

적분 슬라이딩 모드 제어기의 LMI 기반 설계

LMI-based Design of Integral Sliding Mode Controllers

최 한 호*
(Han Ho Choi)

Abstract: This paper presents an LMI-based method to design an integral sliding mode controller for a class of uncertain systems. Using LMIs we derive an existence condition of a sliding surface. And we give a switching feedback control law. Our method is a generalization of the previous integral sliding mode control design methods. Since our method is based on LMIs, it gives design flexibility for combining various useful design criteria that can be captured in the LMI-based formulation.

Keywords: LMI (Linear Matrix Inequality), uncertain system, sliding mode

I. 서론

슬라이딩 모드 제어 이론은 불확실성의 높 크기가 알려진 시스템을 위한 강인한 궤환 제어기 설계에 성공적으로 적용되었다[1-6]. 슬라이딩 모드 제어기의 시스템 응답은 두 개의 모드로 나눌 수 있다. 첫 번째는 리칭 모드(reaching mode)로 궤적이 초기 조건에서 시작해 슬라이딩 평면을 향하여 움직이는 과도기로 외란에 영향을 받을 수 있는 모드이다. 두 번째는 슬라이딩 모드로 궤적이 슬라이딩 평면에 도달하여 원점을 향하여 움직이는 모드로 응답이 리칭 모드와는 달리 외란에 영향을 받지 않으며 원하는 성능을 제공한다. 대부분의 슬라이딩 모드 제어기는 리칭 모드가 슬라이딩 모드 이전에 존재하는데 만약 슬라이딩 모드가 초기 시간 $t=0$ 부터 존재한다면 리칭 모드가 존재하는 일반적인 슬라이딩 모드 제어기보다 더 강인한 특성을 보이며 응답을 더욱 정확히 예측할 수 있을 것이다. 최근에 [7]에서는 리칭모드가 존재하지 않고 초기 시간 $t=0$ 부터 슬라이딩 모드가 존재하는 적분 슬라이딩 모드 제어기를 설계하는 방법이 제시되었다. 본 논문에서는 [7]의 방법을 일반화시킨 LMI에 기반한 적분 슬라이딩 모드 제어기 설계방법을 제안한다. 본 논문에서 제안된 방법은 LMI를 사용하였기 때문에 LQ/H_2 , H_∞ 등 LMI로 표현가능한 성능지수를 고려해 넣을 수 있는 유연성을 제공한다.

II. 대상 시스템과 문제설정

본 논문에서는 다음과 같은 동역학 방정식으로 표현 가능한 시스템을 다룬다.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B[u(t) + h(t)] \quad (1)$$

여기에서 $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$ 로 각각 상태, 입력을 가리키며 다음을 만족시킨다고 가정한다.

- A1: (A, B) 는 안정가능하다.
- A2: $\text{rank}(B) = m < n$
- A3: $\|h(t)\| \leq \phi \|u\| + \beta(t)$, $0 \leq \phi < 1$ 을 만족시키는

* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수: 2008. 12. 29, 채택확정: 2009. 3. 13.

최한호: 동국대학교 전기공학과(hhchoi@dongguk.edu)

상수 ϕ 와 양함수 $\beta(t)$ 가 알려져 있다.

(2)와 같은 $q \geq m$ 차의 보상기를 도입하고 (4)와 같은 슬라이딩 평면을 정의하고 (5)와 같은 슬라이딩 모드 제어기를 고려하자.

$$\dot{v} = A_K v + B_K x \quad (2)$$

$$\sigma = F_1 x + F_2 v, \quad v(0) = -F_2^{-1}(F_2 F_2^T)^{-1} F_1 x(0) \quad (3)$$

$$u = u_n + u_p \quad (4)$$

$$u_i = C_K v + D_K x, \quad u_n = -\rho(t) \frac{\sigma}{\|\sigma\|} \quad (5)$$

