Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers
Vol. 35, No. 3, pp. 213-217, September 2009.

작업이 일반적인 자격을 갖는 상황에서 3대의 기계와 4대의 기계의 온라인 스케줄링 문제에 대한 소고

박종호 · 장수영 · 임경국[†]

포항공과대학교 산업경영공학부

A Note on Online Scheduling Problem of Three and Four Machines Under General Eligibility

Jongho Park · Soo Y. Chang · Kyungkuk Lim

Department of Industrial and Management Engineering, POSTECH

We consider the online scheduling problems of three and four machines under eligibility constraint. Respectively for the cases of three and four machines, we prove that AW algorithm has competitive ratios of $\frac{5}{2}$ and 3 which are shown to be optimal. Also, we show that the same results hold for the semi-online cases with prior knowledge of the total and the largest processing time.

Keywords: Online, General Eligibility, Three Machines, Four Machines

1. 서 론

스케줄링 이론(Scheduling theory)에서는 작업(Job) 정보의 유무와 작업의 재배치 가능성 등에 따라 온라인(Online)과 오프라인(Off-line)으로 나누고 있다. *온라인(Online)*은 작업의 정보가 없는 상황에서 스케줄을 정하고, 일정이 정해지고 나면 수정이 불가능한 경우를 말한다. 반대로 작업의 정보가 주어지지 않는 상황에서 스케줄을 정하고, 정해진 일정에 대해서 수정이 가능한 경우를 *오프라인(Off-line)*이라고 부른다. 하지만 실제 상황에서는 작업 정보의 일부분이 주어진 경우가 대부분인데 이런 경우를 *세미 온라인(Semi-online)*이라고 부른다(<Table 1 참조>).

본 논문에서는 작업들이 일반적인 자격(General eligibility)을 갖는 상황에서 동일한 병렬기계 스케줄링 문제(Identical parallel machine scheduling problem)를 온라인 측면과 총 작업 시간과 가장 긴 작업 시간이 주어진 세미 온라인 측면에서 분석하였다. 여기에서 작업이 가지는 일반적인 자격이라는 것은 그 작업을 처리할 수 있는 기계들의 집합을 의미한다. 즉, 각 작업들은 미리 정해진 특정 기계에서만 작업이 가능하다. 그리고 스케줄링에서 제일 마지막으로 끝나는 작업의 완료 시간을 그

Table 1. 온라인과 오프라인의 차이

	오프라인	세미 온라인	온라인
정보의 제공	전체 정보 제공	부분적인 정보 제공	정보 제공 없음
재배치의 가능성	재배치 가능	재배치 불가능	

본 논문은 교육인적자원부의 재원으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 수행된 연구임(연구 과제명 : 3차년도 미래형 기계 국고지원금, 과제번호 : 4.0002619.02).
† 연락저자 : 임경국, 790-784 경상북도 포항시 남구 효자동 산 31 번지 포항공과대학교, 산업경영공학과, Fax : 054-279-2870,
E-mail : lkkuk@postech.ac.kr
2009년 5월 26일 접수; 2009년 6월 5일 수정본 접수; 2009년 6월 10일 게재 확정.

스케줄의 메이크스팬(Make-span)이라고 하는데 본 연구에서는 메이크스팬을 최소화하는 것을 목적으로 두고 있다.

보통 온라인과 세미 온라인에서는 Sleator and Tarjan(1985)이 제안한 경쟁 비율(Competitive ratio)로 근사 알고리즘(Approximation algorithm)의 성능을 평가한다. 우선 알고리즘 A와 인스턴스(Instance) I로 생성된 메이크스팬을 $A(I)$라하고 오프라인 알고리즘으로 생성된 최적의 메이크스팬을 $OPT(I)$라 하자. 이 때, $A(I)$와 $OPT(I)$의 비율의 상한(Maximum) $\sigma(A) := \dfrac{A(I)}{OPT(I)}$을 알고리즘 A의 *경쟁비율*(*Competitive ratio*)이라고 부른다. 만약 경쟁비율 $\sigma(A)$보다 작은 경쟁비율을 갖는 온라인 알고리즘이나 세미 온라인 알고리즘이 없다면 경쟁비율 $\sigma(A)$을 *하계*(*Lower bound*)라고 한다. 그리고 어떤 알고리즘의 경쟁비율이 하계와 같다면 그 알고리즘을 *최적*(*Optimal*)이라고 부른다.

