

논문 2009-46SP-3-8

# 위상복원을 위한 iterative 알고리즘의 수렴 특성

(Convergence Properties of an Iterative Algorithm for Phase Retrieval)

김 우 식\*

(Wooshik Kim)

## 요 약

위상복원문제 (Phase retrieval problem)은 어떤 신호의 푸리에 변환의 크기로부터 신호를 구하거나 푸리에 변환의 위상을 구하는 문제이다. 이 문제는 천문학, X-선 결정학 등 많은 물리적인 문제에서 발생하고 있으며, 최근에는 고출력 레이저를 이용하여 인공 별을 만들 수 있게 됨에 따라 많은 필요성이 대두될 것으로 예측되는 분야이다. 일반적으로 신호의 푸리에 변환의 크기만으로는 유일하게 해를 구할 수 없으며, 원하는 해를 구하기 위하여 구하고자 하는 신호에 여러 가지 제약 조건을 주어 유일한 해를 갖도록 연구를 진행하여 왔다. 이 논문에서는 원 신호의 푸리에 크기 외에, 구하고자 하는 신호에 알고있는 신호를 더한 신호의 푸리에 크기를 이용하여, iterative 한 방법으로 신호를 복원하는 문제에 대하여 다룬다. 원하는 신호를 구하기 위하여 간략하게, 이론적인 배경과 iterative 알고리즘을 소개하고, 이 알고리즘이 구하고자 하는 신호로 수렴한다는 것을 보인다.

## Abstract

The phase retrieval problem is a problem of reconstructing a signal or the phase of Fourier transform of the signal from the magnitude of its Fourier transform. In this paper we address the problem of reconstructing an unknown signal from the magnitude of its Fourier transform and the magnitude of Fourier transform of another signal that is given by the addition of the desired signal. After we briefly mention the uniqueness conditions under which a signal can be uniquely specified from the given information and key equations of the iterative algorithm, we present mathematical background that the iterative algorithm converges to the desired signal, present an example that illustrates the performance of the reconstruction algorithm, and show its convergence property.

**Keywords :** 위상복원, Fourier transform, Signal reconstruction from its partial information, 화상처리

## I. 서 론

위상복원문제는 어떤 신호의 푸리에 변환의 크기로부터 그 신호나 또는 그 신호의 푸리에 변환의 위상을 구하는 문제이다<sup>[1~2]</sup>. 이 문제는 역사가 깊은 문제로, 많은 물리적인 문제에서 발생해 왔다. 예를 들어, X-선 결정학<sup>[3]</sup>, X-선 영상촬영<sup>[4~5]</sup>, 전자 현미경, 천문학, 광학, 신호처리 등에서 발생을 해왔다<sup>[1,6]</sup>. 이 문제는 일반적으로 해가 유일하게 결정이 되지 않기 때문에, 어려

운 문제로 알려져 왔다. 예를 들어, 일차원 신호가 있다고 가정하고, 이 신호의 푸리에 변환의 크기를 측정했다고 가정한다. 그러면, 구하고자 하는 신호에 길이에 대한 아무런 제약 조건이 주어지지 않으면, 이 푸리에 변환의 크기를 갖는 한 신호에 all-pass 신호를 컨볼루션하여 무한히 많은 신호를 찾아낼 수 있다<sup>[1]</sup>. 구하고자 하는 신호가 유한한 길이를 갖는다고 가정하여도, 소위 zero-flipping이라는 과정을 거쳐서 많은 수의 같은 푸리에 변환의 크기를 갖는 신호를 구할 수 있다. 이런 과정 없이도, 소위 trivial transformation을 이용하면 같은 푸리에 변환의 크기를 갖는 신호를 몇 개는 찾아낼 수 있다<sup>[2]</sup>. 신호가 2차원 또는 그 이상의 차원을 갖는 경우에는 1차원 신호와는 매우 다른 성질을 갖는다. 즉, 2차원 또는 그 이상의 차원의 신호는 z-변환이 하나의 인

\* 평생회원, 세종대학교 전자정보공학대학  
정보통신공학과

(Dept. of Info. and Com. Eng., Sejong University)

※ 이 논문은 2008년도 세종대학교 교내연구비 지원을 받아 수행된 연구임.

접수일자: 2008년10월13일, 수정완료일: 2009년4월15일

수로 구성되어 있는 irreducible한 다항식을 가지며<sup>[6~7]</sup>, 따라서 trivial 변환으로 인한 ambiguity를 고려할 때, 유일하게 결정이 된다. 하지만, 그럼에도 불구하고 효과적으로 동작하는 알고리즘이 없어서 위상복원문제에서 신호를 복원하기는 어렵다.

위상 복원 문제와 관련된 어려움을 해결하기 위하여, 많은 학자들이 여러 가지 방법을 제안했다. 예를 들어, 알고 있는 신호를 더하는 방법을 이용하거나<sup>[8~10]</sup>, 또는 윈도우 함수를 사용하는 방법<sup>[11~12]</sup>, 또는 한 비트의 정보<sup>[13]</sup> 또는 2차원 신호의 경계값<sup>[14]</sup>과 같은 부분 정보를 이용하는 방법을 제안하였다.

