

# 제약조건을 갖는 최소자승 추정기법과 최급강하 알고리즘을 이용한 동적 베이시안 네트워크의 파라미터 학습기법

논문
58P-2-12

## Parameter Learning of Dynamic Bayesian Networks using Constrained Least Square Estimation and Steepest Descent Algorithm

조 현 철\* · 이 권 순<sup>†</sup> · 구 경 완\*\*  
(Hyun-Cheol Cho · Kwon-Soon Lee · Kyung-Wan Koo)

**Abstract** - This paper presents new learning algorithm of dynamic Bayesian networks (DBN) by means of constrained least square (LS) estimation algorithm and gradient descent method. First, we propose constrained LS based parameter estimation for a Markov chain (MC) model given observation data sets. Next, a gradient descent optimization is utilized for online estimation of a hidden Markov model (HMM), which is bi-linearly constructed by adding an observation variable to a MC model. We achieve numerical simulations to prove its reliability and superiority in which a series of nonstationary random signal is applied for the DBN models respectively.

**Key Words** : Dynamic Bayesian Networks, Parameter Learning, LS Estimation, Steepest Descent Algorithm, Markov Chain, HMM

### 1. 서 론

DBN은 확률 및 통계이론과 그래프 이론을 이용하여 인과관계를 갖는 동적 시스템을 확률론적으로 모델링하는데 사용되어지는 소프트 연산알고리즘의 일종이다. DBN 구성에 있어 가장 중요한 과정은 실제 시스템의 동특성을 잘 표현하기 위하여 조건부 확률로 주어지는 DBN의 파라미터를 학습을 통해 적절한 값으로 설정하는 단계이다. 다시 말해 주어진 시스템 관측값이나 상태값에 대하여 최적화 알고리즘을 통해 파라미터를 결정하는 것으로 현재까지 표준화된 학습기법을 알려져 있지 않으나, 주로 Maximum Likelihood(ML) 이나 Expectation-Maximization(EM)과 같은 추정기법을 학습알고리즘으로 적용하고 있다. 한편, 현재까지 보고되고 있는 DBN 파라미터 학습법도 이러한 두 추정 알고리즘을 개선하거나 문제점을 보완하는 형태로서 제안되고 있다.

Murphy는 여러 가지 DBN 모델에 대하여 regression 구조를 갖는 변형된 EM 학습알고리즘을 제안하였으며[1], Parizeau 등은 다변수 선형 독립 관측값에 대한 HMM의 학습알고리즘이 개발하였으며 관측값에 대한 확률분포는 Lagrange 연산기법을 통해 추정하였다[2]. 또한 Pena 등은 cross-validation[3] 기법을 이용하여 광범위한 데이터 샘플 값에 대하여 효과적인 학습을 위한 새로운 DBN 학습알고리즘을 발표하였으며, 평가함수로 주어지는 베이시안 함수를

cross-validation으로 구성하였다[4]. Garg 등은 boosting 알고리즘[5]을 이용한 BN 및 DBN의 파라미터 학습법을 개발하였으며, 음성진단 시스템에 적용하여 성능을 검증하였다[6]. Tian 등은 진화연산기법을 이용한 임베디드 EM 알고리즘을 DBN 학습기법으로 이용하였으며[7], Bilmes는 buried 구조의 MC 모델에 대한 학습법을 제안하여 음성인식시스템에서 패턴분류기법으로 적용하였다[8]. Cohen 등은 voting EM 알고리즘을 개발하여 DBN 학습기법으로 적용하였으며[9], Chien은 unsupervised 형태의 적응형 DBN 온라인 학습법을 개발하여 speaker-independent HMM의 학습에 적용하였다[10].

앞서 언급한 바와 같이 이제까지 보고된 대부분의 DBN 학습알고리즘은 ML이나 EM 추정기법을 기반으로 하였다. 하지만 이러한 추정기법은 최적값을 탐색하는 중 국소해에 도달할 수 있는 단점이 있으며 또한 연산과정이 다소 복잡하여 구현하기가 매우 까다로운 문제가 대두되고 있다[1]. 또한 이러한 학습법은 적응형 및 온라인 형태로 구성하기가 매우 복잡하기 때문에 비정칙 특성을 갖는 확률시스템의 DBN 모델링에 적용하기가 어려울 수 있다.

본 논문은 LS 추정기법과 최급강하 최적화 기법을 이용하여 DBN 파라미터의 새로운 학습알고리즘을 제안한다. LS 알고리즘은 확률공리를 만족하기 위하여 제약조건을 갖는 추정알고리즘 형태로 구성하였으며, 가장 많이 사용되고 있는 MC 모델의 파라미터 학습에 적용하였다. 또한 HMM의 파라미터 학습을 위하여 최급강하 최적화 알고리즘을 이용하였으며 bilinear 구조를 갖는 HMM의 은닉 및 출력변수에 대한 파라미터의 수정규칙을 각각 산출하였다. 본 논문에서 제안하는 학습규칙은 시스템 관측에 대한 확률분포를 우선 추정한 후에 적용할 수 있으며 확률분포추정은 기존의 잘 알려진 알고리즘을 이용하여 연산할 수가 있다. 컴퓨터 시뮬레이션을 통해 본 논문에서 제안한 알고리즘의 타당성

<sup>†</sup> 교신저자, 정회원 : 동아대학교 전기공학과 교수 · 공박  
E-mail : kslee@dau.ac.kr

\* 정 회원 : 울산과학기술대 전기전자학부 조교수 · 공박

\*\* 정 회원 : 호서대학교 국방과학기술학과 부교수 · 공박  
접수일자 : 2009년 1월 15일  
최종완료 : 2009년 4월 16일

을 분석할 뿐만 아니라 기존의 학습규칙과 비교분석함으로써 성능의 우수성 및 신뢰성을 검증하며 알고리즘 구현의 용이성 또한 검증한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2절에 DBN의 일종인 MC와 HMM에 대하여 서술하며, 3절에 MC 모델을 위한 제약조건을 갖는 LS 기법을 이용한 학습규칙을 제안하며, 4절에는 최급강화 최적화 기반 HMM의 파라미터 학습알고리즘을 제안한다. 5절에는 컴퓨터 시뮬레이션에 대한 결과 및 고찰을, 마지막으로 6절에 결론과 향후 연구계획을 각각 서술한다.