여기에서 $A_K \in R^{q \times n}$, $B_K \in R^{q \times q}$, $C_K \in R^{m \times q}$, $D_K \in R^{m \times n}$, $F_1 \in R^{m \times n}$, $F_2 \in R^{m \times q}$ 는 설계 변수 행렬이고 v 는 보상기 상태이고 $\rho(t)$ 는 불확실성 $h(t)$ 를 소거하기 위해 가해야 할 양함수이다. (3)에서 처럼 $v(0)$ 를 결정함으로 인해 $\sigma(0) = 0$ 이 됨에 유의해야 한다. 결국 본 논문에서 다룬 문제는 $A_K, B_K, C_K, D_K, F_1, F_2$ 이 존재할 조건과 LMI 설계 알고리즘 그리고 설계변수 $\rho(t)$ 를 결정하기 위한 공식을 제공하는 것으로 환원될 수 있다. [7]에서는 $q=m$, $F_1 = (B^T B)^{-1} B^T$, $F_2 = I$ 로 고정해 놓았으나 본 논문에서는 고정해 놓지 않았음에 유의해야 한다.

III. 주요 결과

확장된 상태 $z = [x^T, v^T]^T$ 를 도입함으로 (1)-(5)의 폐회로 시스템과 σ 는 다음처럼 고쳐 쓰일 수 있다.

$$\dot{z} = (\bar{A} + \bar{B}K)z + B_0[u_n + h(t)] \quad (6)$$

$$\sigma = Fz \quad (7)$$

여기에서 $\bar{A}, \bar{B}, K, B_0, F$ 는 다음처럼 주어진다.

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} D_K & C_K \\ B_K & A_K \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} F_1^T \\ F_2^T \end{bmatrix}^T$$

정리 1: 설계변수 A_K, B_K, C_K, D_K 에 대하여 다음 (9)를

만족시키는 해 P 가 존재한다고 가정하고 설계변수 F 가 (10)처럼 주어지고 $\rho(t)$ 가 (11)처럼 주어진다고 하자.

$$P > 0, P(\bar{A} + \bar{B}K) + (\bar{A} + \bar{B}K)^T P < 0 \quad (9)$$

$$F = B_0^T P \quad (10)$$

$$\rho(t) = \frac{1}{1-\phi} [\gamma + \|Gz\| + \phi \|C_K v + D_K x\| + \beta(t)] \quad (11)$$

여기에서 $\gamma > 0$ 이며 $G = (F_1 B)^{-1} F(\bar{A} + \bar{B}K)$ 로 주어진다. 그리고 $F_2 F_2^T > 0$ 라고 하자. 그러면 슬라이딩 모드 동역학은 안정하며 슬라이딩 모드는 처음부터 즉 $t=0$ 에서부터 시작된다.

증명: 리아푸노프 함수를 $L(t) = z^T P z$ 로 하면 이의 도함수는 가정 A3을 이용하고 (9), (10), (11)식을 이용하여 다음을 만족시킴을 쉽게 보일 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{L} &= 2z^T \dot{P}z = 2z^T P[\bar{A} + \bar{B}K]z + 2z^T P B_0 [u_n + h(t)] \\ &\leq -z^T Qz + 2\|\sigma\|[\phi \|u\| + \beta(t) - \rho(t)] \\ &\leq -\lambda_{\min}(Q)\|z\|^2 + 2\|\sigma\|[\phi \|C_K v + D_K x\| + \phi \rho(t) \\ &\quad + 2\|\sigma\|[\beta(t) - \rho(t)]] \\ &\leq -\lambda_{\min}(Q)\|z\|^2 - 2\gamma\|\sigma\| \leq -\lambda_{\min}(Q)\|z\|^2 \leq 0 \end{aligned} \quad (12)$$

