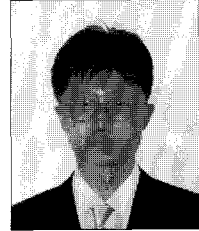


# 절점자연요소법

## Nodal Natural Element Method



유정완\*

\*(주)도화종합기술공사 해외영업부 이사

### 1. 서론

필자가 학교생활을 뒤로하고 사회에 나온지가 4년이 되어간다. 사회일도 나름 재미있겠지만, 떠나고보니 그리워지는게 학교인 듯 하다. 당시 필자의 연구는 주로 특정문제에의 수치해석의 적용이었는데, 한번은 수치해석법 자체를 주제로 한 적이 있었다. 이 연구는 결과도 좋았고 필자에게 좋은 수치해석 공부의 소위 착한 연구였다. 이에 본 기사를 통하여 소개하는 기회를 가지고자 한다.

### 2. 자연이웃보간법

본 기사의 제목인 절점자연요소법은 “절점자연요소법”이라는 수치해석법이 아닌 형용사 “절점”으로 수식되는 “자연요소법”을 의미한다. 자연요소법이란 영국의 수학자 Robin Sibson의 자연이웃과 자연이웃좌표의 개념을 이용한 수치해석법을 일컫는다.

자연이웃좌표는 기하에서 가장 기본적 분할인 Voronoi 도표와 그 분할에 따른 자연이웃으로 구현되는 이상적 보간법이라 할 수 있으며 그 식은 다음과 같다.

$$\phi_I(p) = |v^2(p, p_I)| / |v(p)| \quad (1)$$

여기서  $v(p)$ 는 점  $p$ 의 Voronoi 칸을  $v^2(p, p_I)$ 는  $p$ 와  $p_I$ 의 2차 Voronoi 칸을 나타내는데,  $p$ 와  $p_I$ 가 자연이웃이 아닌 경우  $v^2(p, p_I)$ 가 공집합을 이룸과  $|v(p)| = \sum |v^2(p, p_I)|$ 임을 인지하기 바란다. 그림 1(a)는 주어진 절점 집합에의  $p$ 에 대한 1차 및 2차 Voronoi 칸과 그 자연이웃을 보여준다.

자연이웃좌표는 식 (1)에서 직접 추론되는 다음과 같은 특성을 가진다.

$$0 \leq \phi_I \leq 1, \phi_I(p_I) = \delta_{I,p}, \sum \phi_I = 1 \text{ in } \Omega(\text{영역}) \quad (2)$$

자연요소법은 그 이름과 달리 무요소법의 하나이다. 식 (2)는 Sibsonian 근사가 보간임을 보여주는데, 이는 위에서 언급된 유일한 자연이웃을 가지는 성질과 더불어 무요소 근사에서는 찾기 어려운 자연이웃좌표의 매력적 특성이다. 자연이웃좌표는 또한 식 (2)을 포함한 단위원분할의 성질을 가진다. 따라서 상수함수의 정확한 구현과 추가함수로의 강화가 가능하다. 이 이외에도 자연이웃근사가 가지는 특성으로

$$\mathbf{x} = \sum \phi_I \mathbf{x}_I, \sum \phi_I (\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) = 0 \text{ in } \Omega \quad (3)$$

를 언급할 수 있는데, 여기서 식 (3)은 기하좌표의 정확한 구현을, 식 (3)은 2차 편미방정식의 수렴 필요조건인 선형다항공간의 생성을 의미한다.