## 2. 동적 Bayesian 네트워크 모델: MC 및 HMM

본 절에는 DBN 모델중 구조가 비교적 간단한 MC 모델과 가장 많이 사용되고 있는 HMM에 대한 주요 내용을 서술한다. 대부분의 실 시스템의 경우 이 두 모델을 이용하여 모델링이 가능하며 따라서 본 논문에서도 이러한 모델에 대한 학습기법을 제안하고자 한다.

### 2.1 MC 모델

그림 1은 MC 모델에 대한 일반적인 구조를 보여준다. 여기서 확률변수  $X(k)$ 은 이산시간  $k$ 에서  $N$ 차원의 상태벡터를 나타내며 이전시간  $k-1$ 의 상태벡터에 대한 종속관계를 보여준다. 또한 상태확률  $p(X=i), i=1, \dots, N$ 은 시간에 따라 그 값들이 변하게 됨을 알 수 있다. 마코브 이론[11]에 의하여, 유한한 이산시간  $k=[0, T]$ 에 대하여 상태벡터  $X(k)$ 의 결합(joint) 확률분포는 다음과 같이 표현된다.

$$p(X(0), \dots, X(T)) = p(X(0)) \prod_{i=1}^T p(X(i)|X(i-1)) \quad (1)$$

여기서  $p(X(0)) \in R^N$ 은 초기 상태확률을 나타내며 조건부 확률분포  $p(X(i)|X(i-1))$ 는 상태변수들 사이의 천이상태를 확률분포로 나타낸다. 이러한 두 확률분포는 주어진 시스템 관측값을 이용하여 MC 모델을 구성하기 위한 목적으로 학습과정을 통하여 설정되어진다. 사실상, 초기상태확률은 특별한 확률분포로부터 결정되어지지만, 반면 조건부확률분포는 이러한 과정을 통하여 결정되어야 한다. MC 모델의 파라미터로서 주어지는 조건부확률은 다음과 같이 정의된다.

$$a_{ij} = p(X(k)=i|X(k-1)=j), \quad i, j=1, \dots, N \quad (2)$$

벡터형태로 표현하기 위하여, 상태변수의 posterior 확률 벡터  $p(X(k))$ 은 prior 확률벡터  $p(X(k-1))$ 와 상태천이확률행렬  $A$ 의 선형조합으로 나타내어지며 다음과 같다.

$$p(X(k)) = Ap(X(k-1)) \quad (3)$$

여기서  $p(X) = [p(X=1), \dots, p(X=N)]^T$  이며  $A = \{a_{ij}\}, i, j=1, \dots, N$ 이다. 확률공리에 의하면 모든 확률값의 합은 1이므로 식 (3)에서 다음의 두 제약조건이 주어진다.

$$\sum_{i=1}^N p(X=i) = 1, \quad \sum_{i=1}^N a_{ij} = 1, \quad i=1, \dots, N \quad (4)$$

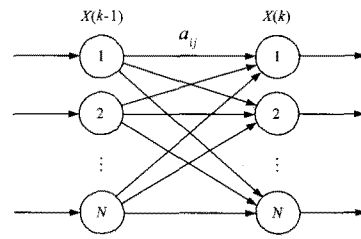


그림 1 MC 모델의 일반적인 구조  
Fig. 1 A typical structure of a MC model

### 2.2 HMM 시스템

다음은 시스템 상태가 노이즈에 의하여 왜곡되어 관측되는 동적 시스템의 모델링에 적합한 HMM 시스템에 대하여 서술한다. 그림 2는 HMM의 일반적인 구조를 보여주며 여기서  $X$ 는 은닉변수로서 정의되며  $Y$ 는 출력상태변수로 주어진다. 그림 2의 은닉변수  $X$ 는 MC 모델의 상태변수로 유사하지만, HMM의 원 상태변수는 직접적으로 관측되어지지 않거나 부분적으로 관측되어진다. 또한 출력신호는 노이즈에 의해 왜곡된 상태신호이므로 MC 모델처럼  $M$ 개의 상태를 갖는 랜덤변수로 정의되어지며, 그 확률벡터로서 다음과 같다.

$$p(Y) = [p(Y=1), \dots, p(Y=M)] \quad (5)$$

마찬가지로  $k=[0, T]$ 에 대하여 결합 확률분포는 다음과 같이 전개된다.

$$p(X(k), Y(k)) = p(X(0))p(Y(0)|X(0)) \prod_{i=1}^T p(X(i)|X(i-1))p(Y(i)|X(i)) \quad (6)$$

여기서  $b_{oi}$ 는 출력변수에 대한 조건부확률로서 다음과 같이 표현된다.

$$b_{oi} = p(Y(k)=o|X(k)=i), \quad o=1, \dots, M, \quad i=1, \dots, N \quad (7)$$

또한 출력 확률벡터는 출력변수에 대한 조건부 확률행렬과 은닉상태벡터에 대한 선형조합으로 표현되어지며 다음과 같다.

$$p(Y(k)) = Bp(X(k)) \quad (8)$$

여기서  $B = \{b_{oi}\}, o=1, \dots, M, i=1, \dots, N$ 이며 마찬가지로 식 (8)은 다음의 제약조건을 갖는다.

$$\sum_{i=1}^M p(Y=i) = 1, \quad \sum_{o=1}^M b_{oi} = 1, \quad i=1, \dots, N \quad (9)$$

