韓國數學教育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 23집 제 2호, 2009. 5. 461-481

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 23, No. 2, May. 2009. 461-481

수학교육의 기호학적 적용

정 치 봉 (순천향대학교)

최근 20여 년 동안 국제적으로 기호학의 관점에서 수학교육에 대한 다양한 연구와 실천이 진행되어 오고 있다. 멀티미디어는 표현 매체이며 기호로서 수학 및 수학교육과 다양한 관계를 가지고 상호작용한다. 수학 및 수학교육의 활동은 기호학의 관점에서 기호적 활동으로 영향력, 역할 그리고 범위가 확대될 것으로 예상된다. 본 논문에서는 기호학의 기본 개념을 소개하고 수학교육에서의 적용 가능성을 제안하였다. 개념, 표상, 사회적 구성주의, 문화와의 맥락에 관한 수학교육의 기존 연구와 기호학관점의 연구는 유사성을 갖는다. 기호학의 관점에서 산술학습, 연역법, 귀납법, 가추법과 퍼스의 기호-삼항틀 적용 사례, 기하의 명제들 사이의 퍼스-삼항틀 관계, 대칭과 증명을 다루는 기하학습 등을 제시하였다.

I. 서 론

[기술, 문화 그리고 사회의 변화]

사회-문화 현상의 관점에서 본다면, IT-통신-네트워크-멀티미디어-소프트웨어의 발전에 기초한 문명과 인간 활동은 앞으로 혁명적인 변화할 것으로 예측된다. 과거 구텐베르크의 인쇄-활자에 의한 문자텍스트 중심의 사고와 문화에서 디지털 기술로 텍스트/이미지/소리/영상을 자유롭게 사용할 수 있는 혁신적인 멀티미디어(다매체) 문화로의 전이를 의미한다. 멀티미디어와 하이퍼텍스트 등의 기술을 통하여 인간의 사고 및 표현 능력과 사회문화적 소통 능력 등이 변하고 있음을 의미한다. 멀티미디어는 일상 언어가 가지는 문자-음성 언어의 기능과 능력을 훨씬 능가하는 매체이다. 21세기 디지털문화 시대에 인간의 인지 활동, 교육 활동, 문화-예술 활동 등이 어떻게 변화할 것인지는 쉽게 예측할 수 없는 상황이다.

디지털 방식의 예술 및 문화적 창작/소통 활동은 멀티미디어를 사용함으로서 수학적 이해를 필요로 한다. 디지털 문서를 제작하는 활동은 기호학자들은 기호적 활동이라고 본다. 디지털 문서에 포함되어 있는 모든 언어적 문자와 음성뿐만 아니라 음악, 그림, 도표, 도형, 영상 등을 기호로 보기 때문이다.

현재 수학교육에서 기호학적인 관심은 21세기의 멀티미디어-문화 혁명과 관련성을 가진 연구로 포괄적으로 수행되고 있지는 않다. 그러나 기호학에서 다루려고 하는 기호의 본질에서 본다면, 필연

* 접수일(2009년 3월 27일), 심사(수정)일(1차: 2009년 4월 21일, 2차: 5월 8일), 게재확정일자(2009년 5월 11일)
* ZDM분류 : E20
* MSC2000분류 : 97D20
* 주제어 : 기호, 의미, 기호학, 퍼스 기호-삼항틀, 기호적 활동과 수학학습

적으로 수학교육연구는 멀티미디어를 수학 교수-학습 활동 및 소통을 위한 중개자(매체)로서 그리고 도구로서 다루지 않을 수 없다.

21세기 멀티미디어 기술 환경에서 멀티미디어 디지털 문서, 문화, 예술 등과 관련된 기호 및 기호 체계들은 발전하여 인간의 새로운 의미-인지 활동을 가능하게 할 것이다. 앞으로 인간의 새로운 멀티미디어 기호 활동은 기호와 언어의 개념, 역할, 기능, 소통체계와 방식을 급속히 변화시키고 발전시킬 것으로 예견되고 있다. 이는 지식과 문화의 질, 생산, 소비, 유통, 재산권의 변화를 예고하고 있다. 지금 시대는 언어와 문화의 다양한 가치를 인정하는 다원주의를 수용하고 있다.

이러한 기호의 언어-사회-문화적 관점에서의 이해를 목표로 하는 대전환은 학문적으로는 사회와 언어에 대한 관심으로의 대전환 (social and language turn)으로 나타나고 있다. Hersh(1997)는 전통적으로 수학의 철학이 수학의 확실성이라는 기초를 수립하려는 좁은 의미의 철학에서 수학을 인간의 활동으로서 사회, 문화 역사와 관계를 갖고 발전해왔다는 관점에서 보는 '사회문화적 인본주의' 수학의 철학으로의 전환이 시대적으로 요구된다고 주장하였다.

[수학교육에서 기호학적 관점의 연구]

사회문화 현상을 기호/의미 구조에서 분석하는 바르트의 문화/신화 연구는 기호학의 발달에 중요한 영향을 주었다. 구조주의 사회문화연구는 기호학적 원리, 방법, 개념 등을 활용하였다. 기호학적 문화 연구의 영향이 기호학의 관점에서 수학교육을 보려는 연구가 시작되었다. 따라서 기호학적 관점을 적용하는 수학교육 연구는 수학교육을 사회-문화적 맥락(socio-culture context)에서 다루는 연구와 공통점을 갖는다. 또 다른 한 부분은 수학을 이해하고 다루고 사용하는 수학의 교육적 활동을 인식론-인지심리학-정보과학적 맥락에서 다루는 기호학적인 연구가 이루어지고 있다.[PME27 2003, PME28 2006]

수학교육에 대한 연구와 실천을 위한 기호학적인 관심과 다양한 학술 활동이 PME의 학술회를 중심으로 1990년대부터 국제적으로 활발히 진행되어오고 있다. (Ernest 1993; Vile 1996,1997), 특히 지난 10여년동안 기호학은 수학교육 분야에서 폭넓게 그리고 활발하게 다루어져 왔다. PME에서는 토론그룹(DG#3)을 구성하여 수학교육의 대한 기호학적인 접근법으로 다양한 연구를 수행하였다. [Sträßer 2004]

2008년 멕시코에서 개최된 ICME의 TSG31 LCME에서도 기호학과 표상영역이 주요 주제를 구성하고 있다. [http://tsg.icme11.org/]

기호와 활동(activity and signs , Hoffman, Lenhard & Seeger, 2005)에서 수학교육과 관련하여 다루어진 주요 기호학 주제와 접근법 다음과 같다.

[PME25, PME26 http://www.math.uncc.edu/~sae

- 기호 과정(sign process)

수학학습과 기호술과 창의성(Ernest)

발견 수단으로서 기호(Hoffman)
- 기호학을 적용한 수학 교수-학습 이론(Seeger)
- 교실에서 기호 과정, 기호 사용 활동
- 수업에서 기호적 중개(Bussi, Mariotti & Ferri)
- 수학기호의 사용 기술 및 구성 문제(Steinberg)
- 스키마와 기호학 (Radford)
- 수학교수학습과정의 기호학적 분석(Godino & Font)

기호학은 언어를 포함하여 인간의 생각을 표현하고 의미를 소통하기 위한 매개체(중개자)로서 기호 및 기호체계를 연구하는 학문이다. 따라서 기호학은 인식론, 존재론, 과학철학, 과학, 문학, 역사학, 언어학, 심리학, 인지과학, 커뮤니케이션, 정보이론, 문화이론 등 다양한 학문들과 관련성을 갖는다.