동일한 병렬기계 스케줄링(Identical parallel machine scheduling)에 대한 연구는 1960년대 Graham(1966)에 의하여 처음 연구되었다. 그는 단순할당(Greedy) 알고리즘인 LS(List Scheduling)를 적용하였고 최적의 메이크스팬의 $2-\dfrac{1}{m}$배 내의 스케줄을 구할 수 있음을 증명하였다. 이 후, 스케줄링에 대하여 다양한 연구가 이루어졌는데 그 중의 하나가 작업이 일정한 자격을 가지는 문제이다. 이 문제는 Azar *et al*. (1995)에 의해서 최초로 연구되었다. 그들은 이 문제의 하계가 $\lceil \log_2(m+1) \rceil$임을 증명하였고 경쟁비율이 $\lceil \log_2 m \rceil + 1$인 AW 알고리즘을 제안하였다. Hwang *et al*. (2004)은 메이크스팬을 결정하는 기계에 할당된 작업의 특성을 분석하였으며 최적해의 $\log_2 \dfrac{4}{\lambda} m - \dfrac{1}{\lambda}$배 내의 스케줄을 항상 도출함을 보였다. 여기에서 λ는 최종적으로 끝나는 작업이 갖는 처리 가능한 기계의 수이다. 그리고 Park *et al*. (2006)은 2대의 기계에 대해서는 어떠한 알고리즘이라도 경쟁비율이 2인 최적 알고리즘임을 설명하였다.

그동안 세미 온라인 문제에 대한 연구는 두 대의 동일한 병렬기계 스케줄링에 대한 연구가 대부분이었다. Keller *et al*. (1997)는 전체 작업시간이 알려진 경우에 대하여 연구하였고 경쟁비율이 $\dfrac{4}{3}$인 알고리즘을 제안하였다. He and Zhang(1999)는 가장 큰 작업 시간이 알려진 세미 온라인에 대하여 경쟁비율이 $\dfrac{4}{3}$인 알고리즘을 제안하였다. 그리고 Tan and He(2002)은 전체 작업시간과 가장 큰 작업 시간이 알려진 경우에 대한 알고리즘을 제안하였고 그들이 제안한 알고리즘의 경쟁비율이 $\dfrac{6}{5}$임을 증명하였다. Park *et al*. (2006)은 기존 연구와 다르게 GoS(grade of service)의 상황에서 전체 작업 시간이 알려진 경우에 대해서 경쟁비율이 $\dfrac{3}{2}$인 알고리즘을 제안하였다. 마지막으로 기계의 수가 3대인 경우에 대해서는 Angelelli *et al*. (2007)이 전체 작업시간이 알려진 경우에 대해서 연구를 하였다. 그들은 그들의 문제의 하계가 $1+\dfrac{\sqrt{129}-9}{6} > 1.3929$ 임을 증명하였으며 경쟁비율이 1.5인 알고리즘을 제안하였다.