이 중에서, [8, 15]에서는 더해지는 신호를 이용하여 위상복원을 해결하는 문제를 연구하였다. [8]에서는 구하고자 하는 신호의 푸리에 변환의 크기와 구하고자 하는 신호에 알고있는 신호가 더해진 새로운 신호의 푸리에 변환의 크기가 주어졌을 때, 신호가 주어진 정보로부터 유일하게 결정되기 위한 조건을 보였고, 또한 [15]에서는 Closed-form 알고리즘과 iterative 알고리즘의 주요 식을 보였다. closed-form 알고리즘은 주로 recursive 식으로 구성이 되어 있어서, 잡음에 매우 민감하며, 특히 계산중에 발생하는 잡음에도 매우 민감하다.

반면에 Iterative 알고리즘은 어떤 단계에서의 입력은 전 단계에서의 출력 전체나 또는 일부가 되는 알고리즘을 말한다. 이런 형태의 알고리즘은 recursive 알고리즘에 비하여 2가지의 장점을 갖는다. 하나는 신호가 원하는 신호로 수렴하도록 하기 위하여, 유한한 영역 조건, 영상 신호에서와 같은 양수 조건, 주어진 푸리에 변환의 크기를 만족해야 한다는 조건 등 많은 제한 조건을 알고리즘의 각 단계에서 만족하도록 만들 수 있다. 다른 장점은 잡음의 영향이 커지기 전에 언제든지 알고리즘을 종료할 수 있다는 점이다.

이 논문에서는, [15]에서 간략히 언급을 했던 iterative 알고리즘을 개발하고, 수렴 특성에 관하여 증명한다. 또한 알고리즘의 성능을 보여주는 예를 보인다.

## II. 이론적 배경

이 논문에서 다루고자 하는 문제는 알고 있지 않은 신호를 2개의 푸리에 변환의 크기, 즉, 그 신호의 푸리에 크기와 구하고자 하는 신호에 알고 있는 신호가 더해진 신호의 푸리에 변환의 크기로부터 그 신호를 복원

하는 문제에 대하여 고려한다. 이 더해지는 신호는 일종의 기준 신호로서 작용한다. 이 문제를 수식으로 나타내면,

$$y(n) = x(n) + h(n) \tag{1}$$

이며, 여기에서  $n$ 과  $M$ 차원의 신호로  $n = (n_1, n_2, \dots, n_M)$ 이다. 이 논문에서  $x(n)$ 은 실수인 discrete-time 신호라고 가정하고, 이 신호의 0이 아닌 신호 영역 (ROS: Region of support)은  $R(M) = [0, N_1 - 1] \times [0, N_2 - 1] \times \dots \times [0, N_M - 1]$ 이라고 가정한다.

이 문제가 유일한 해를 갖는지를 알아보기 위하여  $\hat{x}(n)$ 과  $\hat{y}(n) = \hat{x}(n) + h(n)$ 을 위에서  $x(n)$ 과  $y(n)$ 에 주어진 모든 조건을 만족한다고 가정한다. 그러면 이 신호들 사이에서는  $|\hat{X}(\bar{\omega})| = |X(\bar{\omega})|$ 와  $|\hat{Y}(\bar{\omega})| = |Y(\bar{\omega})|$ , 즉,

$$|\hat{X}(\bar{\omega}) + H(\bar{\omega})| = |X(\bar{\omega}) + H(\bar{\omega})| \tag{2}$$

를 만족해야 한다. 여기에서  $\bar{\omega}$ 는  $M$ 차원의 신호로  $\bar{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_M)$ 이다.

[8]에서의 정리 2와 3에 의하면, 구하고자 하는 신호  $x(n)$ 은  $h(n)$ 의 non-linear phase 부분의  $z$ -변환이  $x(n)$ 의  $z$ -변환의 인수가 되지 않는다면, 즉 나누어지지 않는다면 주어진 조건으로부터 유일하게 정해질 수 있다고 보였다. 이를 수식으로 나타내면,  $h(n)$ 의  $z$ -변환인  $H(z)$ 를

$$H(z) = A(z)H_{lp}(z) \tag{3}$$

로 인수분해 된다고 가정한다. 여기에서  $A(z)$ 는  $H(z)$ 의 non-linear phase 부분을,  $H_{lp}(z)$ 는  $H(z)$ 의 linear-phase 부분을 나타내며,  $H(z) = \pm z^{-2n_0} H_{lp}(z^{-1})$  성질을 만족한다. 그러면 이 문제의 해는

$$\hat{X}(z) = X(z) \tag{4}$$

이거나 또는

$$\hat{X}(z) = \pm z^{-2n_0} \frac{X(z^{-1})A(z)}{A(z^{-1})} \tag{5}$$

으로 주어진다.

구하고자 하는 신호가 유한한 영역을 갖는다고 하였으므로,  $X(z)/A(z)$ 가  $z$ 의 다항식이 아니라면, 다시 말하여,  $A(z)$ 가  $X(z)$ 를 나눌 수 없다면, (5)에서 주어진 신호는 유한한 영역을 가질 수 없으며, 따라서 해가 될

수 없다. 따라서, 구하고자 하는 해는 유일하게 결정된다. 또한, 2차 또는 그 이상의 차수를 갖는 유한한 다차원 신호는 하나의 인수로 구성된 z-변환을 가질 확률이 99.99%이므로<sup>[7]</sup>, 2차 또는 그 이상의 신호의 위상복원 문제의 경우는 같은 99.99%의 확률로 유일하게 결정될 수 있다.