갈릴레오는 "자연의 위대한 책은 거기에 쓰인 언어를 알고 있는 사람만이 읽을 수 있다. 그 언어는 바로 수학이다."라고 말하였다. 이는 수학 언어뿐만 아니라 자연 현상도 기호로 볼 수 있다는 것이다. 실제로 기호학의 창시자인 퍼스는 존재하는 모든 것을 기호로 볼 수 있다고 하였다.

기호학의 어떤 내용, 방법, 개념을 빌려오거나 변환하여 수학 및 수학교육의 문제들을 설명하고 해결할 수 있는가? 라는 것이 우선적인 관심 사항이다. 그리고 기호학의 아이디어들이 실제로 수학과 수학교육을 성장 발전시키는 일에 실제적인 적용 또는 도움이 되는가? 이다.

기호학은 인간의 사고 활동을 얼마나 풍성하게 그리고 체계적으로 할 수 있는가? 라는 물음에 대하여 기호가 갖는 기능과 역할에 관심을 갖는다. 수학/수학교육에서 우리가 보다 풍성한 수학적 의미 또는 결과들을 만들어 내는 발생적, 창의적 또는 생산적인 일에 관심을 갖는다면 기호학은 어떤 도움을 줄 수 있다고 생각한다.

수학/수학교육에서 수학적 대상, 개념 그리고 표상과 관련한 인식론, 존재론, 수학화, 수학적 활동 및 소통을 분석적 또는 종합적으로 다루는 문제는 중요하고 지속적으로 연구되어오고 있다. 수학교육의 연구 주제로 개념, 표상 그리고 소통에 관련된 연구는 기호학의 연구 방향목적, 내용등과 매우 흡사하다. 따라서 수학적 대상의 분석, 종합 그리고 적용/응용을 수학교육에서 종합적으로 다루는 이론과 방법으로서 기호학에 관심을 가질 필요가 있다. 그렇다면 기호학 들여다보고 적절한 것들을 빌려와서 그 자체로 적용하거나 수학교육의 상황, 내용 그리고 맥락 등을 고려하여 변환하여 적용하는 것이 문제이다. 그리고 기존의 수학교육에서 중요하게 연구된 개념, 표상, 맥락화, 소통, 수학화 등의 방법과 결과들을 교차 비교해 보는 새로운 meta-연구 문제도 관심을 가질 필요가 있다.

수학교육에 대한 기호학 관점의 연구가 이루어지고 있는 해외의 상황과 달리 국내의 수학교육 연구에서 기호학 관련 연구 사례를 찾지 못하였다.

국내에는 소쉬르, 퍼스, 에코, 옐름스레브, 시벅, 로트만, 바르트, 모리스 라캉, 그레마스 등 주요 기호학자들의 주요 저서들이 번역되어 있다. 인문사회과학에서 기호학적 연구는 문화, 사회, 예술의 창작 및 현상에 대한 의미를 분석하고 해석하는 다양한 연구가 이루어지고 있다.

수학 및 수학교육도 인간의 활동으로서 지식뿐만 아니라 문화를 형성하면서 사회와 역사와 상호작용하면서 변화하고 성장하는 실재이다. 기호의 의미와 체계를 사회, 문화, 역사와의 맥락에서 탐구하는 기호학은 사회적 구성주의의 관점에서 수학교육을 연구하는 것과 상통하는 점이 많이 있다. 앞에서 소개한 외국에서 기호학의 관점에서 수학교육을 연구한 내용들은, 특히 PME의 연구 활동들은, Ernest(1998)의 사회적 구성주의 관점의 수학교육의 연장선 위에 있다고 볼 수 있다.

기호학은 인간의 사고를 매개(중개)하는 모든 것을 기호로 보기 때문에 추상적인 성격을 갖는 이론이다. 기호학에서 사용하는 용어 및 개념의 이해와 적용은 세심한 주의가 요구된다.

본 논문은 국내의 수학교육의 연구의 이러한 상황과 맥락을 고려하여 우선적으로 기호학의 기초개념과 내용을 수학교육에 적용 가능성에 초점을 맞추어 다음 내용을 소개하고자 하였다.

1) 현상 및 대상을 탐구하는 사고 매체로서 수학의 언어적 기능과 기호학의 기호의 기능이 유사하다는 점
2) 수학교육에서 개념화/표상화 활동과 기호학에서 기호의 기능 또는 작용과의 관련성 및 유사성
3) 문화로서 수학교육 활동에 대한 연구의 필요성, 기호학의 문화 분석 도구와 방법 활용에 대한 제안
4) 퍼스 기호-삼항틀, 소쉬르의 기호-이항틀 소개
5) 기호학의 수학교육에의 적용
   - 기호학 적용과 관련된 연구 문제
   - 일률에 관한 학습 적용 사례
   - 전건긍정 삼단논법과 퍼스 기호-삼항틀, 귀납법, 연역법, 가추법과 과학적 가설 및 이론
   - 기하학습, 증명학습의 적용

Ⅱ. 본 론

1. 수학, 수학교육, 문화 - 기호 활동

[기호학과 수학]

Davis & Hersh(1980)는 '수학은 양과 공간의 과학이다'라는 소박한 정의를 소개하고 있다. 이어서 '수학은 기호체계를 사용하는 과학'으로 부언 설명하고 있다. 수학을 구성하는 방식은 (개념, 용어, 기호)정의하기, 연역 그리고 계산이다. 이들 세 가지 방식에 적당한 인간의 사고와 활동을 매개하는 도구로서 기호를 도입하여 수학자는 효과적으로 수학의 결과물인 정리와 증명을 생성함으로서 수학을 성장시킨다고 보는 견해이다. 그들은 기호는 원래 발견자가 그것에 부여한 의미보다 더 많은 그리고 새로운 의미를 갖도록 확장되고 변형되고 재해석되기도 한다고 주장한다. 기호는 종종 기호를 다루는 인간의 상상력을 자극하여 새로운 수학을 생산하는 연금술적인 힘을 갖고 있는 것처럼 보인다.

즉 기호 그 자체가 새로운 혁신과 창조의 발단이 되기도 한다. 한 예로서 그들은 라이프니츠의 자연수 n에 대한 도함수표기법 $D^n f$이 유리수 α에 대하여 $D^\alpha f$로 도함수의 수학적 개념의 확장을 가능하게 한 사례를 제시하고 있다.

[수학적 대상, 기호 그리고 수학적 활동]

Tall & Vinner(1981)는 개념, 개념의 (수학적) 정의로서 형식, 개념에 대한 개인의 정신활동 내용들로서 개념이미지를 구분하였다. 즉 개념은 모든 종류의 경험을 통해 오랜 기간 동안 다양한 형식(표상)들과 다양한 개념이미지들이 관련을 맺으며 형성되는 것으로 보았다.

그들은 네 유형의 수학적 활동(개념이해, 형식적 추론, 추상, 직관)을 개념정의(형식)와 개념이미지(내용)의 상이한 네 유형의 상호작용 양식을 대응시키는 특성에 대한 연구를 수행하였다. 그들은 교수・학습을 문제 상황과 맥락 속에서 개념 정의와 이미지는 문제에 적절한 의미를 결합시키는 상호작용으로서 다양한 수학적 산출물을 생성시키는 수학적 활동 또는 과정으로 보고 있다.

T. Dreyfus(1994)는 개념을 기호로 나타내기 전에 개념과 관련된 의미가 있어야한다고 하여 의미가 기호와 개념보다 선행한다는 수학학습에서 흔히 간과되어지고 있는 중요한 점을 지적하였다. 공리-정의-개념-증명/문제적용이라는 순서에 따르는 수학 학습은 인식의 발생과 발전과정에서 볼 때 자연스럽지 못하다는 점을 지적하고 있다. Davis & Hersh(1980)는 수학적 활동에서 엄밀한 논리-형식주의적 활동보다 직관, 통찰, 상상, 도표, 그림, 영상, 은유, 유추, conjecturing 등 비형식적인 활동의 중요성을 지적하고 있다.

