韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 23집 제 2호, 2009. 5. 297-312

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 23, No. 2, May. 2009. 297-312

수학사와 수학실험을 통한 다면체 탐구

조 한 혁 (서울대학교)
송 민 호 (서울대학교 대학원)
최 재 연 (한성과학고)

다면체에 관한 연구 문제를 통해 수학사를 통한 문제 제기, 컴퓨터와 교구 등을 통한 수학실험, 추측, 그리고 정당화를 통한 수평적 수학화와 수직적 수학화의 과정을 다룬다. 구체적으로 본 논문에서는 아르키메데스 다면체와 카탈란 다면체를 중심으로, 수학사를 통해 등장하는 해밀턴 경로 문제, 다면체 색칠 문제, 그리고 다면체 전개도를 통한 구성 문제 등을 컴퓨터와 교구 등을 통해 수학실험으로 탐구하고, 추측과 정당화의 과정을 통해 얻어진 결과를 보고하며 또한 수학실험을 통해 발견된 미해결 문제를 제시한다.

1. 서 론

정다면체로부터 시작하여 아르키메데스 다면체와 카탈란 다면체를 거쳐 광범위하게 응용되고 연구되는 다면체 연구에는 우주를 보는 우주관과 세계관이 들어 있으며, 수학사와 연계하여 그래프 이론과 조합론 그리고 밀러 다면체의 반례를 통해 다면체를 재정립하는 과정에서 도입된 다면체 대칭군 등 여러 수학 이론과 개념 발달의 산실이 되어 왔다. 이러한 수학사적인 배경을 갖는 다면체를 학생들에게 의미 있게 수평적 수학화로 탐구의 현장에 올려놓고, 또한 이러한 다면체에 대한 수직적 수학화를 추구하는 탐구는 수학을 만드는 수학 정신을 경험시킬 수 있는 좋은 창의적인 탐구가 가능하다고 본다. 본 논문은 이러한 관점에서, 다면체에 대한 연구 문제를 수학사를 통해 발견하고, R&E 프로그램에 참여하였던 고등학교 학생이 컴퓨터와 교구 등을 통한 수학실험과 추측 그리고 정당화를 하는 수평적 수학화와 수직적 수학화의 과정을 제시한다. 구체적으로 본 논문에서는 아르키메데스 다면체와 카탈란 다면체를 중심으로, 수학사를 통해 등장하는 해밀턴 경로 문제, 다면체 색칠 문제, 그리고 다면체 전개도를 통한 구성 문제 등을 컴퓨터와 교구 등을 통해 수학실험으로 탐구하고, 추측과 정당화의 과정을 통해 얻어진 결과와 수학실험을 통해 발견된 미해결 문제를 제시한다.

---

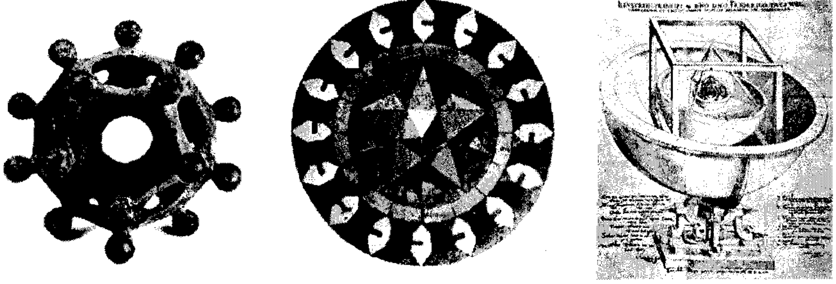
* 접수일(2009년 4월 1일), 심사(수정)일(2009년 4월 20일), 게재확정일자(2009년 4월 28일)
* ZDM분류 : U74
* MSC2000분류 : 97C80
* 주제어 : 다면체, 수학사, 수학실험, 마이크로월드, 자바말
* 이 논문은 한국과학창의재단이 지원한 2008년도 R&E 연구를 통한 결과입니다.

2. 수학사와 다면체 탐구

영국의 Ashmolean 박물관이 소장하고 있는 <그림 1>의 5가지의 정다면체 모양은 플라톤보다 1000년 앞선 Neolithic 시대에 스코틀랜드에서 만들어진 것이다.