### III. Iterative 알고리즘과 수렴특성

주어진 2개의 푸리에 크기로부터 구하고자 하는 신호가 유일하게 결정되기 위한 조건을 확인했으므로, 이 절에서는 구하고자 하는 신호를 얻기 위한 iterative 알고리즘의 개발과 그 알고리즘의 수렴 특성에 대하여 알아본다. 여기에서는 [15]에서 유도된 주요 식 위주로 간략히 언급하기로 한다.

개발된 iterative algorithm의 기본 골격은 Gerchberg-Saxton 알고리즘<sup>[16]</sup> 또는 Fienup 알고리즘이라고 불리는 알고리즘이다<sup>[17]</sup>. 이 알고리즘은 기본적으로 푸리에 변환과 역변환을 무한히 하면서, 해 신호가 공간 영역이면 공간 영역의 제약조건을 부가하고, 해 신호가 주파수 영역에 있으면 주파수 영역에서의 제약 조건을 부가하는 방법이다. 공간 영역에서의 제약조건으로는 유한한 영역 조건, 실수 또는 양의 값을 가져야 한다는 조건 등이 있으며, 주파수 영역의 제약 조건에는 위상복원 문제의 경우는 푸리에 변환의 크기가, 크기복원 문제 (Magnitude Retrieval Problem)의 경우는 푸리에 변환의 위상이 주로 이용된다<sup>[15]</sup>. 그림 1에 Fienup 알고리즘에 대하여 보였다. 이런 iterative 알고리즘의 특징은 풀고자 하는 문제가 크기 복원 문제와 같이 유일한 해

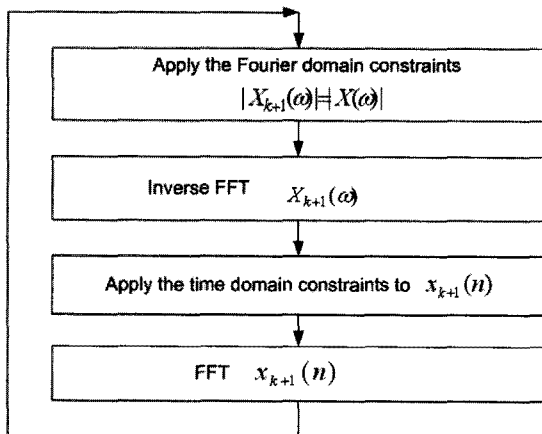


그림 1. Fienup 알고리즘의 블록도  
Fig. 1. Block diagram of Fienup algorithm.

가 보장되는 경우, 또는 위상 복원 문제의 경우에도 유일한 해가 존재하는 경우, 알고리즘의 해는 iteration이 진행이 될수록 유일한 해로 접근 한다는 점이다<sup>[1, 18]</sup>.

이제 iterative 알고리즘의 주요 식을 보기로 한다. 그림 2에 이 알고리즘의 블록도를 나타내었다. 이 알고리즘에서 update 방정식은

$$X_{k+1}(\bar{\omega}) = X_k(\bar{\omega}) + \beta(\bar{\omega})[K(\bar{\omega}) - X_k^*(\bar{\omega})H(\bar{\omega}) - X_k(\bar{\omega})H^*(\bar{\omega})] \quad (6)$$

으로 나타내진다. 여기에서  $X_k(\bar{\omega})$ 와  $X_{k+1}(\bar{\omega})$ 는 각각  $k$ 와  $k+1$ 단계에서의 해 신호이며,  $\beta(\bar{\omega})$ 는 알고리즘의 수렴 특성을 조절하는 함수이다.  $\beta(\bar{\omega})$ 는

$$\beta(\bar{\omega}) = \text{sgn}\{\text{Re}\{H(\bar{\omega})\}\} \cdot \beta_0 \quad (7)$$

으로 나타내지며, 여기에서  $\beta_0$ 는 상수로

$$0 < \beta_0 < \max\{\text{Re}\{H(\bar{\omega})\}\} \quad (8)$$

으로 주어진다<sup>[15]</sup>.  $\beta(\bar{\omega})$ 이 위의 조건을 만족하면 다음과 같이 정의되는 여러 함수

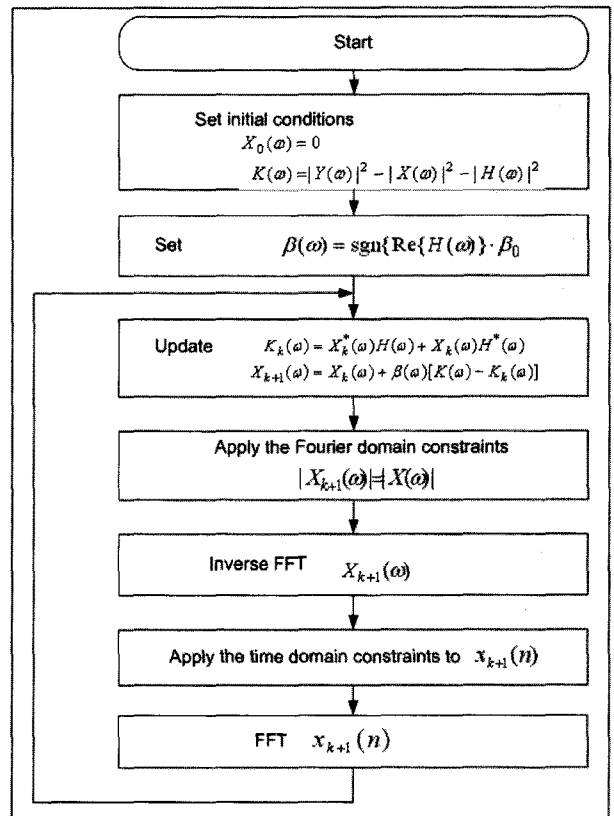


그림 2. Iterative 알고리즘의 블록도  
Fig. 2. Block diagram of the iterative algorithm shown here.