Kaput(2000)은 표상을 만드는 활동은 표현체계 즉 구체적인 외형을 갖는 인조물artefact에 의존한다고 주장하였다. 기호학에서는 기호들의 syntactic, semantic 그리고 pragmatic 체계를 갖춘 이러한 표현체계를 code system이라고 부른다. 수학에서 표상을 만드는 표상체계 자체가 수학이론의 한 부분으로 포함된다.

개념에 대한 다양한 표상 만들기, 주어진 표상에서 다양한 개념 추출하기 그리고 구조적으로 발전시키기 등을 Freudental(1991)은 수평적 그리고 수직적 수학화로 설명한다. Walkerdine(1982), Presmeg(1992, 1997)은 수학적 의미를 만들어가는 중요한 두 활동을 기호학의 개념인 은유metaphor 그리고 환유metonymy 활동으로 설명한다.

[수학, 문화, 기호 활동]

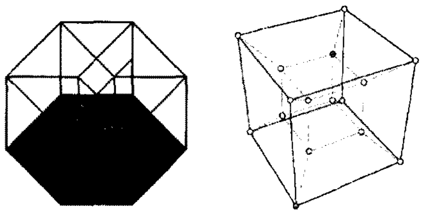
우리 인간은 의미를 만드는 자이다. 즉 인간은 무언가를 표현하기를 열망한다. 그리고 인간은 몸짓, 노래, 말, 그림과 같은 여러 기호 유형으로 의미를 표현하려는 욕망을 가진다. 어떤 경우에는 경험을 지식으로 형성하기 위하여 기호체계(code)를 사용한다. 그리고 타인과 의미를 소통하기 위하여 서로 약정한 방식으로 규약적인 기호 체계를 사용한다.

기호학/기호술semiotics 그리고 기호론semiology는 기호와 관련지어 인식, 의미, 소통 그리고 문화

등 인간의 다양한 활동을 연구하고 분석하는 분야이다.

수학 또는 수학적 활동 또는 그 산물들은 공유된 문화로 상황에 따라 다른 기호적 양식으로 상이한 정신적 표상으로, 문화로, 행위로, 제도로, 인조물로 나타날 수 있다. 21세기 정보-미디어 기술의 발달은, 수학적 활동이 과거의 분석적이고 논리적이고 수-계산적인 활동에서 시각적이고 조형적이고 역동적이고 아이디어들이 결합되고, 직관적이고 예술적이고 창작적인 활동을 가능하도록 하고 있다.

한 예로 초육면체 Q_4에 존재하는 8개의 육면체를 다음과 같이 시각적으로 하나는 정적이고 다른 하나는 역동적으로 표상할 수 있다.



수학적 대상의 이러한 기호적 표상들이 다른 문화 예술 요소들과 결합하여 창작되는 문화 또는 예술로 발전하게 된다. 이러한 수학적 대상들이 멀티미디어의 기본 구성 요소라는 관점에서 수학적 대상의 다양한 존재 유형 또는 양식은 21세기 수학교육에서 중요하게 다루어야 할 필요가 있다

2. 기호, 기호학

[퍼스의 기호학: 기호-삼항들 과 수학적 적용]

기호학에서는 '그 어떤 것 A를 지시(참조)하거나 대신하는 referring to or standing for something' 것이라고 기호의 기능적 측면과 물리적 형식 측면으로 설명한다.

기호학의 창시자 퍼스는 '사고는 오직 기호들 속에서 이루어진다. we think only in signs' (Peirce 1931-58, 2.302). 라고 말한다. 기호/의미는 인간에 의하여 만들어지기도 하고 자연에 의하여 만들어지기도 한다. 즉 그는 기호/의미는 정신, 물질, 문화, 지식 등 모든 곳에 존재한다는 범기호주의적 관점을 가졌다.

퍼스는 기호를 기호들의 관계에 의하여 기호/의미 및 기호-행위들을 이해하려 하였다. 기호를 구성하고 기호 행위/작용을 하게하는 세 요소인 삼항(triad)은 다음과 같다.[Chandler,1994]

Representamen: the form which the sign takes (not necessarily material);

Object: to which the sign refers.

Interpretant: not an interpreter but rather the sense made of the sign;

기호가 취하는 형식: 표상체

(심상과 같은 빗물질적인 것도 가능함)

기호가 지시/참조하는 존재: 대상체

표상체-대상체를 기반으로 만들어지는 의미(sense), 즉 표상체-대상체의 관계를 기반으로 이루어지는 기호/의미 활동 또는 그 결과들을 의미한다.

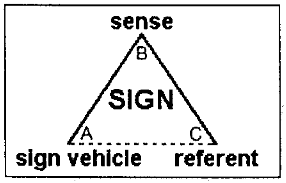
퍼스의 기호-삼항틀은 학자들이나 전문분야에서의 사용자에 따라 다양하게 변형된 기호-삼항틀을 제안하고 있다. 그러나 제안된 삼항틀은 본질적으로 같다.

Nöth(1990)는 의미(sense), 기호운반체 그리고 지시대상이라는 삼항틀을 제안하였다.

Sign vehicle: the form of the sign;

Sense: the sense made of the sign;

Referent: what the sign 'stands for'



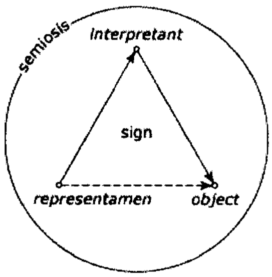
<그림> Chandler,1994

대상체를 대신하는(stands for) 역할을 한다는 의미에서 표상체를 기호운반체로 부르고, 대상체를 지시대상, 해석체를 이러한 기호작용의 틀에서 발생하는 것으로 의미라고 부른다. 세 개의 기호(A,B,C)가 기호의 서로 다른 세 측면 (R,O,I)을 하나씩 취함으로서 자신의 기호적 기능(역할, 행위, 활동, 과정)을 이룬다는 것이다.

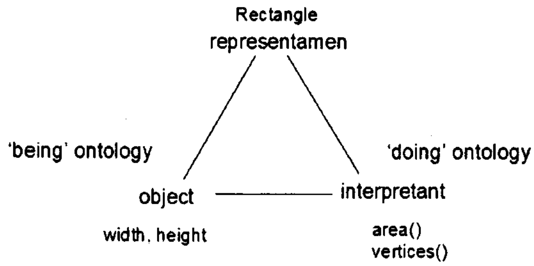
Nöth의 삼항틀은 개념(sense), 정의, 용어, 수학기호, 수학적 심상, 수학적 대상을 다루는 상황에서 쉽게 적용할 수 있는 장점을 가지고 있다.

수학용어 원(circle)은 기호운반체이고 원의 sense를 '원 개념'으로 그리고 지시/참조대상은 원-개념을 갖추어 원으로 판단되는 것이면 그것이 정신적 대상(mental object)이건 , 물질적 대상이건 다 허용된다. 심지어 또 다른 수학적 상징인 방정식 $x^2+y^2=1$도 가능하다.

기호를 구성하는 세 개의 기호적 입장(R,O,I)이 다른 입장으로 변하거나 다른 기호로 대체되는 기호행위가 이루어지면 새로운 기호/의미가 만들어진다. 이러한 방식으로 의미가 생성되는 과정을 기호과정semiosis라고 부른다.



한 예로 컴퓨터에서 직사각형을 다루는 기호/의미 활동을 하려면, 내장되는 프로그램코드의 설계와 프로그램 사용에서 R,O,I는 다음과 같은 퍼스의 기호-삼항틀로 볼 수 있다.