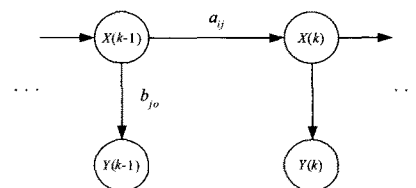


그림 2 일반적인 HMM 구조  
Fig. 2 A typical HMM structure

3. 제약조건을 갖는 LS 기반 MC 모델의 학습알고리즘

앞서 언급한 바와 같이, MC 모델을 구성하기에 앞서 실 시스템에 대한 관측변수의 확률분포는 기본적으로 추정되어 있다고 가정한다. 시스템 관측데이터는 센서시스템을 통해 획득되어지며 이 때 관측데이터를 집합  $D = \{X^{(1)}, \dots, X^{(n)}\}$ 와 같이 표현한다. 여기서  $X^{(i)} = [X^{(i)}(0), \dots, X^{(i)}(T)]^T$ 은  $i$ 번째의 상태관측을 나타내므로 다음과 같은 행렬로도 표현할 수 있다.

$$D = \begin{bmatrix} X^{(1)}(0) & \dots & X^{(n)}(0) \\ \vdots & & \vdots \\ X^{(1)}(T) & \dots & X^{(n)}(T) \end{bmatrix} \quad (10)$$

여기서  $i$ 번째 상태변수에 대한 확률분포는 주어진 데이터 집합  $D(i) = \{X^{(1)}(i), \dots, X^{(n)}(i)\}$ 를 통해 결정할 수 있다. 따라서 식 (10)의 데이터 행렬에 대한 확률분포를 다음과 같이 표현한다.

$$\hat{p}(X) = [\hat{p}(X(0)) \dots \hat{p}(X(T))]^T \quad (11)$$

여기서  $i$ 번째 확률벡터는 다음과 같다.

$$\hat{p}(X(i)) = [\hat{p}(X(i)) = 1, \dots, \hat{p}(X(i)) = N]^T \quad (12)$$

식 (3)에 의하여, 이산시간  $k = [0, T]$  동안의 확률벡터는 다음의 선형행렬로 표현이 가능하다.

$$P_T = P_{T-1}A^T + V \quad (13)$$

여기서  $V \in R^{T \times N}$ 은 확률분포추정으로 부터 발생하는 추정 오차를 나타내며 posterior 및 prior 행렬인  $P_T$ 와  $P_{T-1}$ 는 다음과 같이 전개된다.

$$P_T = \begin{bmatrix} p(X_1(1)) & \dots & p(X_N(1)) \\ \vdots & & \vdots \\ p(X_1(T)) & \dots & p(X_N(T)) \end{bmatrix}, \quad (14)$$

$$P_{T-1} = \begin{bmatrix} p(X_1(0)) & \dots & p(X_N(0)) \\ \vdots & & \vdots \\ p(X_1(T-1)) & \dots & p(X_N(T-1)) \end{bmatrix}$$

여기서  $X_i(j) := \{X(j) = i\}$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $j = 0, \dots, T$ 이다. 본 논문에서 제안하는 MC 모델의 학습은 주어진 두 행렬  $P_T$ 와  $P_{T-1}$ 로부터 상태전이행렬  $A$ 를 LS 알고리즘을 이용하여 추정하는 방식이다. 우선, stacking 연산자를 이용하여, 식 (13)에서 미지의 행렬  $V$ 를 생략한 후 벡터형태로 표현하면 다음과 같다.

$$P_s = H_p a \quad (15)$$

여기서

$$a = [a_1, \dots, a_N]^T \in R^{N^2 \times 1} \quad (16a)$$

$$P_s = [p(X_1(1:T)), \dots, p(X_N(1:T))]^T \in R^{(T \times N) \times 1} \quad (16b)$$

$$H_p = \begin{bmatrix} P_{T-1} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & P_{T-1} \end{bmatrix} \in R^{(T \times N) \times N^2} \quad (16c)$$

이며 식 (16a)에서  $a_i = [a_{i1}, \dots, a_{iN}]^T \in R^{N \times 1}$ ,  $i \in [1, N]$ 이며 식 (16b)에서 표현을 보다 간단하게 하기 위하여  $p(X_i(1:T)) := [p(X_i(1)), \dots, p(X_i(T))]^T \in R^{T \times 1}$ 와 같이 둔다. 식 (16)에 대하여 over-determine한 LS의 해를 찾기 위하여 시스템 관측데이터의 양이 충분히 많아야 하며, 즉  $T \gg N^2$ 이어야 한다. 잘 알려진 LS 추정알고리즘을 적용하여 식 (16)에 대한 파라미터 추정식은 다음과 같다.

$$\hat{a} = (H_p^T H_p)^{-1} H_p^T P_s \quad (17)$$

여기서  $H_p$ 는 대각행렬이므로 선형대수학 이론을 이용하여 전개하면 식 (17)은 다음과 같이 정리된다.

$$\hat{a} = H_p^{-1} P_s \quad (18)$$

3.1 제약조건을 갖는 LS 학습알고리즘

앞서 언급한 식 (4)의 확률분포에 대한 제약조건을 만족하기 위하여 식 (17)의 추정식을 다음과 같은 제약조건을 적용하여야 한다.

$$C\hat{a} = b \quad (19)$$

여기서  $C$ 와  $b$ 는 상수로서 식 (4)의 제약조건을 내포하고 있으며 다음과 같이 각각 정의되어진다.

$$C = [I_N, \dots, I_N] \in R^{N \times N} \quad (20a)$$

$$b = [1, \dots, 1]^T \in R^{N \times 1} \quad (20b)$$

식 (19)의 선형제약조건을 갖는 LS 추정식의 해를 구하기 위하여, 우선 Lagrange 평가함수를 정의한 후, 이 함수의 최소값을 갖는 파라미터  $a_c$ 를 산출하게 된다.

$$J = (\hat{P}_s - H_p a)^T (\hat{P}_s - H_p a) + \lambda^T (C\hat{a} - b) \quad (21)$$

여기서  $\lambda \in R^{N \times 1}$ 는 Lagrange 연산자를 나타낸다. 우선 식 (21)을 선형대수학 이론을 적용하여 전개하면

$$J = \hat{P}_s^T \hat{P}_s - 2a^T H_p^T \hat{P}_s + a^T H_p^T H_p a + \lambda^T C\hat{a} - \lambda^T b \quad (22)$$