$$E_k(\bar{\omega}) = K(\bar{\omega}) - X_k^*(\bar{\omega})H(\bar{\omega}) - X_k(\bar{\omega})H^*(\bar{\omega}) \quad (9)$$

는 iteration이 진행이 됨에 따라 0으로 수렴하게 된다. 여기에서  $K(\bar{\omega})$ 는

$$\begin{aligned} K(\bar{\omega}) &= |Y(\bar{\omega})|^2 - |X(\bar{\omega})|^2 - |H(\bar{\omega})|^2 \\ &= X^*(\bar{\omega})H(\bar{\omega}) + X(\bar{\omega})H^*(\bar{\omega}) \end{aligned} \quad (10)$$

으로 주어진다.

Iteration이 진행이 됨에 따라 에러 신호  $E_k(\bar{\omega})$ 가 0에 수렴한다는 것은 다음과 같이 증명될 수 있다<sup>[15]</sup>. 먼저  $E_{k+1}(\bar{\omega})$ 는 (6), (7), (8) 식을 이용하면 다음과 같이 나타내진다.

$$\begin{aligned} E_{k+1}(\bar{\omega}) &= K(\bar{\omega}) - X_{k+1}^*(\bar{\omega})H(\bar{\omega}) - X_{k+1}(\bar{\omega})H^*(\bar{\omega}) \\ &= [1 - 2 \cdot \text{Re}\{\beta(\bar{\omega})H^*(\bar{\omega})\}]E_k(\bar{\omega}) \end{aligned} \quad (11)$$

각  $\bar{\omega}$ 에 대하여 만일  $|1 - 2 \cdot \text{Re}\{\beta(\bar{\omega})H^*(\bar{\omega})\}| < 1$ 의 조건을 만족하면, 즉,

$$0 < \text{Re}\{\beta(\bar{\omega})H^*(\bar{\omega})\} < 1 \quad (12)$$

의 조건을 만족하면 에러 함수  $E_k(\bar{\omega})$ 는 0으로 수렴하며, (7)과 (8)의 조건은 명백히 (12)의 조건을 만족한다. 따라서 모든  $\bar{\omega}$ 에 대하여 iteration이 진행이 됨에 따라 에러 함수  $E_k(\bar{\omega})$ 는 0으로 수렴한다.

이제  $E_k(\bar{\omega})$ 가 0으로 수렴한다는 것은  $X_k(\bar{\omega})$ 가  $X(\bar{\omega})$ 로 수렴한다는 것을 의미한다는 것을 보인다. 편의를 위하여  $K_k(\bar{\omega})$ 를

$$K_k(\bar{\omega}) = X_k^*(\bar{\omega})H(\bar{\omega}) + X_k(\bar{\omega})H^*(\bar{\omega}) \quad (13)$$

라고 가정한다. 그러면 에러 신호  $E_k(\bar{\omega})$ 는

$$E_k(\bar{\omega}) = K(\bar{\omega}) - K_k(\bar{\omega}) \quad (14)$$

로 나타내지며,  $E_k(\bar{\omega})$ 가 0으로 수렴한다는 것은  $K_k(\bar{\omega})$ 가  $K(\bar{\omega})$ 로 수렴한다는 것을 의미한다. 이제  $K_k(\bar{\omega})$ 가  $K(\bar{\omega})$ 로 수렴한다는 것이  $X_k(\bar{\omega})$ 가  $X(\bar{\omega})$ 로 수렴한다는 것을 보인다.

$k$ 번째 단계에서  $K(\bar{\omega}) - K_k(\bar{\omega})$ 는

$$\begin{aligned} K(\bar{\omega}) - K_k(\bar{\omega}) &= [X(\bar{\omega}) - X_k(\bar{\omega})]^*H(\bar{\omega}) \\ &\quad + [X(\bar{\omega}) - X_k(\bar{\omega})]H^*(\bar{\omega}) \end{aligned} \quad (15)$$

으로 나타내진다. 각 단계에서  $X_k(\bar{\omega})$ 에는 크기가  $|X(\bar{\omega})|$ 가 되도록 강제로 만들기 때문에, 위 식에서  $X(\bar{\omega}) - X_k(\bar{\omega})$ 는 다음과 같이 간략히 표현된다.

$$\begin{aligned} X(\bar{\omega}) - X_k(\bar{\omega}) &= |X(\bar{\omega})| \left( e^{j\phi_X(\bar{\omega})} - e^{j\phi_{X_k}(\bar{\omega})} \right) \\ &= |X(\bar{\omega})| 2 \sin \left( \frac{\phi_X(\bar{\omega}) - \phi_{X_k}(\bar{\omega})}{2} \right) \\ &\quad \cdot e^{j \frac{(\phi_X(\bar{\omega}) + \phi_{X_k}(\bar{\omega}))}{2}} \end{aligned} \quad (16)$$