직사각형-표상체를 구성하는 매개 변수인 폭과 높이는 객체가 된다. 객체(폭,높이)-표상체(직사각형) 사이의 기호적 관계에서 해석체로서 면적 과 꼭지점-좌표 등을 구하는 것은 함수적 활동이 된다. 프로그래머는 함수를 구현하는 코드를 작성하는 것이고 소프트웨어 사용자는 구현된 함수를 사용하여 값을 구하는 것이다.

퍼스의 기호-삼항틀이 취하는 입장은 기호적 상황, 내용, 기호/의미를 다루는 활동자의 의도 등에 의하여 변한다. 예로서 직사각형모양의 꽃밭의 면적을 구하는 활동에서 꽃밭-직사각형이 지시대상이고 꽃밭의 가로, 세로 길이를 구하는 활동과 결과가 표상체이고 그리고 면적을 구하는 활동과 결과가 해석체를 이룬다. 따라서 퍼스의 삼항틀의 각 기호가 갖는 (R,O,I) 지위는 절대적인 것은 아니다.

[소쉬르의 기호-이항틀]

기호의 내용이 있다면 내용을 담는 용기(container) 또는 내용을 운반하는 운반체(vehicle)가 필요하다. 내용을 담는 형식(form,기호운반체)이 결합된 기호는 내용+형식으로 양면(앞면-뒷면)을 가진 동전과 같은 존재이다. 기호를 표현하는(운반하는, 담는) 부분인 형식을 소쉬르는 기표signifier라고 부르고, 기호에 결합된 의미/내용 부분을 기의signified 라고 한다. 즉 기호는 기표/기의가 결합된 이중성(duality)을 갖는다. 언어학자 엘름슬레브는 기호를 언어적 관점에서 이중성을 표현expression과 내용content이라고 본다.

단어(words), 시청각, 촉각 등 감각 이미지(images), 소리, 냄새, 맛, 행동(acts), 사물(objects), 도표(diagram), 기타 인조물(artefacts) 등 물질성(physical properties)를 가진 것들은 기호를 표현하는 형식 즉 기표가 될 수 있고 이들은 의미 내용을 담아 운반할 수 있는 기능을 할 수 있다.

소쉬르의 기호학에서 기표에 기의가 결합하기, 기호가 대상을 지시/참조하기, 또는 기의에 기표가 결합하기 와 같은 역방향으로 결합을 signification이라고 부른다.

따라서 signification은 의미작용, 기호작용, 기표/기의작용이고 이를 줄여서 표의작용으로 부른다. 표의작용signification은 기호/기표/기의행위(acts of sign), 기호과정semiosis, 기호의 생산(production of signs)을 뜻하기도 하며 그 생산물과도 관련된다.

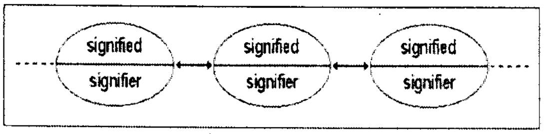
소쉬르는 기의에 대한 기표의 결합/연합(association)은 필연적이기 보다는 임의적(arbitrariness)이라고 하였다. 기표/기의 결합의 임의성, 어떤 국내 학자는 자의성이라는 용어를 사용하는 만큼 주의가 필요한 개념이다. 수학에서는 수학자 Poincare의 "수학은 서로 다른 것에 같은 이름을 붙이는 기술이다"라는 언급은 수학에서 사용하는 기호의 임의성을 설명하고 있다.

기호의 표현과 내용의 결합이 임의적이라는 것은 수학적 개념 또는 심상은 수학적 활동 상황, 맥락 및 의도에 따라 적절한 표상 또는 기호가 만들어지거나 선택된다고 보는 견해와 상통한다.

예를 들면 동양에 서양의 수학을 들여올 때 function을 수학적 정의와는 관련이 없는 함수라는 용어를 사용한 예에서 알 수 있다. 일본에서는 關數를 사용한다. 서양에서도 function의 용어의 최초의 사용은 Leibniz가 곡선 상의 한 점에서 접선의 길이, 접선, 법선 등을 구하는 일을 곡선-점에 관련된 수학적 활동의 의미로 functio를 사용하였다. 그 후 함수에 대한 수학적 정의는 역사적으로 두 변수 사이의 관계, 두 집합사이에 원소에 의한 대응과 같은 개념을 갖게 되었다. 수학적 개념/의미와 현재 사용하는 기표 function은 임의적 결합이다.

임의성과 관련하여 용어 (finite) sequence의 수학적 개념은 string, list , n-tuple 등 순서를 가진 모든 배열을 통칭하여 쓸 수 있다. 국내에서 sequence를 학교수학교육에서 수열이라는 용어를 사용한다. 숫자가 아닌 순서를 갖는 일반적인 배열에 대하여 사용할 수 있는 적절한 용어가 부재한다. sequence를 순서열이라는 포괄적 개념을 갖는 용어로 대치하기에는 쉽지 않다.

수학용어로서 집합으로 사용하는 영어의 set, 독일어 menge에서 보면 수학적 내용 의미로는 같지만 이와 결합한 기표는 일상 언어상황에서 사용하는 의미 스펙트럼(영역)을 볼 때 상당히 다르다. 기표/기의 결합의 임의성은 수학/수학교육을 문화와 상호작용하는 활동의 관점에서 본다면 주의와 관심을 가지고 연구될 필요가 있다. 소쉬르의 기호-이항틀에 기반한 기호생성작용은 다음과 같은 기호-체인에 의한 기호 분화/변환/작용/행위 등으로 본다.[Chandler,1994]

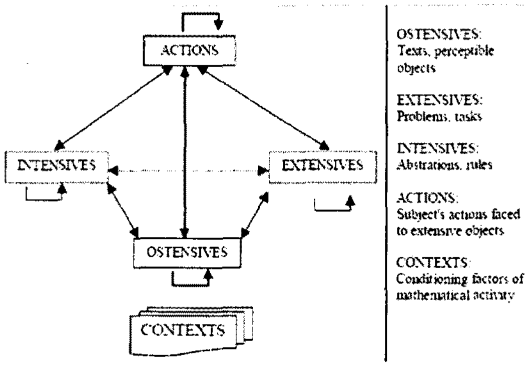


Presmeg(1992, 1997)은 산수학습 활동에서 기표와 기의가 번갈아 가며 역전되는 수학적 의미 활동 사례를 보고하고 있다.

[기호학의 수학교육에의 적용 연구]

Godino(http://www.ugr.es/~jgodino/)의 여러 연구들은 수학교육에 대한 기호학의 다양한 접근 사례들을 보여주고 있다. 기호학/기호술을 활용하는 수학 교수학습 방법과 사례 그리고 수학학습에 대한 기호학의 관점에서 분석 방법과 도구들을 그는 동료 연구자와 함께 제시하였다. 수학-교수학습 현상에 대한 인식론적인 인지적인 그리고 사회-문화적인 분석과 설명을 제시할 수 있는 이론적이 틀

을 구축하는 연구를 수행하였다. 그는 수학적 활동의 기호학-인식론-존재론적인 모형을 다음과 같이 제시하였다.



