} - \mu) + (n-r) \ln \{1 + 2\lambda(v_{(r)} - \mu)\} - 2(n-r)\lambda(v_{(r)} - \mu) + \text{상수항}. \quad (2.5)$$

$\theta = 2$ 인 경우 식 (2.6)으로부터 모수의 최우추정치를 구하면 다음과 같다.

$$\hat{\mu} = v_{(1)}, \hat{\lambda} = \frac{2rb - s + \sqrt{s^2 + 4rbs + 8nr b^2 - 4r^2 b^2}}{4b\{(n-r)b + s\}}.$$

여기서 $b = v_{(r)} - v_{(1)}$ 이고 $s = t_1 - nv_{(1)}$, $t_1 = \sum_{i=1}^r v_{(i)}$ 이다.

특히 $\theta = 2$ 이며 $r = n$ 인 경우, 식 (2.7)에서 r 대신 n 을 대입하면 (2.8)의 최우추정치를 구할 수 있고, 이를 다시 (2.3)과 (2.4)에 대입하여 시스템의 $MTTF(m)$ 및 신뢰도에 대한 최우추정치를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\hat{\mu} = v_{(1)}, \hat{\lambda} = n/(t_1 - nv_{(1)}), \quad (2.6)$$

$$\hat{m} = t_1/n, \quad (2.7)$$

$$\hat{R}(t) = \left\{ 1 + \frac{2n(t - nv_{(1)})}{t_1 - nv_{(1)}} \right\} \exp \left\{ -\frac{2n(t - nv_{(1)})}{t_1 - nv_{(1)}} \right\}.$$

한편 $\hat{\mu}_c$ 을 부품수명이 관측 가능할 때 μ 의 최우추정치, $bias(\hat{\mu})$ 를 $\hat{\mu}$ 의 편의(bias)라 하면 $\hat{\mu}_c = \min_i \min(x_i, y_i) < \min_i \max(x_i, y_i) = \hat{\mu}$ 이므로 $bias(\hat{\mu}) \geq bias(\hat{\mu}_c) = 1/2n\lambda$ 이다. 따라서 μ 의 수정된 최우추정치를 $\tilde{\mu}$ 라하면

$$\tilde{\mu} = \hat{\mu} - 1/(2n\lambda). \quad (2.8)$$

$\theta = 2$ 인 경우 (2.7)로부터 λ 의 수정된 추정치 $\tilde{\lambda}$ 는 다음과 같다.

$$\tilde{\lambda} = \frac{2rb' - s' + \sqrt{s'^2 + 4rb's' + 8nr b'^2 - 4r^2 b'^2}}{4b' \{(n-r)b' + s'\}}.$$

여기서 $b' = v_{(r)} - \tilde{\mu}$ 이고 $s' = t_1 - n\tilde{\mu}$, $t_1 = \sum_{i=1}^r v_{(i)}$ 이다. MTTF 및 신뢰도의 수정된 추정치도 (2.3), (2.4)에 μ, λ 대신 $\tilde{\mu}, \tilde{\lambda}$ 를 대입하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\tilde{m} = 1/\tilde{\lambda} + \tilde{\mu}, \quad (2.9)$$

$$\tilde{R}(t) = \left\{ 1 + 2\tilde{\lambda}(t - \tilde{\mu}) \right\} \cdot \exp \left\{ -2\tilde{\lambda}(t - \tilde{\mu}) \right\}.$$

$\theta \neq 2$ 인 경우에는 식 (2.5)에서 위치모수를 제외한 모수의 폐쇄형 최우추정량을 구하는 것이 불가능하므로 수치적 방법을 활용한다. 이 경우에도 수정된 최우추정치를 $\tilde{\mu}$ 을 활용하여 λ, θ, m 및 $R(t)$ 의 수정된 최우추정치를 구할 수 있을 것이다.

3. 모의실험

본 절에서는 $\lambda = 0.01$, $\mu = 2.0$, $n = 20$, $t = 20$ 을 공통 조건으로 하고 ① $\theta = 2$, $r = n$, ② $\theta = 2$, $r < n$, ③ $\theta \neq 2$ 인 세 가지 경우에 모수와 MTTF와 신뢰도 $R(t)$ 의 최우추정치를 구하는 수치예제를 컴퓨터 모의실험을 통하여 제시한다.

① $\theta = 2$ 이고 $n = r = 20$ 인 경우

[단계1] $\lambda = 0.01, \mu = 2.0$ 인 지수분포로부터 난수를 20개씩 독립적으로 발생시켜 순서쌍 (x_i, y_i) 를 구성한다.