가 되며 여기서  $\partial b^T a / \partial a = b$ 와  $\partial a^T C\hat{a} / \partial a = 2C\hat{a}$ 이므로 파라미터 벡터  $a$ 에 대한 미분식을 연산하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial J}{\partial a} = -2H_p^T \hat{P}_s + 2H_p^T H_p a + C^T \lambda \quad (23)$$

식 (23)에서 최소값을 구하기 위하여 식 (23)을 0으로 대입하여 전개하면 다음과 같이 연산된다.

$$\begin{aligned} \hat{a}_c &= (H_p^T H_p)^{-1} H_p^T \hat{P}_s - \frac{1}{2} (H_p^T H)^{-1} C^T \lambda \\ &= \hat{a} - (H_p^T H_p)^{-1} C^T \frac{\lambda}{2} \end{aligned} \quad (24)$$

여기서  $\hat{a}$ 는 식 (17)에서 일반 LS 알고리즘으로 산출한 결과값이며  $\lambda$ 를 산출하기 위하여 식 (19)의 제약조건을 적용하여 나타내면

$$C a_c = C \hat{a} - C (H_p^T H_p)^{-1} C^T \frac{\lambda}{2} = b \quad (25)$$

와 같다. 또한  $\lambda$ 에 대한 방정식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\lambda = 2 [C (H_p^T H_p)^{-1} C^T]^{-1} (C \hat{a} - b) \quad (26)$$

식 (26)을 식 (24)에 대입하여 전개하면 최종적으로 제약 조건을 갖는 파라미터  $a_c$ 에 대한 추정식을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\hat{a}_c = \hat{a} - (H_p^T H_p)^{-1} C^T [C (H_p^T H_p)^{-1} C^T]^{-1} (C \hat{a} - b) \quad (27)$$

식 (27)의 추정식은 제약조건이 없는 일반 LS 알고리즘에서 추정된 해와 함께 구성되어짐을 알 수 있다.

#### 4. 최급강하 최적화 기반 HMM의 학습알고리즘

HMM의 학습규칙의 경우 미지의 은닉변수로 인하여 MC 모델 보다 다소 복잡한 과정이 요구되어진다. 우선 그림 2의 HMM에서 상태 및 출력벡터에 대한 확률관계를 다시 나타내면

$$p(X(k)) = A p(X(k-1)) \quad (28a)$$

$$p(Y(k)) = B p(X(k)) \quad (28b)$$

와 같다. 식 (28b)의 출력변수에 대한 확률분포  $p(Y)$ 는 식 (11)과 마찬가지로 시스템 관측데이터로부터 그 확률분포가 추정되어진다고 가정하며 다음과 같이 표현한다.

$$\hat{p}(Y) = [\hat{p}(Y(0)), \dots, \hat{p}(X(K))]^T \quad (29)$$

여기서  $i$ 번째 확률분포 벡터  $\hat{p}(X(i))$ ,  $i=0, \dots, K$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$\hat{p}(Y(i)) = [\hat{p}(Y(i)) = 1, \dots, \hat{p}(Y(i)) = M]^T \quad (30)$$

식 (28a)의 은닉상태변수  $X$ 는 비관측변수로서 그 확률분포  $p(X)$  또한 미지의 값으로 주어지므로 식 (28b)에서  $X$ 에 대한 확률관계를 출력  $Y$ 에 대한 식으로 다음과 같이 표현한다.

$$p(X(i)) = B^+ p(Y(i)), \quad i=1, \dots, K \quad (31)$$

여기서  $B^+ \in R^{N \times M}$ 는 행렬  $B$ 의 pseudo 역행렬로서

$B^+ = (B^T B)^{-1} B^T$ 로 주어진다. 식 (28a)에서  $i$ 번째의 상태확률분포를 식 (28b)에 적용하여 나타내면

$$\begin{aligned} p(Y(i+1)) &= B p(X(i+1)) \\ &= B A p(X(i)) \end{aligned} \quad (32)$$

이며 또한 식 (31)의 관계를 식 (32)에 대입하여 전개하면 다음과 같다.

$$p(Y(i+1)) = B A B^+ p(Y(i)) \quad (33)$$

식 (33)은 MC 모델의 상태확률 관계와 매우 유사하며 즉,  $i+1$ 에서의 출력벡터에 대한 확률분포는  $i$ 에서의 확률분포와 상태 및 관측확률행렬의 선형조합으로서 재귀적 구조로 표현된다. 하지만, 식 (33)에서 추종되어질 변수  $B A B^+$ 은 직접적 연산이 되기 어렵다. 우선 이 변수에 대하여

$$\Theta = B A B^+ \in R^{M \times M} \quad (34)$$

와 같이 정의한 후 식 (33)을 다음과 같이 나타낸다.

$$p(Y(i+1)) = \Theta p(Y(i)) \quad (35)$$

LS 알고리즘으로 나타내기 위하여 식 (15)와 마찬가지로 식 (35)을 다음과 같은 추정식으로 표현한다.

$$P_s = H_p \theta + W \quad (36)$$

여기서  $W \in R^{(T \times M) \times 1}$ 은 추정오차행렬을 나타내며, 파라미터 벡터와 그 외 행렬들은 다음과 같다.

$$\theta = \text{col}\{\Theta\} \in R^{M \times 1} \quad (37a)$$

$$P_s = [p(Y_1(1:T)), \dots, p(Y_M(1:T))]^T \in R^{(T \times M) \times 1} \quad (37b)$$

$$H_p = \begin{bmatrix} P_{T-1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & P_{T-1} \end{bmatrix} \in R^{(T \times M) \times M^2} \quad (37c)$$

식 (37c)에서  $P_{T-1}$ 은 관측변수에 대한 추정행렬을 포함하고 있으며 다음과 같이 주어진다.

$$P_{T-1} = \begin{bmatrix} p(Y_1(0)) & \dots & p(Y_M(0)) \\ \vdots & & \vdots \\ p(Y_1(K-1)) & \dots & p(Y_M(K-1)) \end{bmatrix} \quad (38)$$

LS 추정알고리즘에 의하여 식 (36)의  $\theta$ 에 대한 추정식은 다음과 같이 주어지며

$$\hat{\theta} = (H_p^T H_p)^{-1} H_p^T P_s \quad (39)$$

여기서  $H_p$ 는 대각행렬이므로 최종적으로

$$\hat{\theta} = H_p^{-1} P_s \quad (40)$$

와 같이 연산되어진다.