Ostensives: 수학적 활동에 사용되는 모든 물질성을 갖는 표상(예, 용어, 식, 상징기호, 표, 그래프 등)
Extensives: 문제-상황, 과제, 응용 등 수학적 활동을 일으키는 현상-실체들
Intensives: 수학적 아이디어, 추상개념들(예, 개념, 명제, 연산과정, 규칙/법칙, 이론, 수학적 일반화)
Actions: 문제 상황에서 주체/학습자의 수학적활동들(기술하기, 계산하기, 기호 다루기, 논증, 일반화)
Contexts: 수학적 활동과 연관된 조건들

3. 기호학의 수학교육에의 활용-관점, 문제, 사례

[기호학적 접근과 관련된 메타-연구 문제]

수학교육 연구에서 수학과 현실과의 관계, 개념과 심상에 대한 인식론적 접근, 수학의 내용, 표상 및 구조, 수학의 응용과 모델링 등의 수학화, 교수학습 원리, 교수학습의 인지심리, 상황 그리고 맥락, 수학교육의 사회-문화적 맥락 및 영향 등 많은 수학 및 수학교육의 현상학적 문제들과 실천적 문제들은 기호학/기호술의 내용과 관련을 가지고 있다. 기호학/기호술이 수학교육에 적절한 도움과 통찰을 줄 수 있으려면 수학교육 연구자/실천가들이 이들 문제들을 다루어온 방식들과 여러 관점에서 비교하여 장단점과 차이점들을 찾아보아야 한다.

수학교육과 관련하여 기호학이 어떤 역할 또는 기능을 할 수 있는가? 기호학이 어떤 도움을 줄 수 있겠는가? 도움을 줄 수 있다면 그 내용들은 새로운 것인가? 기존에 이미 있는 것들이라면 기호학적인 장점이 있는가?

수학교육은 수학을 잘 이해하고 수학을 잘 사용하도록 교육하여야 한다는 실천적/당위적/현실적 목적을 가지므로 이런 유형의 메타물음은 중요하다. 기호학의 아이디어가 수학교육에 들어와서 20년 정도의 시간이 경과한 이 시점에서 기호학적인 이론, 방법 또는 관점의 도입이 갖는 수학교육에서의 실익을 고려해야할 시점에 와 있다.

[수학적 개념 활동: 퍼스 기호-삼항틀과의 관련성]

프로이덴탈은(1991) 수학/수학교육에서 개수를 세는 자연수의 형식과 내용의 상호작용에 대하여 다음과 같이 기술하고 있다.

수-차례의 기원은 형식 즉 언어적 형식에서 비롯한다. 수-형식은 개수 세기에 이용되면서 풍부하고 다양한 내용을 받아들인다.(결합한다). 개수를 세는 현상에서 수가 추상화되었을 때, 수는 반대로 심상의 지위, 다소 형식적인 수의 지위를 필요로 한다. 비록 수가 여전히 십진법이라는 형식적인 작은-외투에 꽉 죄어 있고, 개수를 센 무엇에 문자열(숫자열)으로 수가 부여되지만, 수는 내용을 목표로 한다.

the origin of the number sequence is form, even linguistic form. While used for counting, it acquires content - a rich variety of content. When in turn abstracted from this variety of counted phenomena , it requires the status of mental object, more or less formal whole number, though still laced in the formal strait-jacket of the decimal system and still attached by short strings to counting something, which aims at content.

수의 형식과 내용의 상호작용을 설명하는 프로이덴탈의 기술방식은 기호학적 틀을 가지고 있다.

수는 형식+내용, 기표+기의 양면을 갖는 기호로 설명하고 있다. 수의 기의는 수를 사용하는 상황/맥락에 의하여 기호(기표/기의)가 다양한 기능을 수행(acts)한다는 소쉬르적인 설명하고 있다. 동시에 수(형식, Represetamen), 수(심상 mental object) 그리고 수(개수세기, 해석체, Interpretant) 라는 수를 다루고 적용하는 기호/의미 활동의 퍼스-삼항틀을 구성한다.

위에서 제시한 프로이덴탈의 설명이 타당성을 갖는다면, 수학적 의미 활동이 기호학의 이원틀 또는 삼항틀의 구조를 갖는다는 것이고, 그렇다면 자연스럽게 수학 활동을 분석하는 도구로서 기호학의 기호 작용틀을 수용하여 적용할 수 있지 않겠는가? 라는 것이 현재 기호학을 사용하여 수학교육을 연구하는 많은 연구자의 입장인 것처럼 보인다.

[수학은 왜 작용하는가?]

Davis와 Hersh(1980)는 그들의 책 수학적 경험에 '수학은 왜 작용하는가? : 전통적인 대답'이라는 장에서 "우주는 수학의 언어로 자신을 자연스럽게 표현한다" 라고 말하고 있다.

이는 우주(O)-현상(R)-수학언어(I) 이라는 퍼스의 전형적인 기호-삼항틀로서 의미를 전달하고 있다. 더 나아가 '수학(R)은 우주(O)의 상징적 동반자(I)'라는 삼항적 기호/의미를 만들고 있다. 수학이 과학의 언어로 성공은 Wigner의 Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences으로 널리 알려진 사실이다. 모든 수학적 사고에 퍼스 삼항틀이 신비하게 관련되어 작용하고 효과를 나타낸다면, 퍼스 기호학의 삼항틀은 수학적 활동을 이해하고 수학적 결과를 풍성하게 하는 학습 및 지도 활동에 활용할 수 있지 않겠는가? 라는 것이 기호학의 관점에서 수학교육을 연구하는 입장이다.

우주-수학-인간 이라는 기호-삼항틀에서 본다면 수학이 인간과 독립적으로 존재한다는 플라톤주의의 수학 철학관은 매우 낯설게 느껴진다. 수학이 우주와 인간과의 수많은 관련성을 중개(매개, mediate)하는 역할을 생각한다면, 수학적 아이디어의 원형에 집착하는 플라톤주의는 수학의 풍성한 생산적 그리고 다양한 연결(맥락)적 가치를 무시하는 것으로 보인다. 이런 맥락에서 본다면, 수학의 적용을 배제한 순수수학의 활동은 소쉬르의 이원틀에 적합하다.

[기호학의 수학학습 적용 사례 1]

Davis와 Hersh(1980)는 덧셈(addition)의 세 가지 국면(aspects)을 계산이라는 알고리즘, 덧셈기호를 문법규칙처럼 다루는 형식화된 법칙, 어떤 상황에 적절히 사용하는 응용을 제시하고 있다. 덧셈의 기호/의미는 덧셈을 사용하는 이러한 세 가지 활동에서 생산된다.

다음 문제를 생각해보자.

문제: 갑은 하루 동안에 방에 페인트를 칠할 수 있다. 을은 이틀 동안에 방에 페인트를 칠할 수 있다. 두 사람이 함께 방에 페인트를 칠하면 며칠이 걸릴까?

기호학의 관점에서 수학 활동:

방-일-인간 사이의 삼항관계가 주어진 문제 상황과 맥락에서 적절한 기호/의미 활동을 어떻게 하는가에 따라 답을 구할 수 있다. 단순히 계산만으로, 형식적 법칙을 다루는 것만으로, 응용/해석하려는 의지만으로도 해결할 수 없다.

활동1] 방-일 사이에는 일률=1/걸린시간 법칙이 작용한다. 따라서 갑의 일률은 1/1=1 이고 을의 일률은 1/2이다. (갑의일률)+(을의일률)=(갑과을이 함께 하는 일률) 이라는 법칙 또는 개념으로서 기호형식이 만들어진다. 따라서 1+ 1/2 = 3/2 , 즉 갑과 을이 일을 함께하는 일률은 3/2로서 하루에 방 1개 반을 칠할 수 있다. 따라서 갑과 을이 해야 할 일의 양은 방 한 개이므로 3/2의 역분수인 2/3이다.

활동2] 활동1]과 같은 방법으로 다루는 수학은 여전히 상당히 형식화된 수학 활동이다.

다음과 같이 생각해보자. 칠해야 방의 크기를 $6 \times 6 = 36$개의 사각형이라고 하자. (아래 그림을 그리고 관련 내용을 표현하는 방식으로 수학적 활동을 한다)

갑은 하루에 다 칠할 수 있으므로 36개를 칠할 수 있다. 반면에 을은 이틀 걸리므로 36/2= 18개를 칠할 수 있다. 36=12×3이다. 을이 12개를, 갑이 2배인 24개를 칠하면 방을 다 칠하게 된다. 따라서 을이 12개를 칠하는 시간은 $\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$이므로, 갑과 을이 함께 칠하면 $\frac{2}{3}$일 걸린다.