(48.52, 13.40), (20.19, 6.57), (22.19, 20.05), (129.54, 10.88), (10.05, 20.94), (229.12, 4.44),
 (118.68, 31.91), (11.44, 148.79), (21.10, 6.80), (2.41, 8.68), (6.13, 6.24), (81.98, 347.64),
 (108.99, 76.66), (91.98, 45.69), (34.18, 263.64), (34.25, 66.72), (156.16, 254.32), (6.53, 137.92),
 (5.05, 6.53), (131.95, 187.65).

[단계2] $\theta = 2.0$ 이므로 $\lambda = 0.02$ 인 지수분포를 따르는 z_i , $i = 1, 2, \dots, 20$ 를 발생시킨다.

0.615, 70.384, 8.528, 265.516, 4.995, 27.902, 8.45, 4.503, 1.702, 54.104, 6.746, 71.679, 41.45,
 8.183, 79.645, 59.655, 0.811, 19.266, 14.738, 118.966.

[단계3] [단계1]의 $\min(x_i, y_i)$ 와 [단계2]의 z_i 의 합을 오름차순으로 정리하여 $v_{(i)}, i = 1, 2, \dots, 20$ 를 구한다.

10.204, 14.630, 19.622, 20.040, 20.446, 34.526, 37.106, 45.062, 48.810, 60.244, 62.056, 110.618, 147.338, 153.560, 157.782, 159.560, 193.470, 225.338, 369.882, 541.912.

[단계4] 식 (2.8)-(2.14)를 활용하여 모수, MTTF 및 신뢰도의 최우추정치를 구한다.

표 3.1 최우추정치 및 수정최우추정치($\theta = 2, n = r = 20$)

구분	μ	λ	MTTF	$R(20)$
실제값	2.000	0.010	102.000	0.949
최우추정치	10.204	0.009	121.610	0.986
수정 최우추정치	7.419	0.009	121.610	0.947

② $\theta = 2$ 이고 $r < n$ 인 경우

10번째 시스템의 고장 발생 시에 수명시험을 중단 ($r = 10$)한다면 $\theta = 2$ 이고 $r = n$ 인 경우의 [단계3]에서 구한 $v_{(1)}$ 부터 $v_{(10)}$ 까지의 자료만 활용하여 식 (2.8)-(2.14)에 대입하여 최우추정치를 구하면 표 3.2와 같다.

표 3.2 최우추정치 및 수정최우추정치($\theta = 2, r = 10 < n = 20$)

구분	μ	λ	MTTF	$R(20)$
실제값	2.000	0.010	102.000	0.949
최우추정치	10.204	0.019	63.682	0.982
수정최우추정치	7.419	0.017	65.215	0.929

③ $\theta \neq 2$ 이고 $r = n$ 인 경우

$\lambda = 0.01, \theta = 1.6, \mu = 2.0$ 을 가지는 20개의 이중부품 부하분배시스템을 수명시험하여 모든 시스템이 고장 날 때까지 시험을 실시한다고 할 때 모의실험 절차는 다음과 같다.

[단계1] ①의 [단계1]과 동일하다.

[단계2] $\lambda = 0.016$ 인 지수분포를 따르는 $z_i, i = 1, 2, \dots, 20$ 를 발생시킨다.

2.759, 96.060, 218.801, 21.325, 2.448, 35.222, 80.278, 53.315, 86.495, 14.981, 19.020, 228.774, 21.406, 25.951, 35.050, 84.900, 98.351, 75.787, 10.026, 35.369.

[단계3] [단계1]의 $\min(x_i, y_i)$ 와 [단계2]의 z_i 값을 합하여 크기 순서로 정리하여 $v_{(i)}, i = 1, 2, \dots, 20$ 을 구한다.

12.489, 15.076, 16.159, 17.391, 25.150, 32.205, 39.662, 64.755, 69.230, 71.641, 82.317, 93.295, 98.066, 102.630, 112.188, 119.150, 167.319, 238.851, 254.511, 310.754.

[단계4] [단계3]의 시스템고장자료를 식 (2.5)에 대입하여 모수의 관심영역 (본 연구에서는 $0 < \hat{\lambda} \leq 2.0, 0.5 \leq \hat{\theta} \leq 2.5$, 단 $\theta = 2$ 제외)에서 전면탐색법으로 모수의 최우추정치를 구한다.

표 3.3 최우추정치 및 수정최우추정치($\theta \neq 2$)

구분	μ	λ	θ	MTTF	R(20)
실제값	2.000	0.010	1.600	114.500	0.958
최우추정치	10.204	0.009	1.999	121.343	0.986
수정최우추정치	7.419	0.009	1.703	116.352	0.963

위의 표 3.1-표 3.3에서 위치모수, 즉 시스템의 보증 수명에 대한 최우추정치의 오차가 크게 나타남을 알 수 있다. 이는 부품의 수명을 관측할 수 없고 시스템의 수명시간만 관측할 수 있기 때문에 나타나는 현상이며, 같은 이유로 MTTF의 추정오차도 비교적 크다고 할 수 있다. 그러나 최소수명을 보증하는 부하분배체계 하에서 중도절단된 시스템의 고장 자료를 이용할 경우 수정된 최우추정량이 추정오차의 관점에서 더 우수함을 알 수 있었다.