4.1 최급강하 최적화 학습알고리즘

식 (40)의 추정식은 식 (34)의 행렬방정식에 대한 결과값으로 정의되어지며 학습알고리즘은 이 추정된 파라미터 벡터로부터 식 (34)의 행렬요소들을 모두 구하는 것이다. 식 (34)의 행렬방정식을 vec 연산자를 이용하여 벡터형태로 표현하면

$$vec(BAB^+) = \hat{\theta} \tag{41}$$

와 같다. 식 (41)의 좌반면은 Kronecker 곱셈 연산자  $\otimes$ 를 이용하여 다음과 같이 전개한다.

$$vec(BAB^+) = [(B^+)^T \otimes B]vec(A) = \hat{\theta} \tag{42}$$

식 (42)는 Kronecker 곱셈과 vec 연산을 통해 다음과 같이 표현하며

$$(B^+)^T \otimes B = [\Gamma_1 \ \dots \ \Gamma_M]^T \in R^{M^2 \times N^2} \tag{43}$$

여기서

$$\Gamma_i = [b_{i1}^+ B \ \dots \ b_{iN}^+ B]^T \in R^{M \times N^2}, \ i \in [1, M] \tag{44}$$

이며 또한

$$vec(A) = [a_1 \ \dots \ a_N]^T \in R^{N^2 \times 1} \tag{45}$$

이며 여기서 파라미터는 다음과 같이 주어진다.

$$a_i = [a_{i1} \ \dots \ a_{iN}]^T \in R^{N \times 1}, \ i \in [1, M] \tag{46}$$

따라서 식 (43)과 식 (45)를 식 (42)에 대입하여 전개하면

$$vec(BAB^+) = [\zeta_1 \ \dots \ \zeta_M]^T \in R^{N^2 \times 1} \tag{47}$$

와 같으며 여기서 벡터의 요소는 다음과 같이 전개되어진다.

$$\begin{aligned} \zeta_i &= \Gamma_i a \\ &= [b_{i1}^+ B \ \dots \ b_{iN}^+ B] \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} \\ &= [b_{i1}^+ B a_1 + \dots + b_{iN}^+ B a_N] \in R^{M \times 1}, \ i \in [1, M] \end{aligned} \tag{48}$$

최급강하기법을 이용한 학습알고리즘은 두 파라미터 벡터

$$a_i \in R^{N \times 1}, \ b_i \in R^{M \times 1}, \ i \in [1, M] \tag{49}$$

에 대하여 다음의 평가함수를 최소화하는 해를 탐색하는 연산과정이다.

$$J = \arg \min_{a_i, b_i} \frac{1}{2} e^2 \tag{50}$$

여기서 추정오차  $e$ 는 식 (49)에 대한 편차로서 정의되며 다음과 같다.

$$\begin{aligned} e &= [\hat{\theta} - vec(BAB^+)]^T [\hat{\theta} - vec(BAB^+)] \\ &= \theta^T \theta - 2vec(BAB^+)^T \theta + vec(BAB^+)^T vec(BAB^+) \end{aligned} \tag{51}$$

최급강하 최적화 알고리즘에 의한 식 (49)의 두 파라미터 벡터의 수정규칙은 각각 다음과 같으며

$$a_i(n+1) = a_i(n) - \eta \frac{\partial J}{\partial a_i} \tag{52}$$

$$b_i(n+1) = b_i(n) - \eta \frac{\partial J}{\partial b_i} \tag{53}$$

여기서  $\eta \in (0, 1)$ 은 학습파라미터를 나타낸다. 우선 식 (52)와 식 (53)에서 우반면의 편미분항은 미분의 연쇄법칙(chain rule)을 이용하여 다음과 같이 전개할 수 있다.

$$\frac{\partial J}{\partial a_i} = \frac{\partial J}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial vec(BAB^+)} \frac{\partial vec(BAB^+)}{\partial \zeta_i} \frac{\partial \zeta_i}{\partial a_i} \tag{54}$$

$$\frac{\partial J}{\partial b_i} = \frac{\partial J}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial vec(BAB^+)} \frac{\partial vec(BAB^+)}{\partial \zeta_i} \frac{\partial \zeta_i}{\partial b_i} \tag{55}$$

여기서 각각의 미분항은 다음과 같다.

$$\frac{\partial J}{\partial e} = e, \quad \frac{\partial e}{\partial vec(BAB^+)} = -2\theta^T + vec(BAB^+)^T,$$

$$\frac{\partial vec(BAB^+)}{\partial \zeta_i} = [0 \ \dots \ 1_{N^2 \times M} \ \dots \ 0]^T := 1_{N^2 \times M}^{(i)},$$

$$\frac{\partial \zeta_i}{\partial a_i} = b_{i1}^+ B, \quad \frac{\partial \zeta_i}{\partial b_i} = \sum_{j=1}^N b_{ij}^+ B^{(i)} a_j$$

최종적으로 식 (54)와 식 (55)를 식 (52)와 식 (53)에 대입하여 두 파라미터에 대한 수정규칙을 나타낼 수 있으며 다음과 같다.

$$a_i(n+1) = a_i(n) + \eta e \{2\theta^T - vec(BAB^+)^T\} 1_{N^2 \times M}^{(i)} b_{i1}^+ B \tag{56}$$

$$b_i(n+1) = b_i(n) + \eta e \{2\theta^T - vec(BAB^+)^T\} 1_{N^2 \times M}^{(i)} \sum_{j=1}^N b_{ij}^+ B^{(i)} a_j \tag{57}$$

식 (56)과 식 (57)의 두 결과로부터 bilinear 형태의 학습 구조임을 알 수 있으며 이는 한쪽의 파라미터가 수정된 후 이 수정값이 다른 쪽 파라미터의 수정에 관계가 있음을 보여준다.