사실 우리 문제에 대한 결과 중에서 가장 좋은 결과를 살펴보면, 하계는 Azar *et al*. (1995)가 제시한 $\lceil \log_2(m+1) \rceil$이고 경쟁비율은 Hwang *et al*. (2004)이 제시한 $\log_2 m + 1(\lambda = 1$일 때)이다. 그래서 이 결과들에 기계의 수가 3대인 경우를 적용하면 하계는 2이고 상계는 $\log_2 3 + 1(\approx 2.5850)$임을 알 수 있다. 즉, AW 알고리즘이 최적이라고 말할 수 없다. 그러나 이번 연구에서는 기계의 수가 3대인 경우에서도 AW 알고리즘이 최적임을 밝혔고, 온라인 문제의 결과가 총 작업 시간과 가장 긴 작업 시간이 알려진 세미 온라인 스케줄링 문제의 결과와도 같음을 보였다.

이 논문의 구성은 다음과 같다. 제 2장에서는 우리 문제에 대한 소개를 하였고 제 3장에서는 3대의 기계에 대해서 다루었다. 제 4장에서는 4대의 기계에 대한 결과를 다루었으며 마지막 제 5장에서는 연구 결과를 요약 정리하였다.

2. 문제 정의

이번 연구에서는 기계의 대수는 3대와 4대인 경우만 고려한다. 총 작업의 개수는 몇 개인지 모르지만 편의상 작업의 지수 집합(index set)을 $J=\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$라 하자. 그리고 새로운 작업은 현재 작업의 스케줄이 완료되어야 도착 가능하고, 도착이 되면 바로 스케줄이 되어야 한다. 이 때, 작업의 재배치는 불가능하다.

그리고 j번째 도착하는 작업을 '작업 j'라고 부르며, 각 작업은 작업 시간(processing time)과 일반적인 자격(General eligibility)을 가진다. 이 논문에서는 작업 j의 작업 시간을 p_j로 표현하고 일반적인 자격을 $E_j(\subseteq \{1,\ 2,\ \cdots,\ m\})$라 표현한다($m=3$ 혹은 4). 여기에서 일반적인 자격이라는 것은 작업을 처리할 수 있는 기계들의 집합이다. 예를 들어, 작업 j가 일반적인 자격 $E_j=\{1,\ 2\}$을 갖는다면 작업 j는 첫 번째 기계와 두 번째 기계에서만 처리 가능함을 뜻한다. 물론 작업 j의 작업 시간 p_j와 일반적인 자격 E_j는 작업이 도착하기 전에는 알 수 없다. 더불어 이 논문에서는 S_i을 i번째 기계 혹은 기계 i에서 작업이 되는 작업 지수들의 집합이라 하고, J의 임의의 부분집합 S에 대해서 $t(S)=\sum_{j \in S} p_j$라 정의한다. 마지막으로 임의의 알고리즘 A의 메이크스팬을 z^A라 하고 최적의 메이크스팬을 z^*라 하면 알고리즘 A의 경쟁비율은 $\dfrac{z^A}{z^*}$의 상한이 된다.

3. 작업이 일반적인 자격을 갖는 상황에서 3대의 기계 스케줄링 문제

이번 장에서는 우리 문제 중에서 3대의 기계의 상황에서 생각

하도록 한다.

정리 1 : 온라인 스케줄링 문제에 대한 임의의 알고리즘 A의 하계는 $\frac{5}{2}$이다.

증명 : 처음 도착하는 작업의 작업 시간을 1, 일반적인 자격을 $\{1,\ 2,\ 3\}$이라 하고 i번째 기계에 배치되었다고 가정하자($i=1,\ 2,\ 3$). 다음으로 작업 2는 작업 시간이 1이고 일반적인 자격이 $\{k,\ l\}$인 작업을 생성한다($i \neq k,\ i \neq l,\ k \neq l$). 만약 작업 2가 k번째 기계에 배치되었다면 작업 3은 작업 시간이 2이고 일반적인 자격이 $\{i,\ k\}$인 작업을 생성한다.