4. 결론

본 연구에서는 시스템의 사용 초기에 고장이 거의 없는 경우를 고려한 즉 시스템의 최소보증수명을 반영할 수 있는 부하분배모형 하에서 한 부품의 고장이 다른 부품의 고장률에 영향을 미치는 두 부품의 수명이 통계적으로 상호 종속적인 시스템에 대하여 시스템의 평균수명 및 신뢰도에 대한 최우추정치와 추정오차를 줄일 수 있는 수정된 최우추정치를 제안하였다. 시스템의 분해 또는 수리가 불가능하여 부품의 수명을 알 수 없는 경우에 중도절단된 시스템의 고장 자료만 이용하여 신뢰성 척도를 추정할 수 있음을 알 수 있다. 최소수명을 보증하는 부하분배체계 하에서 중도절단된 시스템의 고장 자료만을 이용할 경우 신뢰도에 대한 수정된 최우추정량이 추정오차의 관점에서 최우추정량보다 더 우수함을 알 수 있었다. 체계수명만 관측 가능한 경우 관측비용은 절감할 수 있으나 추정오차는 부품수명이 관측 가능한 경우에 비하여 다소 크지는 단점이 있는데, 이는 어느 정도 불가피하다고 사료된다. 단, 추정오차를 감소시키기 위한 추가적인 연구는 계속되어야 할 것으로 사료된다.

참고문헌

- Block, H. W. and Basu, A. P. (1974). A continuous bivariate exponential extension. *Journal of the American Statistical Association*, **69**, 1031-1037.
- Cho, K. H. and Kim, Y. I. (2003). Estimation of bivariate exponential model under censored data. *Journal of Korean Data & Information Science Society*, **14**, 751-758.
- Freund, J. E. (1961). A bivariate extension of the exponential distribution. *Journal of the American Statistical Association*, **56**, 971-977.
- Hanagal, D. D. (1992). Some inference results in modified Freund's bivariate exponential distribution. *Biomedical Journal*, **36**, 745-756.
- Hong, Y. W. (1998). A bivariate extension of the two-parameter exponential distribution. *The Korean Journal of Applied Statistics*, **11**, 185-192.
- Hong, Y. W. and Kwon, Y. M. (1997). Estimation of reliability for a two-component shared parallel system using system life time data. *Journal of Quality Management Society*, **25**, 206-212.
- Hong, Y. W. and Kwon, Y. M. (2002). Estimation of a bivariate exponential distribution with a location parameter. *Journal of Korean Data & Information Science Society*, **13**, 243-250.
- Hong, Y. W., Lee, J. M. and Cha, Y. J. (1995). Reliability estimation for a shared-load system based on Freund model. *Journal of Statistical Theory & Methods*, **6**, 1-7.

- Iyer, R. K. and Rossetti, D. J. (1985). Effect of system workload on operating system reliability: A study of IBM 3081. *IEEE Transactions on Software Engineering*, **11**, 1438-1448.
- Kapur, K. C. and Lamberson, L. R. (1977). *Reliability in Engineering Design*, John Wiley & Sons, New York.
- Kunchur, S. H. and Munoli, S. B. (1994). Estimation of reliability in freund model for two component system. *Communication in Statistics-Theory and Methods*, **23**, 3273-3283.
- Marshall, A. W. and Olkin, I. (1967). A multivariate exponential distribution. *Journal of the American Statistical Association*, **62**, 30-44.
- Proschan, F. and Sullo, P. (1976). Estimating the parameters of a multivariate exponential distribution. *Journal of the American Statistical Association*, **71**, 465-472.

Reliability estimation for shared load model with guarantee time under censoring scheme[†]

Young Joon Cha¹

Abstract

There are many situations arising in reliability engineering and biomedical science where failure of a subsystem increases the failure rate of other subsystem under shared load models. In this paper, the maximum likelihood estimates and the modified maximum likelihood estimates of mean time to failure and reliability function for shared load model with guarantee time are obtained by using censored system life data. Some illustrative examples are included.

Keywords: Censored system life data, guarantee time, mean time to failure, reliability function, shared load model.

[†] This research was supported by a grant from 2007 International Academic Exchange Program of Andong National University.

¹ Professor, Department of Information Statistics, Andong National University, Andong 760-749, Korea.
E-mail: yjcha@andong.ac.kr