5. 컴퓨터 시뮬레이션

본 논문에서 제안한 DBN 학습알고리즘에 대한 타당성을 검증하기 위하여 컴퓨터 시뮬레이션을 실시하였다. 우선 3개의 상태변수를 갖는 비정치 확률신호에 대하여 MC 모델의 학습을 실시하였다. 시스템 관측신호는 평균값이 0이고 분산이 0과 1사이의 항등분포를 갖는 비정치 가우시안 신호로 정의하였다. 그림 3은 이 신호에 대한 파형을 보여주며

우선 연속신호를 이산화하기 위하여 다음과 같이 이산변수를 정의한다.

$$\begin{aligned} x_1 &:= \{X|X \in (-\infty, -0.5)\} \\ x_2 &:= \{X|X \in [-0.5, 0.5]\} \\ x_3 &:= \{X|X \in (0.5, +\infty)\} \end{aligned} \quad (58)$$

이산변수가 3개이므로 MC 모델의 파라미터 수는 9개가 된다. 본 논문은 3장에서 제안한 학습알고리즘을 식 (55)에 대하여 시뮬레이션을 실시하였으며 그림 4는 추정된 천이확률에 대한 파형을 보여준다. 이 실험파형으로부터 약 200개의 데이터 이후부터는 추정값이 정상상태에 도달함을 알 수 있다. 다음으로, 추정된 파라미터와 prior 확률분포를 이용하여 상태확률  $\hat{p}(X)$ 를 다음과 같이 연산하였다.

$$\hat{p}(x_i(k)) = \sum_{j=1}^N a_{ji} \hat{p}(x_j(k-1)), i=1, \dots, N \quad (59)$$

식 (59)의 추정값을 잘 알려진 Parzen 확률분포 추정알고리즘에 적용하여 산출한 결과값과 비교분석함으로써 추정한 파라미터의 타당성을 검증한다. Parzen 확률분포 추정알고리즘은 학습데이터가 많은 경우에 효율적인 추정기법으로서 알려져 있다. 본 논문은 그림 3의 데이터를 이용하여 Parzen 알고리즘을 적용하였으며 본 논문에서 제안한 결과값을 적용하여 다음에 정의되는 오차값을 산출하였다.

$$E(k) = \log \|p(X(k)) - \hat{p}(X(k))\| \quad (60)$$

여기서  $p(X)$ 는 Parzen 추정값을 나타낸다. 그림 5는 이 오차에 대한 파형을 보여준다. 오차계측은 데이터의 수가 증가함에 따라 오차값이 점근적으로 감소함을 알 수 있으며 정상상태부근에서는 두 파형이 거의 동일함을 알 수 있다. 이 파형으로부터 본 시뮬레이션에서 추정된 값과 Parzen 추정기법의 결과가 거의 동일함을 보여주며, 결론적으로 제안한 학습규칙으로 인한 추정 결과에 대하여 타당성을 보여준다.

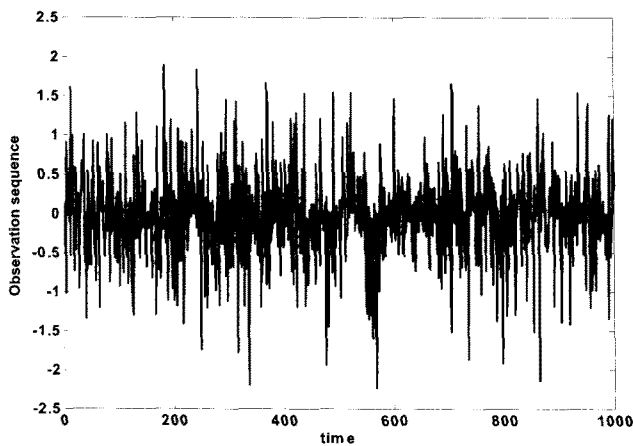


그림 3 시스템 관측 파형  
Fig. 3 System observation sequence

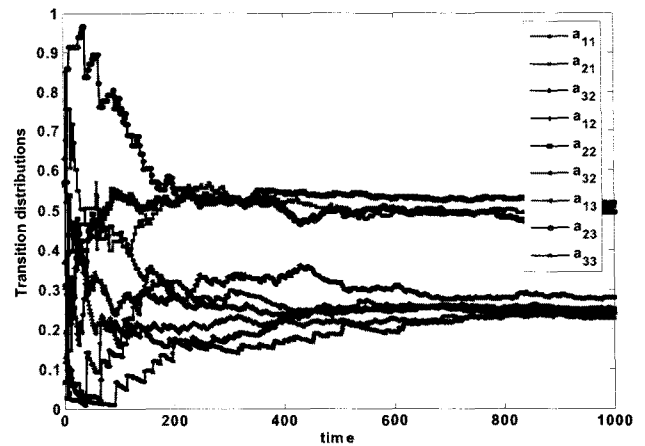


그림 4 추정된 상태천이확률  
Fig. 4 Estimated state transition probabilities

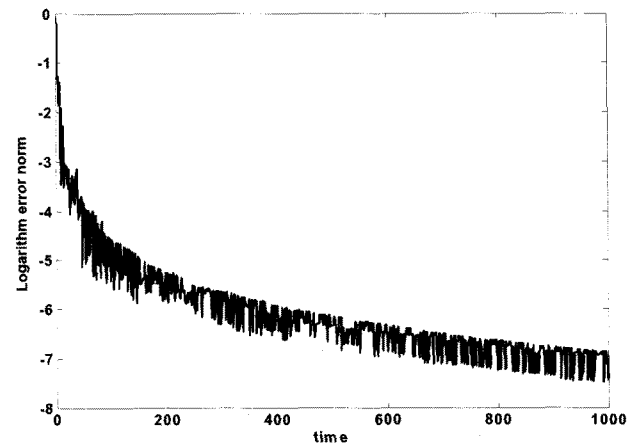


그림 5 추정오차  
Fig. 5 Estimated logarithm error

다음으로 HMM에 제안한 학습알고리즘을 적용하기 위하여 참고문헌 [12]에서 사용한 확률시스템을 이용하였다. 이 시스템은  $\{-1, 0, 1\}$ 의 3개의 상태값을 발생시키며 비정칙 가우시안 노이즈 신호에 의하여 왜곡되어진다. 이 시스템으로부터 1000개의 학습데이터를 획득하였으며 그림 6은 그 파형을 보여준다. HMM 시스템을 구성하기 위하여 은닉상태 변수와 출력변수를 각각  $X \in \{x_1, x_2, x_3\}$ 와  $Y \in \{y_1, y_2, y_3\}$ 와 같이 정의되며, 각 변수는 다음과 같이 주어진다.