여기에서  $\phi_X(\bar{\omega})$ 와  $\phi_{X_k}(\bar{\omega})$ 는 각각  $X(\bar{\omega})$ 와  $X_k(\bar{\omega})$ 의 위상이다. (16)의 정리된 식을 (15)에 대입하여 정리하면

$$\begin{aligned} K(\bar{\omega}) - K_k(\bar{\omega}) &= 4|X(\bar{\omega})||H(\bar{\omega})| \sin \left[ \frac{\phi_X(\bar{\omega}) - \phi_{X_k}(\bar{\omega})}{2} \right] \\ &\quad \times \sin \left[ \phi_H(\bar{\omega}) - \frac{\phi_X(\bar{\omega}) - \phi_{X_k}(\bar{\omega})}{2} \right] \end{aligned} \quad (17)$$

와 같이 정리된다. Iteration이 진행이 됨에 따라, 즉  $k \rightarrow \infty$ 에 따라,  $E_k(\bar{\omega})$ 가 0으로 수렴하므로, (17)식에서

$$\phi_{X_k}(\bar{\omega}) \rightarrow \phi_X(\bar{\omega}) \quad (18)$$

이거나 또는

$$\phi_{X_k}(\bar{\omega}) \rightarrow 2\phi_H(\bar{\omega}) - \phi_X(\bar{\omega}) \quad (19)$$

와 같이 된다. 여기에서  $\phi_H(\bar{\omega})$ 는  $H(\bar{\omega})$ 의 위상이다. iteration의 각 단계에서  $\phi_{X_k}(\bar{\omega})$ 는

$$\cos(\phi_{X_k}(\bar{\omega}) + \phi_H(\bar{\omega})) = \cos(\phi_X(\bar{\omega}) + \phi_H(\bar{\omega})) \quad (20)$$

를 만족하도록 요구하기 때문에, (19)식은 해가 될 수 없으며, 따라서 (18)이 해가 되어야 한다.  $\phi_{X_k}(\bar{\omega}) \rightarrow \phi_X(\bar{\omega})$ 는  $X_k(\bar{\omega}) \rightarrow X(\bar{\omega})$ 를 의미하고, 또한  $x_k(n) \rightarrow x(n)$ 을 의미하며, 따라서 원하는 신호로 수렴한다.

#### IV. 실험과 결과

Iterative 알고리즘의 수렴 특성을 보이기 위하여 다음과 같은 실험을 해보았다. 실험에는 128x128의 크기를 갖는 2차원의 신호를 사용하였으며, 그림 3(a)에 보였다. 이 신호는 구하고자 하는 신호로  $x(m,n)$ 으로 나타내며,

신호에 대하여 푸리에 변환의 크기와 크기 이외에, 신호에 대한 정보는 없다고 가정한다. 그림 3(b)는 더해지는 신호로서  $h(m,n)$ 이다. 이 실험에서는 고휘력 레이저를 이용하여 인공별을 만드는 경우를 가정하여 그림과 같은 신호를 사용하였으며, 식으로 나타내면

$$h(m,n) = \begin{cases} 255 & (m,n) \in [50,51] \times [55,56] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (21)$$

와 같다. 이 실험의 조건으로 그림 3(a)의 원 신호의 푸리에 변환의 크기가 측정되었다고 가정하고, 또한 원 신호에 그림 3(b)의 신호를 더한 신호, 즉,

$$y(m,n) = x(m,n) + h(m,n) \quad (22)$$

의 푸리에 변환의 크기가 주어졌다고 가정한다. 푸리에 변환의 크기는  $256 \times 256$ 의 크기로 주어졌다고 가정하며, 이 크기는 [6]에서 나타난 푸리에 변환의 크기를 샘플링했을 때, 샘플링 된 신호로부터 유일하게 결정될 조건을 만족한다.  $h(m,n)$ 이 식 (21)과 같이 주어졌으므로,  $\max\{H(\omega_1, \omega_2)\}$ 의 값은  $255 \times 2 \times 2 = 1020$ 으로 주어지며, 따라서  $\beta_0$ 의 범위는 식 (8)으로부터

$$0 < \beta_0 < \frac{1}{\max\{H(\omega_1, \omega_2)\}} = 9.8039 \times 10^{-4} \quad (23)$$

로 주어진다. 이 simulation에서는  $\beta_0$ 의 값을  $\beta_0 = 9.8039 \times 10^{-4}$ 로 선택하였다. 그림 3(c)는 위의 문제를 Fienup 알고리즘으로 100번을 iteration하여 복원한 결과를 나타낸다. Fienup 알고리즘은 위상 복원 문제에서 가장 많이 사용되는 알고리즘중의 하나이다. 그림에도, 그림에서와 같이 완벽하게 복원하지 못함을 알 수 있다. 그림 3(d)는 이 논문에서 제시한 알고리즘으로 복원한 결과이다. 이 결과에서도 iteration은 100번을 하였다. 이 사진에서 알 수 있듯이 여기서 제시한 알고리즘은 구하고자 하는 신호에 수렴함을 알 수 있다.