기호학에서는 기호를 표현하는 유형(types)과 그 기능에 대하여 관심을 가진다. 퍼스는 기호의 유형으로 도상형(icon), 지표형(index), 상징형(symbol)으로 분류하고 있다.

수학 또한 언어적 표현과 함께 다양한 시각적 표현에 관심을 가진다. 어떤 시각적 표현이 수학적 활동에서 좋은지 결함이 있는지를 판정할 수 있는 여러 주장들이 있을 수 있다. 수학의 적용과 응용의 측면에서는 응용의 특수성과 시각적 표상이 갖는 generic 특성 즉 적용 범위의 넓음, 사고와 이해의 명료함 또는 간결함, 편리함 등으로 수학교육에서는 다이어그램 표상에 대한 관심이 높아가고 있다.

퍼스의 관점에서 도상형과 지표형 기호를 사용하는 활동2는 상징형 기호를 사용하는 활동1보다 수학을 보다 밀접하게 접촉하게 한다는 장점을 갖는다. 그리고 수학적 활동 과정에서 맞는 추론을 한다는 심리적 안정감을 갖는다. 그리고 수학적 활동의 내용을 타인과 소통하는 방식에서도 장점을 가진다.

[연역법, 귀납법, 가추법: 퍼스 기호-삼항틀]

중요한 세 가지 추론형식 또는 추론 활동인 연역법(deduction), 귀납법(induction, 가추법(abduction)은 퍼스의 기호-삼항틀을 가지고 있다. 세 추론형식 또는 추론활동은 문제 상황과 맥락에 따라 작용 방향이 설정되고 달라질 뿐이다. 퍼스의 유명한 콩주머니의 예는 퍼스의 기호-삼항틀과 세 추론 형식 및 그 활동들과 관련된다는 점을 잘 보여주고 있다. (Peirce, 1981)

연역법
법칙(R) : (A) 이 주머니에서 나온 콩은 모두 하얗다.
사례(O) : (B) 이 콩들은 이 주머니에서 나왔다.
결과(I) : (C) 이 콩들은 하얗다.
All beans from this bag are white
These beans are from this bag.
Therefore, these beans are white.

귀납법
사례(R) : (B) 이 콩들은 이 주머니에서 나왔다.
결과(O) : (C) 이 콩들은 하얗다.
법칙(I) : (A) 이 주머니에서 나온 콩은 모두 하얗다.
These beans are from this bag.
These beans are (all) white.
Therefore, all beans from this bag are white

가추법
법칙(R) : (A) 이 주머니에서 나온 콩은 모두 하얗다.
결과(O) : (C) 이 콩들은 모두 하얗다.
사례(I) : (B) 이 콩들은 이 주머니에서 나왔다.
All beans from this bag are white
These beans are white.
Therefore, these beans are from this bag.

세 추론법을 퍼스 삼항틀의 관점에서 기호/기호의측면으로 하여 형식화하여 보면 다음과 같다.
연역법은 A/R, B/O에서 C가 연역적 결론으로 추론되고 C의 기호적 지위는 I가 된다. 즉 C/I이다.
귀납법은 B/R, C/O에서 귀납적 주장은 A/I가 된다.
가추법은 A/R, C/O에서 가추적 추측은 B/I가 된다.

여기서 귀납법은 주머니로부터 반복적인 실험으로 콩을 꺼내어 콩이 하햫다는 귀납적 활동의 결과로서 귀납적 주장 A가 기호-삼항틀에서 I의 지위을 갖는다.
한편 가추법은 하얀 콩들과 하얀 콩이 들어있는 주머니를 발견함으로서 콩이 그 주머니에서 나왔을 것이라는 추측적 주장을 하는 것이다.
가추법 그 자체는 수학적 엄밀한 증명법으로 사용될 수 없음은 자명하다. 그러나 기호적 지위가 C/O, B/I에서 C/I, B/O로 기호적 지위가 바뀌면 연역법이 된다. 연역법과 가추법 사이의 기호적 지위의 바뀜은 과학적 연구 또는 발견에서는 흔히 있는 사건들이다.
한편 실세계에서 인간이 살아가면서 활용할 수 있는 가능성과 기회는 연역법이 귀납법과 가추법보다 풍성하지 못하다. 반면에 가추법은 확실성이 떨어진다. 퍼스는 "연역에서 가추로 갈수록 확실성은 줄어들지만 추론이 가져오는 풍요로움(uberty)은 증대된다"라고 말한다.
여기서 주목할 또 하나의 기호-삼항틀은 주머니-콩-하양이 갖는 관계이다. 콩-from-주머니, 콩-be-하양은 기호-삼항 주머니-콩-하양 사이에 관계적 의미를 규정한다. 가추법의 결론은 관계적 사실 콩-from-주머니임을 결정하는 방법이고 연역법은 콩-be-하양임을 결정하는 방법이고 귀납법은 콩-from-주머니 및 콩-be-하양임을 결정하는 방법이다. 귀납적 결과는 가장 많은 정보를 가지지만 결론을 얻기 위한 관찰해야하는 양과 노력은 다른 두 방법보다 가장 비효율적이고 비경제적이다.

[연역, 귀납, 가추 - 인력법칙-상대성이론 사례]

가추법이 귀납법과 다른 점은, 귀납법이 개별적 현상들 뒤에 있는 일반적 질서를 찾는 추론법인데에 비해, 가추법은 경험/관찰로부터 얻은 근거 자료를 바탕으로 포괄적 개념/원리/법칙/가설을 구성한 후 다시 실험/관찰을 통하여 구성한 포괄적 개념을 적용해 보는 회귀적 추론 또는 반복 실험(recursive, iterated) 방식의 추론 활동이라는 점이 다르다. 퍼스는 과학적 탐구의 이런 특성을 주목

하여 가추법을 귀추적 추론(retroductive reasoning)이라고 부르기도 하였다.

뉴턴의 만유인력(중력)법칙은 다음과 같은 상황에서의 법칙으로서 가설을 예상하고 과학적으로 가설을 입증하는 일이다.

법칙: ?

관찰: 모든 물체는 자유 낙하한다.

사례: 나무에서 사과가 떨어진다.

뉴턴은 갈릴레이, 케플러의 자료와 운동에 관한 연구를 바탕으로 대담하게 두 물체 사이에는 끌어당기는 힘, 인력이 작용한다는 가설을 예상한다. 가추적 형식에서 직관적 통찰은 두 물체사이에 인력이 있다는 가설이 발견된 것이다. 그리고 인력 가설은 태양계의 행성의 운동, 자유낙하 운동 등을 훌륭히 설명함으로서 법칙의 지위를 갖는다.

뉴턴의 만유인력의 법칙은 인력(중력)의 물리적 본질을 설명하지 못하고 있다. 그리고 물질은 구별되는 무게와 질량이라는 특성을 갖는다. 아인슈타인은 뉴턴역학의 절대시간과 절대공간의 개념을 버림으로서 우주에서 물체의 운동법칙을 수학의 기하학의 법칙/원리인 상대성이론을 수립하였다. 아인슈타인의 상대성 이론은 나무에서 떨어지는 사과의 운동을 인력이라는 물리적으로 허구인 힘을 도입함이 없이 공간-시간의 최단거리를 움직이는 운동으로 설명한다. 마찬가지로 태양 주위를 도는 행성의 운동에 대한 설명도 태양계에 적합한 공간-시간의 기하학 모형으로 설명할 수 있게 된다.