여기에서 $-Q = P(\bar{A} + \bar{B}K) + (\bar{A} + \bar{B}K)^T P < 0$ 이다. 결국 이는 $z=0$ 이 지수적으로 안정함을 의미한다. 즉 슬라이딩 모드 동역학은 안정하다. $t=0$ 에서부터 슬라이딩모드가 존재함을 보이기 위해 $\sigma(0) = 0$ 이며 $\sigma^T(B_0^T P B_0)^{-1} \dot{\sigma} < 0$ 이 아닌 σ 에 대하여 성립함을 보이기만 하면 된다 [1,2,7,10]. (3)은 $\sigma(0) = 0$ 을 의미하므로 $\sigma^T \dot{\sigma} < 0$ 만 보이면 된다. 가정 A3을 이용하여 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \sigma^T(B_0^T P B_0)^{-1} \dot{\sigma} &= \sigma^T(B_0^T P B_0)^{-1} B_0^T P[\bar{A} + \bar{B}K]z + \sigma^T [u_n + h] \\ &\leq \|\sigma\|(\|Gz\| + \phi \|u\| + \beta - \rho) \\ &\leq \|\sigma\|(\|Gz\| + \phi \|C_K v + D_K x\| + \phi \rho + \beta - \rho) \\ &\leq -\gamma\|\sigma\| \end{aligned} \quad (13)$$

결국 슬라이딩 모드 동역학은 안정하며 슬라이딩 모드는 $t=0$ 에서부터 시작됨을 알 수 있다.

위의 정리 1은 해석에는 유용하나 설계에는 직접적으로 유용하지 않다. 다음의 정리가 설계에 사용될 수 있다.

정리 2: 다음의 LMI를 만족시키는 해 X 가 존재하면 (9)를 만족시키는 (P, K) 가 존재한다.

$$X > 0, \Phi^T (AX + XA^T) \Phi < 0 \quad (14)$$

여기에서 $\Phi \in R^{n \times (n-m)}$ 는 $\Phi^T \Phi = I, \Phi^T B = 0$ 를 만족시키는 행렬이다.

증명: 변수치환 $W = P^{-1}, U = KP^{-1}$ 을 도입하여 (9)를 다음처럼 LMI로 변환할 수 있다.

$$W > 0, \bar{A}W + \bar{B}U + (\bar{A}W + \bar{B}U)^T < 0 \quad (15)$$

[8]에 주어진 projection lemma를 이용하여 (15)식은 다음과 동치임을 보일 수 있다.

$$W > 0, \Phi_0^T (\bar{A}W + \bar{B}U) \Phi_0 < 0 \quad (16)$$

여기에서 $\Phi_0^T = [\Phi^T, 0]$ 이다. W 를 다음처럼 정의하자.

$$W = \begin{bmatrix} X & -XR\Pi \\ -\Pi R^T X & \Pi + \Pi R^T X R \Pi \end{bmatrix} \quad (17)$$

여기에서 X 는 (14)의 해이고 Π 는 임의의 $q \times q$ 양한정 행렬이고 R 은 임의의 $n \times q$ 행렬이다. [8]에 주어진 Schur complement formula를 이용하여 (17)의 W 가 양한정임을 알 수 있다. 그리고 (17)의 W 가 (16)을 만족시킴을 알 수 있다.

주 1: [8]의 결과를 이용하면 LMI (14)의 해가 존재할 필요충분조건은 (A, B) 쌍이 안정 가능한 것임을 알 수 있다.

주 2: 정리 1, 2는 다음처럼 $A_K, B_K, C_K, D_K, F_1, F_2$ 와 $\rho(t)$ 를 설계할 수 있음을 의미한다.

Step 1: LMI (14)식을 풀어 X 를 구한다.

Step 2: (17)을 이용하여 $W = P^{-1}$ 을 결정한다.

Step 3: 주어진 $P = W^{-1}$ 에 대하여 LMI식 (9)를 풀어 K 를 구한다.

Step 4: (8)과 (10)을 이용하여 $A_K, B_K, C_K, D_K, F_1, F_2$ 를 결정한다.

Step 5: (11)을 이용하여 $\rho(t)$ 를 구한다.