$$x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1 \quad (61)$$

$$\begin{aligned} y_1 &= \{Y|Y \in (-\infty, -0.5)\} \\ y_2 &= \{Y|Y \in [-0.5, 0.5]\} \\ y_3 &= \{Y|Y \in (0.5, \infty)\} \end{aligned} \quad (62)$$

이러한 시스템 구성에 제안한 학습알고리즘을 적용하여 시뮬레이션을 실시하였으며, 시뮬레이션 결과로서 그림 7과 그림 8에 추정된 파라미터 값을 각각 보여준다. 마찬가지로 이산변수가 3개이므로 추정 파라미터의 개수는 각각 9개가 된다. 이 파형으로부터 약 220개의 데이터에 도달할 때까지

과도응답상태를 보여주고 있으며 이후에는 정상상태로 추정 값들이 수렴함을 알 수 있다. 하지만 두 파라미터의 궤적은 어느 정도의 리플현상을 갖는 시변특성을 보이고 있으며 이것은 시스템의 비정치 동특성으로 인한 것으로 분석된다. 마찬가지로, 그림 7과 그림 8의 결과로부터 출력확률분포를 연산할 수 있으며 다음과 같다.

$$\hat{p}(Y(k+1)) = B(k) \{A(k)p(X(k))\} \quad (63)$$

여기서 posterior 추정확률분포는 prior 확률분포와 추정된 행렬  $A(k)$ 와  $B(k)$ 와의 선형조합으로 구성되어진다. 앞서 실시한 바와 같이, 식 (63)의 결과값을 Parzen 추정알고리즘의 결과와 비교하여 다음의 로그오차를 연산하였다.

$$E(k) = \log \|p(Y(k)) - \hat{p}(Y(k))\| \quad (64)$$

그림 9는 식 (64)의 오차값에 대한 파형을 보여준다. 이 결과로부터, 추정계측은 비교적 짧은 과도응답을 가지며 약 -2 이하의 로그오차를 볼 수 있으며, 또한 약 200개의 데이터 이후에는 오차값이 현저히 낮아지며, 최종적으로 두 파형이 거의 동일함을 알 수가 있다.