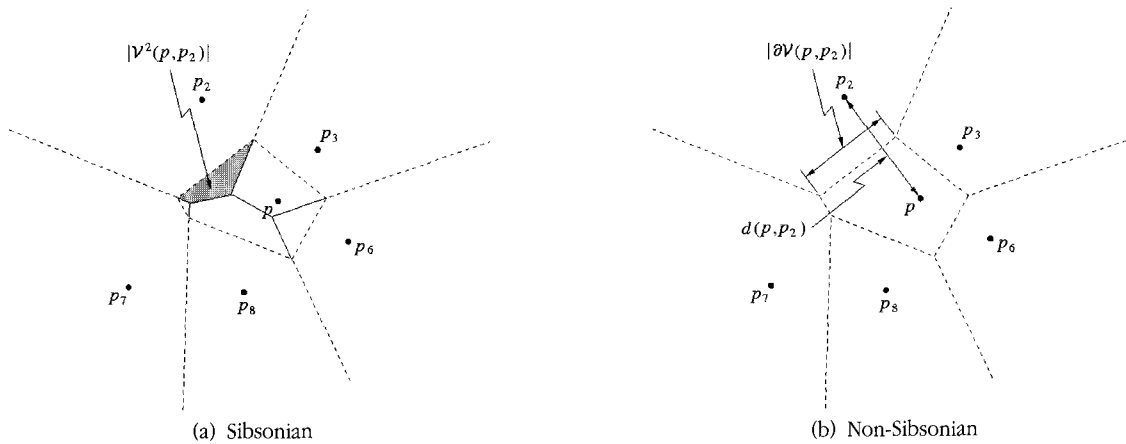


그림 1 주어진 절점 집합에의 p에 대한 Voronoi 칸과 그 자연이웃

Non-Sibsonian 보간법은 Vitali V. Belikov가 제안한 자연이웃의 개념을 바탕으로 한 또다른 자연이웃방법으로 다음과 같이 정의된다.

$$\phi_I(p) = \frac{|\partial \nu(p, p_I)|}{d(p, p_I)} \Bigg/ \sum_J \frac{|\partial \nu(p, p_J)|}{d(p, p_J)} \quad (4)$$

Non-Sibsonian 보간은 상기 Sibsonian의 특성에 더해 볼록 및 비볼록 영역의 경계에서 정확히 선형이라는 특성을 가진다(Sibsonian은 볼록영역 경계에서만 선형임). 따라서 유한요소법에서와 같이 Dirichlet 및 재료 경계조건을 자연스럽게 충족시킬 수 있다. 본 연구에서는 이같은 장점으로 인해 non-Sibsonian 보간법을 사용하였다.

### 3. 연구동기

자연요소법은 Jean Braun과 Malcolm Sambridge가 상기 자연이웃보간법을 Galerkin방법에 도입한 이래 Natarajan Sukumar에 의해 그 기본이 정립되었다. 여기서 요구되는 적분은 이면망에 Gaussian 구적법을 적용하는 방식으로 이루어졌는데, 이는 자연요소법에 적합한 방법으로 보기에는 어려움이 있었다. 그 이유는 이같은 적분방법을 사용한 많은 무요소법에서와 같이 피적분함수가 다항식이 아니고 피적분함수 받침이 일반적으로 적분칸과 일치하지 않기 때문이다. 실제로 기존의 자연요소법은 근사 및 적분의 정당성을 확인하는 조각시험을 통과하지 못했다(조각시험에의 통과는 무요소법에서 수렴의 충분조건으로 필요조건은 아니다).

본 연구는 자연요소법에 좀더 적합한, 즉 이면망이 아닌 Voronoi 도표를 사용한 그리고 조각시험을 만족하는 적분방법을 찾고자하는 목적에서 출발하였다. 본 연구에서는 이른바 절점영역 적분을 시도하였고 그 결과는 상당히 긍정적이었다.

### 4. 변분기본들

앞서 언급된 것처럼 본 연구에서는 절점을 중심으로 하는 적분을 시도하였다. 여기서 절점에서의 직접 적분은 적절하지 못하는데, 이는 약한형의 불충분적분으로 인한 공간적 불안정성 때문이다. 따라서 절점의 Voronoi 칸으로 대변되는 절점영역 적분을 시도하였는데, 그 시작은 Hu-Washizu형의 3개장 범함수로 표현되는 다음과 같은 에너지 식이다.

$$P(\mathbf{u}, \boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon} d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : (\nabla^s \mathbf{u} - \boldsymbol{\epsilon}) d\Omega - \int_{\partial\Omega} \mathbf{T} \cdot \mathbf{u} d\Gamma \quad (5)$$

여기서, 응력텐서  $\boldsymbol{\sigma}$ 가 Lagrange 승수로 사용됨을 주목하기 바란다.