주 3: LMI (14)를 만족시키는 X 가 존재하기만 하면 (14)와 $X > BB^T$ 를 만족시키는 X 가 존재한다. 그러한 X 를 이용하여 $\Pi = I - B^T X^{-1} B, R = (B^T B)^{-1} B^T + \Phi H^T$ 로 정할 수 있다. 여기에서 $H = -\Pi^{-1} B^T X^{-1} \Phi$ 이다. 이처럼 하면 matrix inversion lemma를 이용하여 다음이 성립함을 보일 수 있다.

$$\begin{aligned} P = W^{-1} &= \begin{bmatrix} X^{-1} + R\Pi R^T & R \\ R^T & \Pi^{-1} \end{bmatrix} \\ q = m, F_1 &= (B^T B)^{-1} B^T, F_2 = I \end{aligned} \quad (18)$$

본 논문에서 제안된 방법은 LMI를 사용하였기 때문에 [5]에서처럼 극배치 조건, $LQ/H_2, H_\infty$ 등 LMI로 표현가능한 성능지수를 고려해 넣을 수 있는 유연성을 제공한다. 본 논문에서는 예로 α 안정성과 LQ 성능을 고려한 설계방법만을 제시한다. 다른 성능지수는 [5,8]을 참조하여 유도할 수 있을 것이다.

정리 3: 설계변수 A_K, B_K, C_K, D_K 에 대하여 다음 (19)를 만족시키는 해 P 가 존재한다고 가정하고 설계변수 F 가 (10)처럼 주어지고 $\rho(t)$ 가 (11)처럼 주어진다고 하자. 그리고 $F_2 F_2^T > 0$ 라고 하자. 그러면 슬라이딩 모드 동역학은 최소 감쇠율 α 를 보장한다.

$$P(\bar{A} + \alpha I + \bar{B}K) + (\bar{A} + \alpha I + \bar{B}K)^T P < 0 \quad (19)$$

증명: 리아푸노프 함수를 $L(t) = z^T P z$ 를 사용하고 정리 1의 증명과정을 참조하여 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{L} &= 2z^T \dot{P}z = 2z^T P[\bar{A} + \bar{B}K]z + 2z^T P B_0 [u_n + h(t)] \\ &\leq -2\alpha z^T P z \leq 0 \end{aligned}$$

위 식은 α 안정성을 의미한다[5].

주 4: 정리 2의 증명과정을 참조하여 최소 감쇠율 α 를

보장하는 적분 슬라이딩 모드 제어를 설계하려면 주 2에 주어진 설계 알고리즘의 Step 1에서 (14) 대신에 다음의 LMI를 사용하고

$$X > 0, \Phi^T[(A + \alpha I)X + X(A + \alpha I)^T]\Phi < 0 \quad (20)$$

Step 3에서는 (9) 대신에 (19)를 사용하면 됨을 알 수 있다.
 정리 4: 다음 LMI를 만족시키는 행렬 X 가 존재한다고 가정하자.

$$\begin{bmatrix} \mu I & I \\ I & X \end{bmatrix} > 0, \begin{bmatrix} \Phi^T(A X + X A^T)\Phi & \Phi^T X C^T \\ C X \Phi & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (21)$$

그러면 다음 (22)를 만족시키는 해 $P > 0$ 이 존재한다.

$$P < \mu I, P(\bar{A} + \bar{B}K) + (\bar{A} + \bar{B}K)^T P + \bar{C}^T \bar{C} < 0 \quad (22)$$

여기에서 $\bar{C} = [C^T, 0]^T$. 위 식과 (10)을 이용하여 $A_K, B_K, C_K, D_K, F_1, F_2$ 를 결정하여 $F_2 F_2^T > 0$ 라고 하자. $\rho(t)$ 를 (11)처럼 하자. 그러면 슬라이딩 모드 제어기 (2)-(4)는 모든 $\|z(0)\| \leq 1$ 에 대하여 LQ 성능 $\int_0^\infty x^T C^T C x dt < \mu$ 를 보장한다.