이 때, 작업 3인 i번째 기계에 배치되었다면 마지막 작업으로 작업 시간이 2, 일반적인 자격이 $\{i\}$인 작업을 생성한다면 하계가 $\frac{z^A}{z^*} \geq \frac{5}{2}$임을 알 수 있다. 그러나 작업 3인 k번째 기계에 배치되었다면 작업 시간이 2이고 일반적인 자격이 $\{k\}$인 작업을 생성하면 하계가 $\frac{z^A}{z^*} \geq \frac{5}{2}$임을 알 수 있다(<Figure 1> 참조). □

정리 1의 증명을 보면 전체 작업 시간은 6이고 가장 큰 작업 시간은 2임을 알 수 있다. 이 결과는 총 작업 시간이 주어진 경우와 가장 큰 작업 시간이 알려진 세미 온라인 문제에 적용 가능하다.

다음으로 경쟁비율을 살펴보도록 한다. 이 문제에 대한 알고리즘은 Azar *et al*. (1995)가 제안한 AW 알고리즘이 잘 알려져 있고 다음과 같다.

Algorithm AW

- 하나의 작업을 선택한다.
- 선택된 작업을 처리할 수 있는 기계들 중에서 작업 시간이 최소인 기계에 작업을 배정한다.
- 최소 작업 시간이 동일하다면 임의로 배정한다.

이제 경쟁 비율을 분석하기 위해서 기호 S_i^j을 정의한다. S_i^j는 작업 j을 배정한 후, 기계 i에서 작업하는 작업 지수들의 집합이라 하자. 이 때, 초기 S_i^0은 $\varnothing$라 한다($i=1,\ 2,\ 3$).

정리 2 : $$\frac{z^{AW}}{z^*} \leq \frac{5}{2}$$

증명 : 우선 정리 2가 틀렸다고 가정하면, 정리 2에 대한 *반례(counter example)*가 존재한다. 이 중에서 작업의 수가 가장 작은 경우를 *최소 반례(minimal counter example)*라고 하자. 그러면 최소 반례라는 조건 때문에 마지막 작업인 작업 n이 들어오기 전까지 메이크 스팬은 $\frac{5}{2}$