범함수 (5)의 정류조건은 변위변분  $\boldsymbol{\eta}_u \in H_0^1(\Omega)$ , 변형변분  $\boldsymbol{\eta}_\epsilon \in L^2(\Omega)$ , 응력변분  $\boldsymbol{\eta}_\sigma \in L^2(\Omega)$ 에 대해 다음과 같은 평형방정식, 탄성구성방정식, 변형-변위관계식을 주는데 이들이 본 공식의 지배방정식을 이룬다.

$$\delta P(\cdot, \boldsymbol{\eta}_u) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \nabla^s \boldsymbol{\eta}_u d\Omega - \int_{\partial\Omega} \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\eta}_u d\Gamma = 0 \quad (6)$$

$$\delta P(\cdot, \boldsymbol{\eta}_\epsilon) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\eta}_\epsilon : (\mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\sigma}) d\Omega = 0 \quad (7)$$

$$\delta P(\cdot, \boldsymbol{\eta}_\sigma) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\eta}_\sigma : (\nabla^s \mathbf{u} - \boldsymbol{\epsilon}) d\Omega = 0 \quad (8)$$

여기서, 풀어야 할 식과 미지수의 갯수는 각각 3개에 달하지만, 실질적으로 1개의 미지수를 가진 1개의 이산식만이 풀어야 할 대상으로 귀결된다.

### 5. 이산화

상기 지배방정식의 근사해를 얻기위한 첫단계는 Hilbert 공간의 무한차원 부분공간인 변위해 공간을 형상함수에 의해

생성되는 그 유한차원 부분공간으로 대체하는 것으로 그 형상 함수로 앞서 기술된 것처럼 non-Sibsonian 보간을 사용하였다.

변형해 공간에 대해서는 다음과 같은 그 유한차원 부분 공간을 사용하는데,

$$S_\epsilon^h = \{ \epsilon^h \in S_\epsilon : \epsilon^h|_{\Omega_L} = \psi_\epsilon(\mathbf{x}) \mathbf{a}_\epsilon^L, \mathbf{a}_\epsilon^L \in E^n \} \quad (9)$$

여기서,  $\Omega_L$ 은 절점  $p_L$ 에 대한 영역으로 다음과 같이 Voronoi 칸을 기본으로 정의되었다.

$$\Omega_L = \{ p \in E^n : p \in \Omega \cap \nu(p_L) \} \quad (10)$$

위 변형해 공간 근사 및 동일한 방법의 응력해 공간 근사는 식 (9)에서 정의된대로 절점영역간 불연속이다. 따라서 이 근사들에 대한 변형-변위관계식 (8)은 다음과 같이 각 절점영역에서 정의된다.

$$\epsilon^h|_{\Omega_L} = \nabla^s \mathbf{u}^h|_{\Omega_L} = \psi_\epsilon \left( \int_{\Omega_L} \psi_\sigma^T \psi_\sigma d\Omega \right)^{-1} \int_{\Omega_L} \psi_\sigma^T \nabla^s \mathbf{u} d\Omega \quad (11)$$

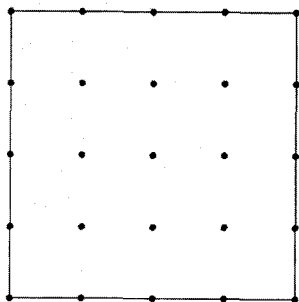
이와 유사하게 응력식 (7) 또한 각 절점영역에서 정의되는데 본 기사에서 그 상술은 생략하고자 한다.

본 연구에서 구배장은 절점영역 (10)에서 상수함수로 가정하였는데, 이는 계산의 단순화 뿐만아니라 상기된 연구 목적의 달성을 위해 필요한 선택이었다. 그 결과 이 방법에서 가장 중요한 도구인  $\nabla \phi$ 가 전적으로 절점영역경계에서의 함수값으로 다음과 같이 주어진다.