증명: 정리 2의 증명과정을 참조하여 (21)의 해가 존재하면 (22)의 해가 존재함을 쉽게 보일 수 있다. 리아푸노프 함수를 $L(t) = z^T P z$ 를 사용하고 정리 1의 증명과정을 참조하여 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{L} &= 2z^T P \dot{z} = 2z^T P[\bar{A} + \bar{B}K]z + 2z^T P B_0 [u_n + h(t)] \\ &\leq -z^T \bar{C}^T \bar{C} z \leq 0 \end{aligned}$$

위 식을 적분하여 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\int_0^\infty z^T \bar{C}^T \bar{C} z dt = \int_0^\infty x^T C^T C x dt \leq z(0)^T P z(0)$$

(22)를 참조하여 위 식으로부터 모든 $\|z(0)\| \leq 1$ 에 대하여 다음 식이 성립함을 유도할 수 있다.

$$z(0)^T P z(0) \leq \mu$$

결국 이는 $\int_0^\infty x^T C^T C x dt < \mu$ 를 의미한다.

주 5: LQ 성능 $\int_0^\infty x^T C^T C x dt < \mu$ 를 보장하는 슬라이딩 모드 제어를 설계하려면 주 2에 주어진 설계 알고리즘의 Step 1에서 (14) 대신에 LMI (21)을 사용하고 Step 3에서는 (9) 대신에 (22)를 사용하면 됨을 알 수 있다. 그리고 Step 2에서 W 를 결정할 때 H, R 을 $W = P^{-1} > \mu^{-1} I$ 를 만족 시키도록 해야 한다.

주 6: (11)의 $\rho(t)$ 는 이득을 키우는 댕가로 다음처럼 단순한 형태로 대체할 수 있다.

$$\rho(t) = \frac{1}{1 - \phi} [\gamma + (\|G\| + \phi \|C_K\| + \phi \|D_K\|) \|z\| + \beta(t)]$$

IV. 수치적 예

[9]에 주어진 F4E 팬텀 전투기의 5000피트에서의 동역학 모델을 고려해보자. 다음의 데이터를 갖는 시스템 (1)로 표현될 수 있다.

$$A = \begin{bmatrix} -0.990 & 17.410 & 96.150 \\ 0.265 & -0.851 & -11.390 \\ 0 & 0 & -30.000 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -97.780 \\ 0 \\ 30.000 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$\|h(t)\| \leq 10$ 을 만족한다고 가정하자. 최소 감쇠율 1과 $\|z(0)\| \leq 1$ 에 대하여 LQ 성능 $\int_0^\infty x^T x dt < 25$ 를 보장하는 제어를 설계하도록 하자. $C = I, \mu = 25$, 놓고 주 2, 5를 참조하여 다음과 같은 이득 행렬을 구할 수 있다.

$$K = \begin{bmatrix} 0.535 & 0.903 & 0.646 & 0.245 \\ -0.009 & -0.007 & -0.021 & -1.008 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} -1.071 & -1.807 & -1.292 & -0.489 \end{bmatrix} \quad (24)$$

결국 다음과 같은 제어를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{v} &= -1.008v - [0.009, 0.007, 0.021]x \\ \sigma &= -0.489v - [1.071, 1.807, 1.292]x \\ u_1 &= 0.245v + [0.535, 0.903, 0.646]x \\ u_n &= -[11 + |[0.544, 0.644, -0.015, 0.252]z|] \frac{\sigma}{|\sigma|} \end{aligned} \quad (25)$$

여기에서 $v(0) = -[2.19, 3.696, 2.642]x(0)$ 이다. 초기값은 $x(0) = [1, 0, 0]^T$ 이고 $h(t) = 10\sin 10t$ 이라고 가정하였다. 그림 1은 (25)를 사용하였을 경우 시뮬레이션 결과를 보여주고 있다. [4-6]의 시뮬레이션 결과들과 달리 그림 1에서는 리칭모드가 존재하지 않고 초기시간 $t=0$ 부터 슬라이딩모드가 존재함을 확인할 수 있다. 시뮬레이션은 [4-6]처럼 약간의 성능저하를 감수하고 채터링을 줄이기 위해서 불연속 벡터 $\sigma/|\sigma|$ 를 연속함수로 근사화하여 $\sigma/(|\sigma| + 0.0001)$