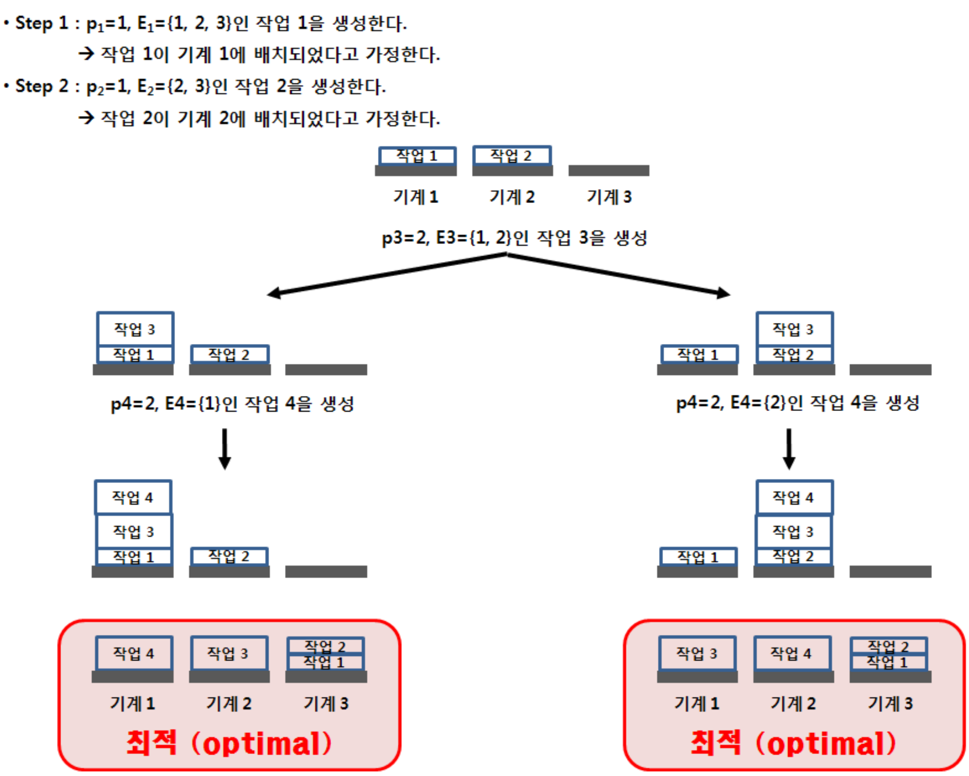

Figure 1. 정리 1에 대한 예제($i=1,\ k=2,\ l=3$ 인 경우)

보다 작거나 같을 것이다. 그리고 작업 n이 들어오는 순간 다음과 같은 관계식이 성립한다.

$$z^{AW} = \max(S_1^n,\ S_2^n,\ S_3^n) > \frac{5}{2}z^* \text{ 와}$$

$$z^{AW} = \max(S_1^{n-1},\ S_2^{n-1},\ S_3^{n-1}) \le \frac{5}{2}z^*$$

이제 마지막 작업 n에 대해서 다음 두 가지 경우를 생각한다.

경우 1 : $|E_n| \ge 2$

이 경우는 작업 n이 일반적인 자격을 2가지 이상을 갖는 경우이다. 우선 작업 n이 S_i에 배치되었다면 $t(S_i^n) > \frac{5}{2}z^*$인 관계가 성립한다. 그리고 $|E_n| \ge 2$이므로 $t(S_k^{n-1}) \ge t(S_i^{n-1})$의 관계를 만족하는 k번째 기계가 존재함을 알 수 있고, $p_n \le z^*$인 사실로 인해서 $t(S_k^{n-1}) \ge t(S_i^{n-1}) > \frac{3}{2}z^*$라는 것을 알 수 있다. 그러므로 우리는 $t(S_i^n) > \frac{5}{2}z^*$라는 것과 $t(S_k^n) \ge t(S_k^{n-1}) > \frac{3}{2}z^*$라는 것으로 인해서 $t(S_i^n) + t(S_k^n) > 3z^*$이라는 모순을 얻게 된다.

경우 2 : $|E_n| = 1$

이 경우는 작업 n이 일반적인 자격을 1개를 가지는 것이다. 만약, 작업 n이 기계 i에 배치되었다고 가정하면 다음과 같이 말할 수 있다($i \ne l,\ k$).

$$z^{AW} = t(S_i^n) > \frac{5}{2}z^* \quad \text{and} \tag{1}$$

$$t(S_l^n) + t(S_k^n) \le \frac{1}{2}z^*$$

일반적인 자격 $\{i\}$만을 가진 작업들의 총 작업 시간은 z^*보다 작거나 같아야 하기 때문에 S_i에는 다른 기계에 배치될 수 있는 작업들이 존재하게 된다. 이러한 작업들 중, S_i에 가장 늦게 배치된 작업의 지수를 α라고 하자. 그러면 $p_n \le z^*$과 $p_\alpha \le z^*$인 관계로 $t(S_i^\alpha) = t(S_i^n) - p_n > \frac{3}{2}z^*$와 $t(S_i^{\alpha-1}) = t(S_i^\alpha) - p_\alpha > \frac{1}{2}z^*$이라는 결과를 얻을 수 있다. 그리고 작업 α는 다른 기계에 배치가 가능한데 이를 k번째 기계라고 가정하자. 그러면 작업 α은 k번째 기계에도 배치 가능하기 때문에 $t(S_k^n) \ge t(S_k^{\alpha-1}) \ge t(S_i^{\alpha-1}) > \frac{1}{2}z^*$인 관계를 얻게 되는데 이는 부등식 (1)의 $t(S_l^n) + t(S_k^n) \le \frac{1}{2}z^*$에 모순이 된다. □