뉴턴역학, 아이슈타인의 상대성 이론 모두 물체의 운동을 설명하는 역학에 수학이 사용된 사례이다. 물리학/수학 이론의 발전은 단순한 형식논리적 탐구를 넘어서 새로운 이론의 발전으로 진전됨을 보여준다.

[연역, 귀납, 가추 - 종자콩 사례]

가추법의 상황은 다음과 같다.

법칙: 이 종자콩에서 생산된 콩은 모두 희다.

관찰: 이 콩들은 모두 희다.

사례: 이 콩들은 이 종자콩에서 생산된 콩이다.

여기서 제시된 법칙-관찰-사례에 의한 연역법 형식은 다음과 같이 타당성을 갖는다.

법칙: 이 종자콩에서 생산된 콩은 모두 희다.

사례: 이 콩들은 이 종자콩에서 생산된 콩이다.

그러므로 결론(관찰)은 “이 콩들은 모두 희다.”라는 새로운 정보를 추가하는 것이다. 이러한 정보는 종자콩을 심은 후 생산될 미래의 콩의 색깔에 대한 정보이다.

한편 귀납법은 형식적으로 다음과 같다.

관찰: 이 콩들은 모두 희다.

사례: 이 콩들은 이 종자콩에서 생산된 콩이다.

그러므로 결론으로 법칙 "이 종자콩에서 생산된 콩은 모두 희다"를 새로운 정보를 획득한다. 이것은 엄밀한 의미에서 과학적 지식의 수준에 도달하지 못한다. 이 주장이 과학적 수준에 도달하려면 현대생물학의 관점에서 유전학 이론에 의한 설명이 부가 되어야 한다. 이 사례에서 보듯이 귀납적 관찰 자료 또는 반복 실험에 의한 관찰은 진정한 과학이론을 만들지 못한다.

가추법의 상황은 다음과 같다.

법칙: 이 종자콩에서 생산된 콩은 모두 희다.

관찰: 이 콩들은 모두 희다.

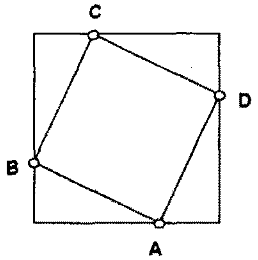
그러므로 결론으로 사례 "이 콩들은 이 종자콩에서 생산된 콩이다."를 새로운 정보로 얻는다. 가추법에서 얻는 이러한 유형의 정보는 문제 상황과 맥락에서 , 예로서 범죄수사와 같은 추리가 필요한 경우에는, 유용한 정보가 될 수 있다.

왜 인간의 사고 활동 파라다임이 퍼스의 기호-삼항틀 형식 속에서 작동하는 이유는 철학적일 것이다. 개연적인 설명으로는 물질-정신-언어라는 인식론적 삼항틀과 이에 기초해서 인간 지식이 문화로서 역사로서 발전해왔을 것이라는 포괄적인 추측을 할 뿐이다.

[논리적 추론 기하 학습 사례 2]

마름모-직각-정사각형이라는 기호-삼항틀 속에서 아래 그림 자료를 통하여 수학학습이 어떻게 이루어질 수 있는지 알아보자.

정사각형 하나를 그린다. 그리고 점 A, B, C, D의 위치는 주어진 정사각형에서 오른쪽에 있는 꼭지점에서 같은 거리만큼 떨어져 있도록 잡는다.



학습에서 다루어야 할 내용들:

[1] 마름모가 직각을 가지면, 그것은 정사각형이다.

[2] ABCD는 마름모이다.

[3] ABCD는 정사각형이다.

[4] ABCD는 직각을 가진다.

전건긍정-연역법(Modus Ponens):
[1] 마름모가 직각을 가지면, 그것은 정사각형이다.
[4] (마름모) ABCD는 직각을 가진다.
그러므로, [3] ABCD는 정사각형이다.

가추법:
[1] 마름모가 직각을 가지면, 그것은 정사각형이다.
[3] ABCD는 정사각형이다.
그러므로, [4] (마름모) ABCD는 직각을 가진다.

귀납법:
[4] (마름모) ABCD는 직각을 가진다.
[3] ABCD는 정사각형이다.
그러므로, [1] 마름모가 직각을 가지면, 그것은 정사각형이다.

이러한 내용들을 기초로 학습자에 제시할 문제들은 이들 내용과 추론법을 결합하여 다양한 문제들을 제시할 수 있다. 예로서 연역법 학습을 위한 문제로서 ABCD는 정사각형임을 증명하는 문제를 제시할 수 있다.

가추법은 확실성이 떨어진다는 일반적 주장과 달리 이 문제 상황에서는 법칙이 필요하지 않는 상황이 되어 추론활동 없이 가추법의 결론이 된다.

각 대신에 한 쌍의 대각선을 또는 이웃하는 한 쌍의 각을 마름모와 정사각형과 결합하는 기호-삼항틀을 구성하여 수학학습내용을 제시할 수 있다.

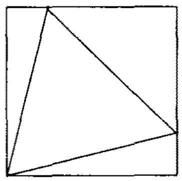
여기서 기호학/기호술의 관점과 수학학습이라는 관점을 결합한다면, 학습자들이 모서리에 만들어지는 4개의 직각삼각형이 합동 그리고 회전 대칭이라는 사실을 이해하고 추론하는 활동, 사각형 ABCD의 4개의 각이 각각 직각이라는 직관 또는 추론 등등이 주요한 Interpretant와 관련된 기호적 활동이다.

이러한 기호적 활동은 주어진 그림(icon 기호)에 지표유형의 기호를 덧붙여 분석적인 방법으로 기호적 활동을 수행할 수 있고 그림 전체를 통찰하고 합동과 대칭이라는 수학적 개념(표상)을 통하여 직관/통찰로서 이해에 도달할 수 있다. 기호 활동의 이러한 측면은 '형식화된 틀에서 수학을 다루느냐' 와 '정도 직관과 통찰을 허용하는 비형식적인 방식으로 수학을 다루느냐'의 차이지만 수학의 내용을 구성하고 전달하는 방식과 코드는 매우 다르다.

예로서 '사각형이 order 4인 회전대칭을 가지면 정사각형이다'라는 정리 또는 정의를 구성하여 여기에 주어진 문제들을 다루면 수학을 다루는 분석적 능력보다 직관과 통찰에 의하여 수학을 다룰 수

있다는 교육적적 가능성을 넓어진다. 이러한 교육적 가능성이 수학교육문화에 자연스럽게 자생하려면 작도의 관점에서 다루는 기하에서 대칭이라는 관점에서 기하를 다루고 이해하는 기하 교육과정으로의 변화가 요구된다. 이러한 변화는 대칭이라는 개념의 도입으로 현재 중등학교수학에서 다루는 내용과 기호체계(기호학에서는 코드)의 변화가 요구된다.

대칭의 관점에서 정사각형 내부에 접하는 가장 큰 정다각형들을 다루는 일반화된 문제 상황으로 발전할 수 있다. 다음은 한 예로서 정사각형 안에 접하는 가장 큰 정삼각형에 대한 표상이다. 대칭성을 이해한다면 쉽게 문제를 해결할 수 있다. 이를 피타고라스 정리나 해석기하로 다루는 분석적 방식의 학습자들은 기하를 직관하고 통찰하는 대칭과 같은 아이디어의 발상에 제약을 갖는 다면, 문제해결에 상당한 어려움을 보일 것이다. 즉 순수히 해석기하적으로 문제를 풀려고 한다면, 변수의 개수와 방정식의 개수를 줄이는 아이디어를 어디에서 가져와야하는 지를 모른다.