이 알고리즘들의 수렴 특성을 비교하기 위하여 다음의 평균 제곱에러 (MSE: Mean Squared Error)를 다음과 같이 정의하였다.

$$MSE = \frac{\sum [x_o(m,n) - x_r(m,n)]^2}{M \times N} \quad (24)$$

여기에서  $M \times N$ 은 신호  $x(m,n)$ 의 픽셀의 수이며, 이 경우  $128 \times 128$ 이 된다. 그림 4에 Fienup 알고리즘과 이 논문의 알고리즘의 수렴 특성을 보였다. 그림에서 볼 수 있듯이, Fienup 알고리즘은 수렴을 하지만 속도가 매우 느린 것을 알 수 있으며, 여기에서 개발된 알고리즘은 빨리 수렴됨을 알 수 있다. Fienup 알고리즘의 경우 이 예제에서는 수렴을 하는 것으로 보이지만, 많

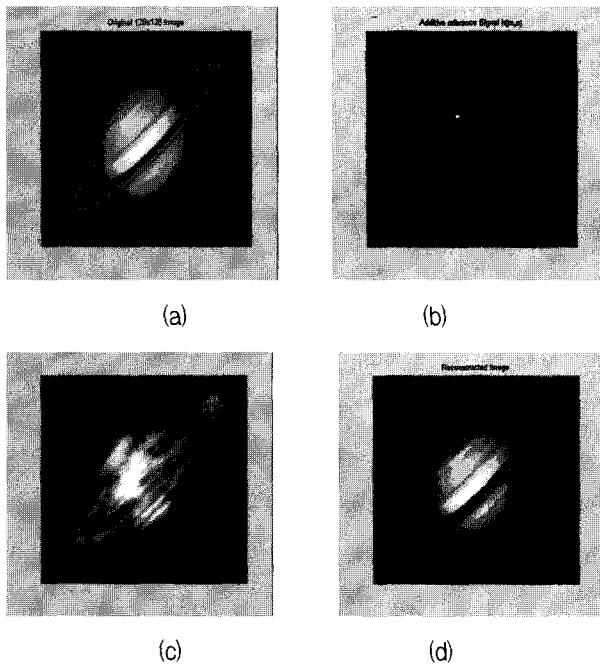


그림 3. Fienup 알고리즘과 이 논문에서 제안한 알고리즘과의 비교 (a) 구하고자 하는 신호, (b) 더해지는 신호, (c) Fienup 알고리즘으로 100번의 iteration을 하여 복원한 신호, (d) 이 논문의 알고리즘으로 100번의 iteration으로 복원된 신호

Fig. 3. Comparison of the result images reconstructed by the Fienup algorithm and the algorithm proposed here.

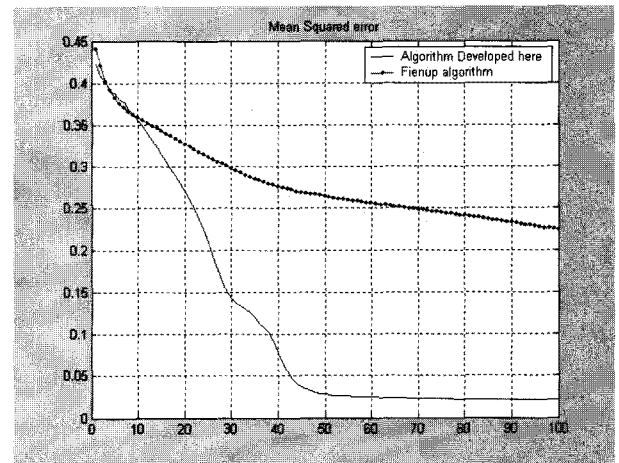


그림 4. Fienup 알고리즘과 여기서 개발된 iterative 알고리즘과의 수렴 특성의 비교.

Fig. 4. Comparison of the convergence properties between the Fienup algorithm and the iterative algorithm here.

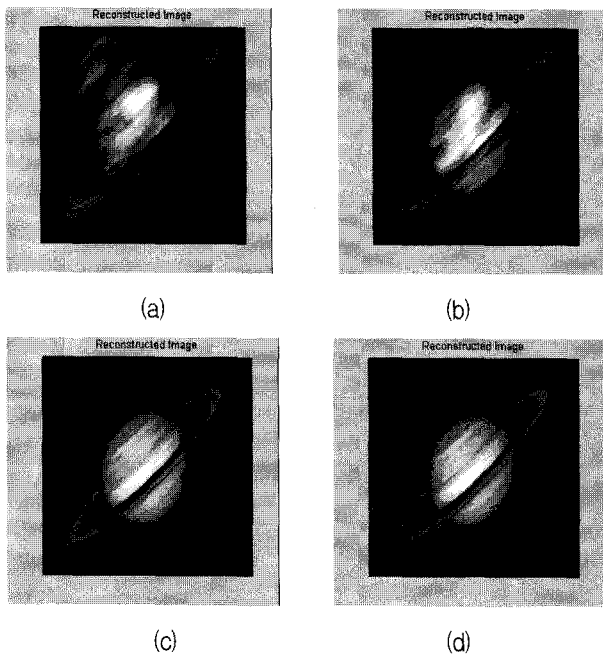


그림 5. Iteration에 따른 복원된 이미지의 변화; (a) 10, (b) 30, (c) 50, (d) 100 iterations  
 Fig. 5. Comparison of the reconstructed images after (a) 10, (b) 30, (c) 50, and (d) 100 iterations.