이상의 결과를 종합해 보면 3대의 병렬 기계에 대해서 하계는 $\frac{5}{2}$이고 AW 알고리즘의 경쟁 비율도 $\frac{5}{2}$임을 알게 되었다. 이러한 이유로 3대의 병렬 기계에 대한 AW 알고리즘은 최적이라 할 수 있다. 그리고 AW 알고리즘은 새로운 작업을 배치할 때, 각 기계의 총 작업 시간만을 고려한다. 즉, AW 알고리즘은 총 작업 시간이 주어진 경우나 가장 큰 작업 시간이 알려진 경우와는 관계가 없다. 이러한 이유로 인해서 AW 알고리즘은 총 작업 시간이 주어진 경우와 가장 큰 작업 시간이 알려진 경우의 세미 온라인 문제에 대해서도 적용이 가능하다. 그리하여 우리가 고려하는 세미 온라인에서도 AW 알고리즘이 최적이라 할 수 있다.

4. 작업이 일반적인 자격을 갖는 상황에서 4대의 기계 스케줄링 문제

이번 장에서는 우리 문제 중에서 4대의 기계의 상황에서 생각하도록 한다. 그러나 이 문제에 대해서는 Azar *et al*. (1995)가 상계와 하계가 3임을 밝혔기 때문에 최적임을 알 수 있다. 하지만 여기에서는 독자적인 증명을 통해서 하계가 3임을 밝히고 이를 통해서 세미 온라인에 적용 가능함을 설명하도록 한다.

정리 3 : 온라인 스케줄링 문제에 대한 임의의 알고리즘 A의 하계는 3이다.

증명 : 처음 도착하는 작업의 작업 시간을 1, 일반적인 자격을 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$이라 하고 i번째 기계에 배치되었다고 가정하자($i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$). 다음으로 작업 2의 작업 시간은 1이고 일반적인 자격을 $\{i,\ k,\ l\}$라고 하자($i \ne k$, $i \ne l$, $k \ne l$).

만약 작업 2가 i번째 기계에 배치되었다면 3번째 작업의 작업 시간은 1이고 일반적인 자격이 $\{k,\ l\}$인 작업을 생성한 후, 마지막 작업으로 작업 시간이 1, 일반적인 자격이 $\{i\}$인 작업을 생성하면 $\frac{z^A}{z^*} \ge 3$이 된다.

하지만 작업 2가 k번째 기계에 배치되었다면 3번째 작업의 작업 시간이 1이고 일반적인 자격이 $\{i,\ k\}$인 작업을 생성한다. 이 후, 작업 3이 i번째 기계에 배치되었으며 마지막 작업으로 작업시간이 1, 일반적인 자격이 $\{i\}$인 작업을 생성하면 $\frac{z^A}{z^*} \ge 3$이 된다. 그러나 작업 3이 k번째 기계에 배치되었다면,