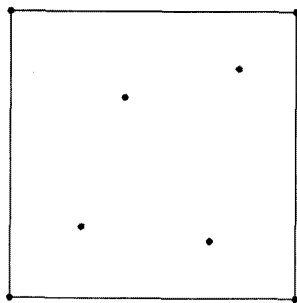
$$(\nabla \phi)_i|_{\Omega_L} = \frac{1}{A_L} \int_{\Omega_L} (\nabla \phi)_i d\Omega = \frac{1}{A_L} \oint_{\partial \Omega_L} \phi n_i d\Gamma \quad (12)$$

최종적으로 상기 이산화과정을 거쳐 평형방정식 (6)이 각 절점영역에서 다음과 같이 정의되는데(아래첨자  $L$ 은 합치 법칙을 따르지 않는다),

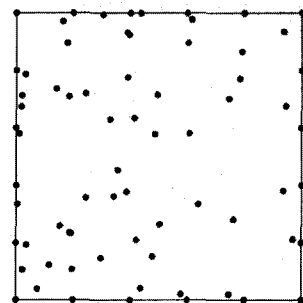
$$\mathbf{B}_{\Pi}^T \mathbf{C} \mathbf{B}_{\Pi} A_L \mathbf{u}_J = \int_{\partial \Omega_L} \phi_J \mathbf{T} d\Gamma|_{\Omega_L} \quad (13)$$



(a) 25개 절점



(b) 8개 절점



(c) 70개 절점

그림 3 단위 정사각형 영역의 조각

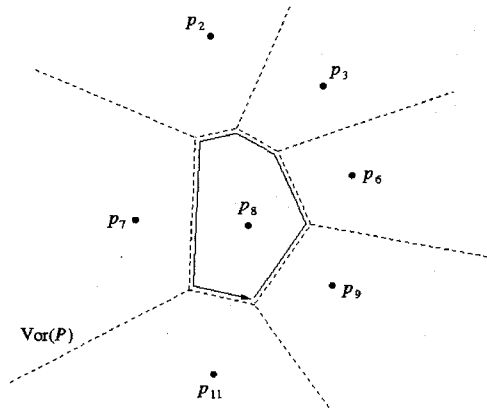


그림 2 절점영역의 초평면 적분

이 이산식의 전영역에의 조합이 곧 최종식인  $Kd=f$ 를 이룬다.

## 6. 검증

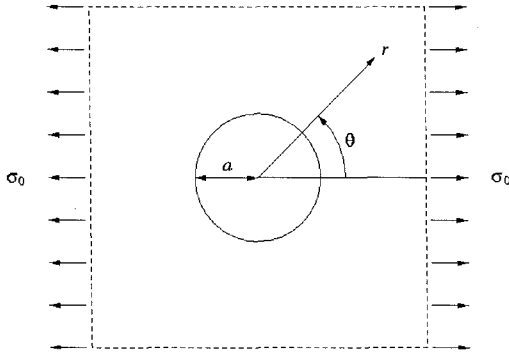
그림 3과 표 1은 이 방법의 정당성 확인을 위한 조각시험의 대상과 결과를 보여주는데, 그  $L_2(\Omega)$  노름의 상대오차가 실질적으로 컴퓨터의 정도  $10^{-16}$ 에 해당하였다.

다음은 비압축문제에 대한 이 혼합공식의 검증으로 대표적인 문제인 원형구멍을 가진 무한판 문제를 사용하여 실시하였다. 그림 4(b)에서 보여지듯이 Poisson비가 0.5에 접근함에 따른 잠김현상이 이 방법에서 나타나지 않음을 알 수 있다.