은 실험을 한 결과 대부분의 경우에서 수렴을 하지 않는 것으로 나타난 반면, 이 논문에서 개발된 알고리즘은 수렴함을 알 수 있었다.

그림 5는 iteration이 진행됨에 따라 복원된 이미지가 어떻게 변해 가는지를 나타내는 그림이다. 그림에서 알 수 있듯이, 처음에 10번의 iteration이 진행이 되었을 때는 원이미지가 심하게 왜곡이 되어 있음을 볼 수 있고, iteration이 진행됨에 따라 왜곡된 부분은 점차로 사라져 감을 볼 수 있다. 50번의 iteration이 끝났을 때는 원래의 image와 크게 다르지 않음을 볼 수 있으며, 이로부터 iteration이 진행됨에 따라 해는 원하는 신호로 수렴함을 알 수 있다.

두 알고리즘의 비교를 위하여 PSNR (Peak Signal to Noise Ratio)을 비교하였다. PSNR은 다음과 같이 정의된다<sup>[19]</sup>.

$$PSNR = 10 * \log_{10} \frac{255^2 * N^2}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [x_{ij} - y_{ij}]^2} \quad (25)$$

위의 예제에 대하여 Fienup 알고리즘과 여기에서 제안된 알고리즘의 PSNR의 값은 각각 18.57과 39.37정도가 되었다.

Saturn 영상 이외에 다음과 같이 카메라맨 영상과 적

표 1. 여기에서 제안된 알고리즘과 Fienup 알고리즘과의 PSNR 비교

Table 1. Comparison between the PSNR of the Fienup algorithm and the algorithm proposed here.

알고리즘 image	Fienup 알고리즘	여기에서 제안한 알고리즘
Saturn	18.57	39.37
Camerman	9.77	21.56
Blood	12.75	18.41

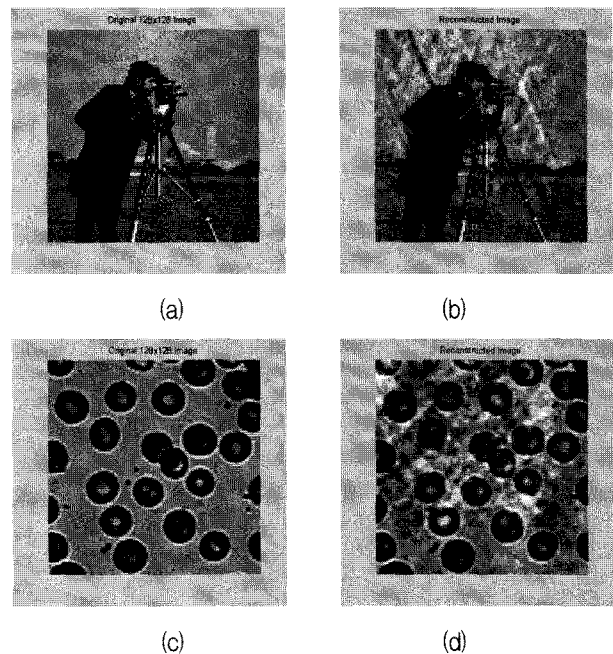


그림 6. 다른 영상으로 같은 실험을 한 결과 (a) 카메라맨 원 영상, (b) 복원된 카메라맨 영상, (c) 적혈구 원 영상, (d) 복원된 적혈구 영상

Fig. 6. Results after the same experiments with other images; (a) original cameraman image, (b) reconstructed cameraman image, (c) original blood image, (d) reconstructed blood image.

혈구 영상에 대하여 같은 실험을 실행하였다. 더해지는 신호의 크기와 위치는 앞서의 방법과 동일하게 하였으며, iteration의 숫자도 100 번으로 동일하게 하였다. 그림 6에 결과를 보였다. 그림 6(a)와 (c)는 각각 카메라맨과 적혈구 영상의 원 영상이다. (b)와 (d)는 각각 100번 iteration 한 후의 결과이다. 그림에서 알 수 있는 것과 같이, 알고리즘은 모든 영상에 대하여 비슷한 결과를 보임을 알 수 있다.

표 1에는 그림 3과 그림 6의 영상에 대하여 구해진 PSNR을 나타내었다. 표에서 알 수 있듯이, 이곳에서 제안된 알고리즘은 Fienup 알고리즘보다는 좋은 성능을 나타냄을 알 수 있다.

## V. 결 론

이 논문에서는 위상 복원 문제를 해결하는데 있어서, 더해지는 신호를 이용하여, 구하고자 하는 신호의 푸리에 변환의 크기와 구하고자 하는 신호에 알고 있는 또 다른 신호가 더해진 신호의 푸리에 변환의 크기가 주어졌을 때, 원하는 신호를 구하는 문제에 대하여 알아보았다. 논문 [8]과 [15]에서는 더해지는 신호가 조건을 만족하면 위상 복원 문제는 유일한 조건을 가지며, 이럴 경우 recursive 알고리즘과 iterative 알고리즘으로 구할 수 있다는 것을 보였다. 이 논문에서는 iterative 알고리즘의 수렴 특성에 대하여 알아보았다. 이 알고리즘은 원하는 신호에 수렴함을 수식으로 증명을 하였고, 예제로 보였으며, 또한 제곱평균 에러를 통하여 알고리즘의 해가 구하고자 하는 신호에 접근함을 보였다.