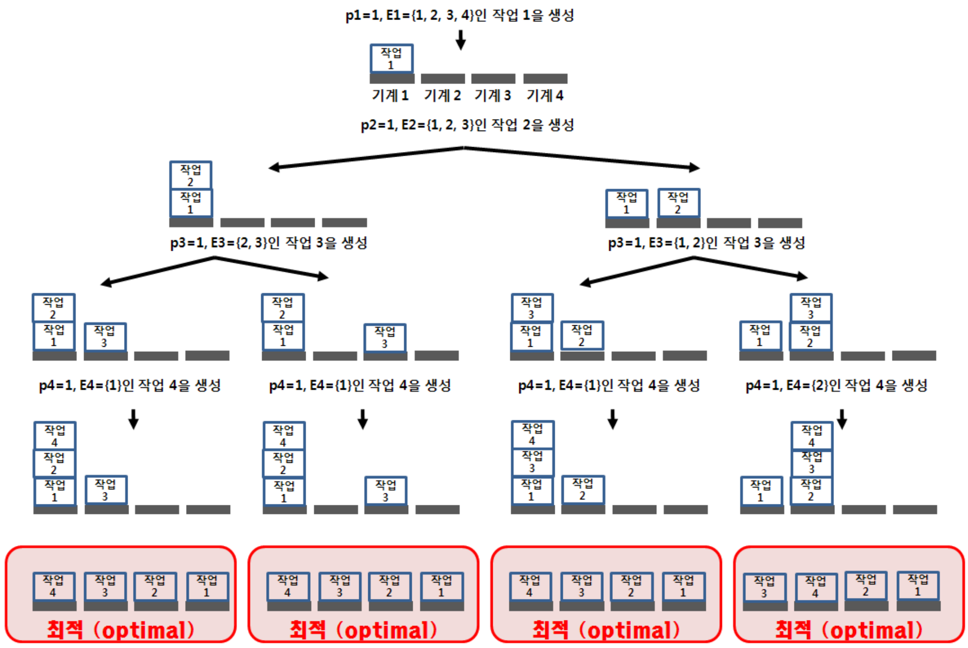

Figure 2. 정리 3에 대한 예제($i=1$, $k=2$, $l=3$ 인 경우)

마지막 작업으로 작업시간이 1이고 일반적인 자격이 $\{k\}$인 작업을 생성하면 $\frac{z^A}{z^*} \geq 3$을 얻을 수 있다 (<Figure 2> 참조). □

정리 3을 보면 모든 경우에 있어서 총 작업 시간이 4이고 모든 작업 시간이 1임을 알 수 있다. 그리고 4대의 병렬 기계에 대한 AW 알고리즘은 3대의 병렬 기계와 같은 이유 때문에 우리가 고려하고 있는 세미 온라인 문제에 적용가능하다. 즉, 우리가 고려한 세미 온라인 경우에도 AW 알고리즘의 경쟁비율은 3이고 최적임을 알 수 있다.

5. 결 론

이번 연구에서는 3대의 병렬 기계들과 4대의 병렬 기계들에 대해서 다루었다. 그 결과 온라인 스케줄링 측면과 총 작업 시간의 정보와 가장 긴 작업 시간의 정보가 알려진 세미 온라인 스케줄링 측면의 결과가 똑 같음을 확인하였다. 그리고 앞으로 연구에서는 이번 연구를 확장하여 일반적인 m대의 병렬 기계에 대해서 온라인 측면과 세미 온라인 측면의 접근을 해 볼 필요가 있다.

참고문헌

Angelelli, E., Speranza, M. G., and Tuza, Zs. (2007), Semi on-line scheduling on three processors with known sum of the tasks, *Journal of Scheduling*, **10**, 263-269.

Azar, Y. Naor, J. and Rom, R. (1995), The competitiveness of online assignments, *Journal of Algorithms*, **18**, 221-237.

Graham, R. L. (1966), Bounds for certain multiprocessor anomalies, *Bell System Technical Journal*, **45**, 1563-1581.

He, Y. and Zhang, G. C. (1999), Semi online scheduling on two identical machines, Computing, **62**, 179-187.

Hwang, H. C. Chang, S. Y., and Hong, Y. (2004), A Posterior Competitiveness for List Scheduling Algorithm on Machines with Eligibility Constraints, *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, **21**, 117-125.

Kellerer, H. Kotov, V. Speranza, M. G., and Tuza, Z. (1997), Semi-on-line algorithms for the partitioning problem, *Operations Research Letters*, **21**, 235-242.

Park, J. Chang, S. and Lee K. (2006), Online and semi-online scheduling of two machines under a grade of service provision, *Operations Research Letters*, **34**, 692-696.

Sleator, D. and Tarjan, R. E. (1985), Amorized efficiency of list update and paging rules, *Communications of the ACM*, **28**, 202-208.

Tan, Z. and He, Y. (2002), Semi-online problems on two identical machines with combined partial information, *Operations Research Letters*, **30**, 408-414.