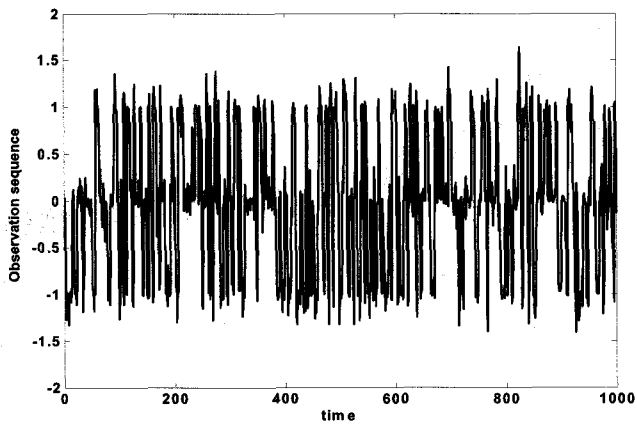


그림 6 노이즈가 첨가된 시스템 관측파형  
Fig. 6 System observation sequence corrupted by noise

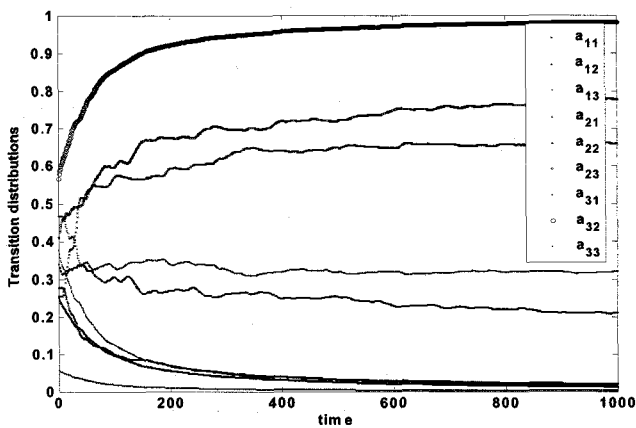


그림 7 추정된 상태전이확률  
Fig. 7 Estimated state transition probabilities

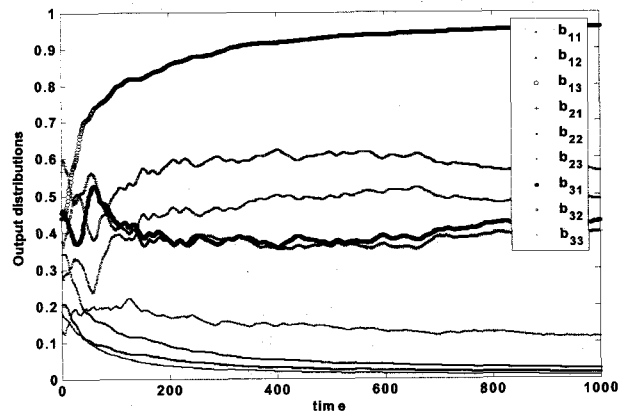


그림 8 추정된 시스템 출력확률  
Fig. 8 Estimated system output probabilities

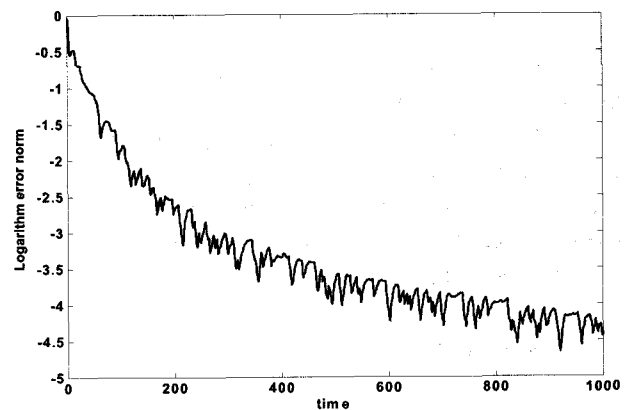


그림 9 추정오차  
Fig. 9 Estimated logarithm error

## 6. 결 론

본 논문은 제약조건을 갖는 LS 추정기법과 최급강하 최적화 알고리즘을 이용한 DBN 파라미터의 새로운 학습기법을 제안하였다. 두 학습알고리즘은 비정치 확률신호에 대하여 각각 MC와 HMM의 DBN 모델링에 적용되었으며, 추정 결과값을 기존의 Parzen 기법을 이용하여 구한 결과값과 비교 분석하였다. 이러한 비교 시뮬레이션을 통해 본 논문에서 제안한 기법이 기존의 기법에 대하여 그 결과가 매우 비슷함을 알 수 있었으며 하지만 본 논문에서 제안한 학습규칙은 그 구조가 비교적 간단하여 실시간에서 구현하기가 용이하며 실적용성이 매우 높은 것으로 분석되었다. 이러한 연구성과를 더욱 확장하기 위하여, 향후 연구로는 실시간 확률시스템에 대한 test-bed를 구성하여 확률 체어시스템에 본 DBN 학습알고리즘을 적용한 실시간 모델링에 적용하고자 한다.

### 감사의 글

본 논문은 2009학년도 동아대학교 학술연구비에 의하여 연구되었음

## 참 고 문 헌

- [1] K. Murphy, "Dynamic Bayesian networks: Representation, Inference and Learning" *Ph.D. Dissertation*, UC Berkeley, 2002.
- [2] X. Li, M. Parizeau, and R. Plamondon, "Training hidden Markov models with multiple observations - A combinatorial method," *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol.22, no.4, pp. 371-377, 2000.
- [3] M. Stone, "Cross-validators choice and assessment of statistical predictions," *J. of the Royal Statistical Society*, vol. B36, no. 2, pp. 111-133, 1974.
- [4] J. M. Pena, J. Bjorkegren, and J. Tebner, "Learning dynamic Bayesian network models via cross-validation," *Pattern Recognition Letters*, vol. 26, no. 14, pp. 2295-2308, 2005.
- [5] R. E. Schapire, Bartlett, P. Y. Freund, and W. S. Lee, "Boosting the margin: a new explanation for the effectiveness of voting methods," *Annals of Statistics*, vol. 26, no.5, pp.1651-1686, 1998.
- [6] A. Garg, V. Pavlovic, and J. M. Rehg, "Boosted learning in dynamics Bayesian networks for multimodal speaker detection," *Proc. of the IEEE*, vol. 91, no.9, pp.1355-1369, 2003.
- [7] F. Tian, H. Zhang, and Y. Lu, "Research on modeling with dynamics Bayesian networks," *Proc. of the IEEE/WIC Int. Conf. on Web Intelligence*, pp. 606-609, 2003.
- [8] J. A. Bilmes, "Buried Markov models: a graphical-modeling approach to automatic speech recognition," *Computer Speech and Language*, vol. 17, pp. 213-231, 2003.
- [9] L. Cohen and A. Bronstein, "Adaptive online learning of Bayesian network parameters," <http://www.hpl.hp.com/techreports/2001/HPL-2001-156.pdf>, 2001.
- [10] J.-T. Chien, "Online unsupervised learning of hidden Markov models for adaptive speech recognition," *IEEE Proc. of Vision, Image and Signal Processing*, vol. 148, no. 5, pp. 315-324, 2001.
- [11] A Papoulis, S. U. Pillai, *Probability, random variables and stochastic processes*, McGraw Hill, 2002.
- [12] V. Krishnamurthy, J. B. Moore, and S.-H. Chung, "Hidden Markov model signal processing in presence of unknown deterministic inferences," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 38, no. 1, pp. 146-152, 1993.

## 저 자 소 개



## 조 현 철 (曹賢哲)

1971년 9월 1일생. 1997년 2월 부경대학교 제어계측공학과 졸업(학사). 1999년 2월 동아대학교 전기공학과 졸업(석사). 2006년 8월 미국 네바다 주립대학교 전기공학과 졸업(Ph.D.). 2006년 8월~2009년 2월 동아대학교 전기공학과 포닥연구원. 2009년 3월~현재 울산과학기술대학교 전자학부 조교수

Tel : 052-279-3166

Fax : 052-277-1538

E-mail : hcjo@mail.uc.ac.kr



## 이 권 순 (李權純)

1955년 1월 18일생. 1973년 충남대 졸업(학사). 1997년 서울대 대학원 전기공학과 졸업(석사). 1990년 미국 오레곤 주립대학교 전기 및 컴퓨터공학과 졸업(Ph.D.). 1982년~현재 동아대학교 전기공학과 교수

Tel : 051-200-7739

Fax : 051-200-7743

E-mail : kslee@dau.ac.kr



## 구 경 완 (丘庚完)

1983년 2월 충남대학교 전자공학과(공학사). 1985년 2월 충남대학교 전자공학과(공학석사). 1992년 2월 충남대학교 전자공학과(공학박사). 1998년 2월~1999년 2월 일본 우츠노미야대학 박사후 연구원. 1987년 6월~1989년 2월 현대전자 반도체연구소 선임연구원. 1989년 3월~1994년 2월 충청전문대학 전자과 조교수. 1994년 3월~2005년 2월 영동대학교 전자·정보공학부 부교수. 2005년 3월~현재 호서대학교 국방과학기술학과 부교수

Tel : 041-540-9541

E-mail : alarmkoo@hoseo.edu