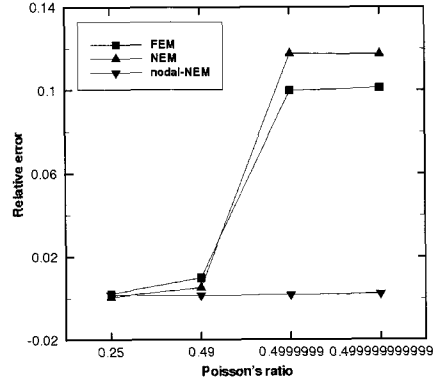
마지막으로 재료불연속문제에 대한 이 방법의 적용 예를 제시하고자 한다. 무한판 내에 상수 고유변형을 가진 원형 삽입물 문제가 고려되었으며, 그림 5(b)에서 보여지듯이 그 해가 이론해와 잘 일치됨을 알 수 있다.

표 1 조각시험의  $L_2(\Omega)$  노름 상대오차

조각	자연요소법	절점자연요소법
그림 3(a)	$7.5 \times 10^{-4}$	$2.7 \times 10^{-16}$
그림 3(b)	$9.3 \times 10^{-3}$	$4.8 \times 10^{-16}$
그림 3(c)	$4.4 \times 10^{-3}$	$1.2 \times 10^{-15}$

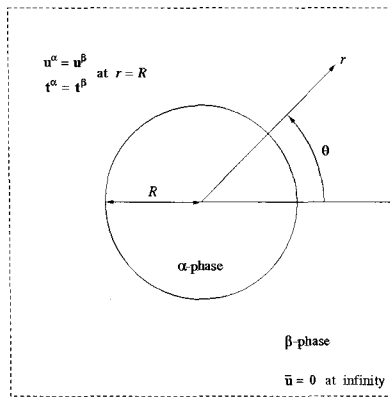


(a) 원형구멍을 가진 무한판

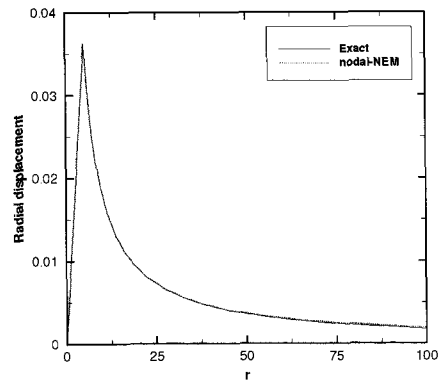


(b) Poisson비에 따른  $u^h$  오차

그림 4 비압축문제의 예



(a) 원형삽입물을 가진 무한판



(b) 방사변위

그림 5 재료불연속문제의 예

## 7. 결론

이 방법에서 원래 목표인 Voronoi 도표 외 다른 기하구조의 필요성 제거와 조각시험 통과가 성공적으로 실현되었다. 이밖에 절점 중심의 구배장 근사를 바탕으로 한 이 방법에서는 모든 데이터구조와 계산이 절점을 중심으로 이루어지는데, 이는 또다른 장점으로 필자가 절점이라는 형용사를 자연요소법 앞에 사용한 이유이기도 하다.

또한, 이 방법에 내재된 연속성에 대한 요구조건 및 비압축성에 대한 제약조건의 완화는 필자가 후에 행한 구배소성론과의 연구에 있어 이상적 성질로서 이 방법이 적용되기도 하였다.

## 참고 문헌

1. R. Sibson, A vector identity for the Dirichlet tessellation. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 87, pp.151-155, 1980

2. V.V. Belikov, V.D. Ivanov, V.K. Kontorovich, S.A. Korytnik, and A.Y. Semenov, The non-Sibsonian interpolation: A new method of interpolation of the values of a function on an arbitrary set of points. *Computational Mathematics and Mathematical Physics* 37(1), pp.9-15, 1997

3. J. Braun and M. Sambridge, A numerical method for solving partial differential equations on highly irregular evolving grids. *Nature* 376, pp.655-660, 1995

4. N. Sukumar, B. Moran, and T. Belytschko, The natural element method in solid mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 43, pp.839-887, 1998

5. J.W. Yoo, B. Moran, and J.S. Chen, Stabilized conforming nodal integration in the natural-element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 60, pp.861-890, 2004

[담당 : 유정완, 편집위원]