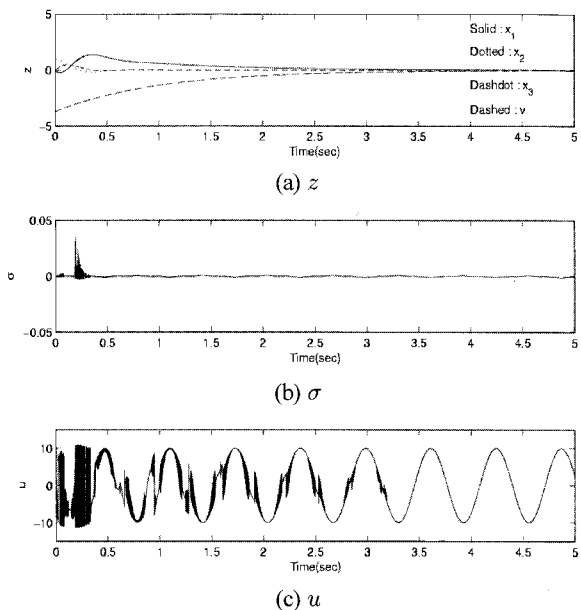


그림 1. 시뮬레이션 결과.
 Fig. 1. Simulation results.

를 사용하여 수행하였다.

V. 결론

본 논문에서는 이전 [7]의 결과를 포괄하는 일반적인 형태의 적분 슬라이딩 모드 제어기 설계법을 제안하였다. 슬라이딩 평면이 존재할 조건을 LMI 형태로 제시하고 스위칭 궤환 제어기를 제시하였다. LMI를 사용하였기 때문에 LMI로 표현 가능한 LQ/H_2 , H_∞ 와 같은 성능지수를 고려해 넣을 수 있는 유연성을 제공한다.

참고문헌

- [1] R. A. DeCarlo, S. H. Zak, and G. P. Mathews, "Variable structure control of nonlinear multivariable systems: A tutorial," *IEEE Proceedings*, vol. 76, pp. 212-232, 1988
- [2] V. I. Utkin, "Variable structure systems with sliding modes," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 22, pp. 212-222, 1977.
- [3] C. Edwards, "A practical method for the design of sliding mode controllers using linear matrix inequalities," *Automatica*, vol. 40, pp. 1761-1769, 2004.
- [4] C. Edwards, A. Akoachere, and S. K. Spurgeon, "Sliding mode output feedback controller design using linear matrix inequalities," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 46, pp. 115-119, 2001.
- [5] 이재관, 최한호, "정합조건을 만족시키지 않는 불확실한 시스템을 위한 선형 슬라이딩 평면의 LMI 매개변수화," 제어 · 자동화 · 시스템공학 논문지, 제11권 제11호, pp. 907-912, 2005.
- [6] 최한호, "측차 관측기를 사용한 슬라이딩 모드 제어," 제어 · 자동화 · 시스템공학 논문지, 제12권, 제11호, pp. 1057-1060, 2006
- [7] J. Ackermann and V. I. Utkin, "Sliding mode control design based on Ackermann's formula," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 43, no. 2, pp. 234-237, 1998.
- [8] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in system and Control Theory*, Philadelphia, SIAM, 1994.
- [9] U. Shaked "An LPD approach to robust H_2 and H_∞ static output-feedback design," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 48, no. 5, pp. 866-872, 2003.
- [10] H. H. Choi, "LMI-based sliding surface design for integral sliding mode control of mismatched uncertain systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 52, no.4, pp. 736-742, 2007.

최한호

제어 · 자동화 · 시스템공학 논문지 제13권 제9호 참조