이 연구의 결과는 위상 복원 문제에 응용될 수 있을 것으로 기대되며, 예를 들어, 천문학과 광학에서 대기의 turbulence의 영향을 제거한, 망원경의 이론적인 최고 성능인 diffraction limited 영상을 얻는데 응용될 수 있을 것으로 기대되며, 또한 X-선 결정학에서 isomorphic addition 방법과 같은 문제에 응용 될 수 있을 것으로 기대된다. 특히 최근 레이저를 이용한 인공별을 생성하는 연구가 활발히 진행이 되고 있으며<sup>[20]</sup>, 여기에서 개발된 알고리즘을 직접적으로 응용할 수 있을 것으로 기대된다.

## 참 고 문 헌

- [1] M. H. Hayes, J. S. Lim, and A. V. Oppenheim, "Signal reconstruction from phase or magnitude", *IEEE Trans. Acoustics, Speech, Signal Processing*, ASSP-28, pp. 672-680, Dec. 1980.
- [2] 김우식, "위상복원문제", *한국통신학회지*, 제 10권, 5호, pp. 53-70, 1993년 5월.
- [3] G. N. Ramachandran and R. Srinivasan, *Fourier methods in crystallography*, Wiley Interscience, New York, 1970.
- [4] F. Meng, H. Liu, and X. Wu, "An iterative phase retrieval algorithm for in-line X-ray phase imaging", *Opt. Express* 15, pp. 8383-8390, June 2007. <http://www.opticsinfobase.org/oe/abstract.cfm?URI=oe-15-13-8383>
- [5] A. Yan, X. Wu, and H. Liu, "An attenuation partition based iterative phase retrieval algorithm for in-line phase contrast imaging," *Opt. Express* 16, pp. 13330-13341, Aug. 2008. <http://www.opticsinfobase.org/oe/abstract.cfm?URI=oe-16-17-12746>
- [6] M. H. Hayes, "The reconstruction of a multidimensional sequence from the phase or magnitude of its Fourier transform", *IEEE Trans. Acoustics, Speech, Signal Processing*, 30, No. 2, pp. 140-154, April 1982.
- [7] M. H. Hayes and J. H. McClellan, "Reducible polynomial in more than one variable", *IEEE Proc.* 70, pp. 197-198, 1982.
- [8] 김우식, "더해지는 기준 신호를 이용한 위상복원: I. 이론", *전자공학회 논문지*, 31권, B편, 제5호, pp. 26-33, 1994년 5월.
- [9] W. Kim, "Two-dimensional phase retrieval using enforced minimum-phase signals", *J. Kor. Phy. Soc.* 44, pp. 287-292, 2004.
- [10] M. A. Fiddy, B. J. Brames, and J. C. Dainty, "Enforcing irreducibility for phase retrieval in two dimensions", *Opt. Lett.* 8, No. 2, pp. 96-98, February 1983.
- [11] N. Nakajima, "Phase retrieval from two intensity measurements using the Fourier series expansion", *J. Opt. Soc. Am. A* 4, pp. 154-158, 1987.
- [12] W. Kim and M. H. Hayes, "Phase retrieval using a window function", *IEEE Trans. Signal Processing*, 41, 3, pp. 1409-1412, 1993.
- [13] P. L. Van Hove, M. H. Hayes, J. S. Lim, and A. V. Oppenheim, "Signal reconstruction from signed Fourier transform magnitude", *IEEE Trans. Acoustics, Speech, Signal Processing*, 31, pp. 1286-1293, 1983.
- [14] M. H. Hayes and T. F. Quatieri, "Recursive phase retrieval using boundary conditions", *J. Opt. Soc. Am.* 73, pp. 1427-1433, 1983.
- [15] 김우식, "더해지는 기준 신호를 이용한 위상복원: II. 복원", *전자공학회 논문지*, 31권, B편, 제5호, pp. 34-41, 1994년 5월.
- [16] R. W. Gerchberg and W. O. Saxton, "A practical algorithm for the determination of the phase from image and diffraction plane pictures", *Optik* 35, pp. 237-246, 1972.
- [17] J. R. Fienup, "Reconstruction of an object from the modulus of its Fourier transform", *Opt. Lett.*, 3, pp. 27-29 (1978).
- [18] J. R. Fienup and C. C. Wakerman, "Phase-retrieval stagnation problems and solutions", *J. Opt. Soc. Am. A* 3, pp. 1897-1907, 1986.
- [19] 주해중, 홍봉화, 온진호, 홍석주, "멀티미디어 서비스 영상의 객관적 품질측정 시스템 설계 및 구현", *전자공학회 논문지 IE편* 제 45권 1호, pp. 58-64, 2008년 3월.

- [20] D. L. Fried and J. F. Belsher, "Analysis of fundamental limits to artificial guide star adaptive optics system performance for astronomical imaging," J. Opt. Soc. Am. A 11, pp. 277-287, 1994.

---

저 자 소 개

---



김 우 식(정회원)

1984년 서울대학교 전자공학과  
학사 졸업.

1986년 서울대학교 전자공학과  
석사 졸업.

1991년 미국 GIT 전기공학과  
박사 졸업.

1999년~현재 세종대학교 정보통신공학과 부교수

<주관심분야 : 통신, 신호처리, 의공학>