퍼스의 도식적인 기호-삼항틀은 교육과 학습의 결과를 풍부히 생산해주며, 기호/의미들 관계에 내재된 구조에서 자연발생적인 것처럼 보인다. 퍼스의 기호-삼항틀은 기호/의미를 다루는 도식적인 틀이지만, 세 요소들이 하나의 틀 속에서 기호/사물/의미/형식/논리들이 발전하여 기호의 새로운 의미를 발현한다는 것을 암시한다.

Ⅲ. 결 론

현재는 정보/통신/웹/미디어 기술의 발전으로 문화/교육/지식/예술 활동이 급변하는 사회이다. 멀티미디어(다매체)를 통한 인간의 표현 활동은 대중화되고 일상화되었다. 멀티미디어는 인간의 새로운 표현 양식 즉 언어이다. 기호학은 언어를 기호로 보는 일반언어학이다. 그 결과, 사실세계와 사이버세계에서, 디지털 문서, 디지털 문화 예술을 접촉하고 경험하는 일은 우리의 문화가 되었다. 사회에서 소통하는 언어가 분석적 경향의 언어에서 직관, 통찰 그리고 접촉의 언어로 변화하고 있다.

수학교육은 사회문화적 변화를 수용하고 그리고 사회문화적 창조와 변화를 이끌고 생산을 지원하는 관계에 있다. 사회에서 소통하는 언어와 매체가 질적으로 다양하게 변하고 있다. 따라서 사회, 문화, 역사, 언어, 기술 그리고 예술의 관점에서 기호의 의미와 기능을 다루는 기호학적인 관점의 수학교육 연구는 흥미롭고 필요하다. 본 연구는 기호학 관점의 수학교육 연구에 대한 시도이다.

기호학적 수학교육연구에 대한 이론적 틀 및 교육현장에서 실천할 수 있는 여러 후속 연구가 기대된다. 그리고 외국의 연구들과의 교류가 이루어지기를 기대된다.

국내에서 수학교육의 학습/수업 문화가 발전하고 교수, 학습, 수업 등 교육과정 개선에 반영될 수 있는 후속 연구들이 기대된다.

국내에서도 ICT를 활용하는 수학교육이 상당히 활발하게 교육 현장에서 수행되어 왔다. ICT를 활용하는 수학 수업 자료 개발 및 평가 그리고 이들을 활용하는 수업을 분석하는 도구로 기호학 및 그 방법들은 새롭게 개척해야할 수학교육연구 영역이다.

수월성과 창의성을 중요하게 다루는 수학교육 분야에서, 예로서 수학영재교육, 멀티미디어 문화에 내재된 수학을 다루는 것은 새로운 수학교육의 도전적 영역이다. 수학교육을 문화를 창조하고 이해하는 관점에서 교육적 가치와 철학의 확립 또한 중요한 연구 과제이다.

끝으로 본 논문을 읽고 필요한 비판을 가감 없이 그리고 아낌없이 해주신 심사위원들께 감사드린다.

참 고 문 헌

Chandler, D. (1994). *Semiotics for Beginners*, http://www.aber.ac.uk/media/Documents/S4B/semiotic.html

Davies, P. J., & Hersh, R. (1980). *The mathematical experience*. Boston: Birkhauser.

Eco, U. (1976). *A theory of semiotics*. Bloomington: Indiana University Press.

Ernest, P. (1998). *Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics*, Albany, New York: SUNY Press.

Kaput, J. (2000). On the development of human representational competence from an evolutionary point of view: From episodic to virtual culture. In F. Hitt and M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1, pp.27-47. Columbus, Ohio: ERIC.

Font, V., Godino, J. D. y Contreras, A. (2008). From representation to onto-semiotic configurations in analysing mathematics teaching and learning processes. In L. Radford, G. Schubring, y F. Seeger (eds.), *Semiotics in Mathematics Education: Epistemology, History, Classroom, and Culture* (pp.157 - 173). Rotterdam: Sense Publishers

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Dordrecht: Kluwer, A.P.

Godino, J. D., Batanero, C., & Roa, R. (2005). An onto-semiotic analysis of combinatorial problems and the solving processes by university students. *Educational Studies in Mathematics*, **60 (1)**, pp.3-36.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education*, **39(1-2)**, pp.127-135.

http://www.ugr.es/~jgodino/

Hersh, R. (1997). *What is Mathematics, Really*. Oxford University Press

Hoffmann, M H. G., Lenhard, J., & Seeger(2005). *Activity and Sign: Grounding Mathematics Education*, Springer

Nöth, W. (1990). *Handbook of Semiotics*. Bloomington, IN: Indiana University Press

Otte, M. (1997). Mathematics, semiotics, and the growth of social knowledge. *For the Learning of Mathematics* **17(1)**, pp.47-54.

Peirce, C. S. (1981). *From Pragmatism to Pragmaticism*, J. M. Krois (trans.) Amherst : University of Massachusetts Press

PME10 (1997)

http://people.exeter.ac.uk/PErnest/pome10

PME27 (2003), DG#7 - Semiotics and Socio-Cultural Evolution of Mathematical Concepts

PME28 (2004). Bergen, Norway 2004 DG#7A Semiotics and Socio-Cultural Evolution of Mathematical Concepts

http://www.math.uncc.edu/~sae/

Presmeg, N. C. (1992). Prototypes, metaphors, metonymies, and imaginative rationality in high school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 595-610.

Presmeg, N. C. (1997). Reasoning with metaphors and metonymies in mathematics learning. In L. D. English (Ed.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors and images*, pp. 267-279. Mahwah, New Jersey

Radford, L. (1998). On Signs and Representations. *A Cultural Account, Scientia Paedagogical Experimentalis*, **35(1)**, pp.277-302.

Rothstein, E. (1995). Emblems of the Mind: The Inner Life of Music and Mathematics. Times Books,

Sfard, A. (1994). Reification as the Birth of Metaphor. *For the Learning of Mathematics*, **14(1)**, pp.44-55.

Sträßer, R. (2004). Introduction Semiotics in Mathematical Education, *ZDM*, **36(6)**.

Tall, D. (Ed.) (1994) *Advanced Mathematical Thinking*, Mathematics Education Library, **11**, Springer Verlag

Rotman, B. (2000). *Mathematics as a sign*. Stanford: Standford University Press.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, **12**, pp151-169.

Tymoczko, T. (1993). Value judgements in mathematics: Can we treat mathematics as an art?, *MAA*, **32**, pp.67 - 78.

Vile, A. (1997). From Peirce towards a semiotic of mathematical meaning. *Logic, Semiotic, Social, and Computational Perspectives on Mathematical Languages*. Seville: F. Quesada, pp.64-76.

Walkerdine, V. (1982) From context to text: a psychosemiotic approach to abstract thought. In Beveridge, M. (Ed.), *Children thinking through language*, London: Edward Arnold.

Some Semiotic Applications in Mathematics Education

Chung, Chy-Bong

Department of Mathematics, Soonchunhyang University , 336-745, Korea

E-mail : cbchung@sch.ac.kr

The semiotic approach to the mathematics education has been studied in last 20 years by PME, ICME conferences. New cultural developments in multi-media, digital documents and digital arts and cultures may influence mathematical education and teaching and learning activities. Hence semiotical interest in the mathematics education research and practice will be increasing. In this paper the basic ideas of semiotics, such as Peirce triad and Saussure's dyad, are introduced with some mathematical applications. There is some similarities between traditional research topics for concept, representation and social construction in mathematics education research and semiotic approach topics for the same subjects. some semiotic applications for an arithmetic problem for work, induction, deduction and abduction syllogisms with respect to Peirce's triad, its meaning in scientific discoveries and learning in geometry and symmetry.

* ZDM Classification : E20

* 2000 Mathematics Subjects Classification : 97D20

* Key Words : signs, semiotics, signification , Peirce triad, mathematical learning activity