<그림 1>

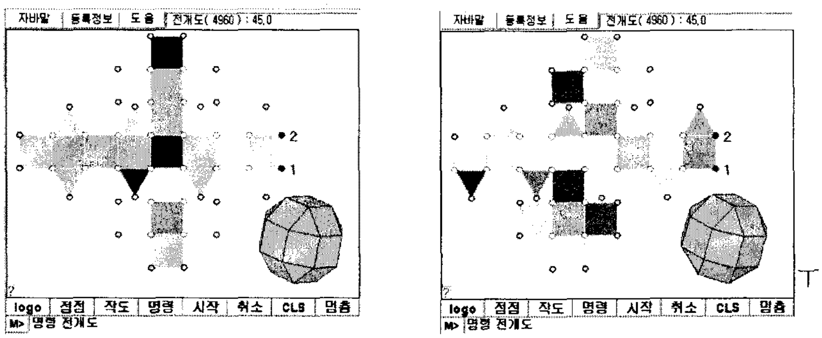
이러한 정다면체 모양을 만든 동기나 사용처에 대해서는 여러 가지 추측이 있는데, 플라톤 (428~348 BC) 은 정다면체를 우주의 네 가지 기본 element인 불(정사면체), 땅(정육면체), 공기(정팔면체), 물(정이십면체)과 우주(정십이면체)에 대응시켰다. 정이십면체는 피타고라스 (570~476 BC) 가 발견자라고 알려져 있는데, <그림 2> 왼쪽의 정십이면체 구조물은 기원전 2세기경에 제작된 것이다. 유클리드 (325~265 BC) 는 정다면체가 다섯 종류임을 그의 원론에서 증명하고 있다. 또한 아르키메데스 (287~212 BC) 는 정다면체를 넘어 아르키메데스 다면체를 정의하고 그러한 성질을 갖는 다면체가 13개임을 밝혔다고 파푸스 (290~350)는 그의 책 Collection에서 전하고 있다. 그 후, 르네상스 시대에 들어와서 Uccello (1397~1475) 는 <그림 2> 중앙과 같이 정십이면체의 면에 오각기둥을 세운 다면체를 그렸고, 케플러 (1571~1630)는 13개의 아르키메데스 다면체에 이름을 주었으며, 체적 등을 계산하여 아르키메데스 다면체를 재구성하였고, 또한 5개의 정다면체를 그 당시 알려진 5개의 행성과 연결하여 <그림 2>의 오른쪽과 같은 우주관을 만들기도 하였다.



<그림 2>

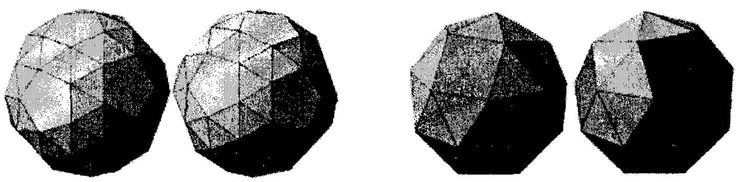
오일러 (1707~1787)는 볼록 다면체의 꼭짓점과 변 그리고 면 사이에 존재하는 오일러 공식을 만들

었는데, 본 연구에서는 오일러의 정리를 사용하여 아르키메데스 다면체가 13개임을 증명하였다. 듀얼(Dual) 다면체는 1865년 카탈란 (1814~1894)에 의해 도입되었는데, 카탈란은 이 개념을 통해 13개의 아르키메데스 다면체의 듀얼 다면체인 카탈란 다면체를 연구하였다. 카탈란 다면체는 주사위로 쓰일 수 있는 대칭성을 갖고 있는 다면체로 본 연구에서는 이러한 다면체를 통해 색칠 연구를 하였다. 그런데 아르키메데스 다면체가 13개라고 주장하기 위해서는 다음과 같은 문제를 해결하여야 한다. 먼저 밀러 (1906~1981) 는 1930년 경에 <그림 3>의 왼쪽과 같은 아르키메데스 다면체를 만들다가 우연히 <그림 3>의 오른쪽과 같은 다면체 (오늘날 밀러 다면체라 불린다)를 만들게 되었다.



<그림 3>

밀러는 <그림 3>의 오른쪽의 다면체에서도 왼쪽과 같이 각 꼭짓점에서 다각형이 접하는 패턴이 모두 같다는 것을 알게 되었다. 그렇다면 예전의 아르키메데스 정의에 의하면 이것도 아르키메데스 다면체라 해야 할 것인데 밀러다면체는 아르키메데스 다면체가 아니다. 또한 <그림 4>와 같은 아르키메데스 다면체의 쌍은 서로 거울대칭인데, 이것을 같은 것으로 보느냐 다른 것으로 보느냐는 문제도 부각되었다.

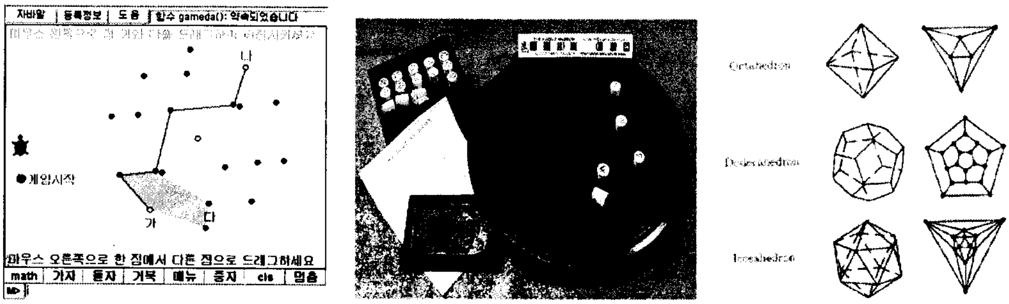


<그림 4>

따라서 아르키메데스 다면체의 정의에 대한 논란이 발생하였다. 이러한 논쟁에 대해 Grünbaum (1994)는 이러한 논란의 원죄(Original Sin) 는 유클리드 원론 11권에서 아르키메데스 다면체의 정의를 “각 꼭짓점에 인접하는 다각형의 배열 패턴이 모두 같다” 라고 정의한 것에 있다고 언급하였고, Grünbaum (2008)의 주장처럼 그 후의 수학자들도 다면체에 대해 계속되는 오류를 접하고 있다.

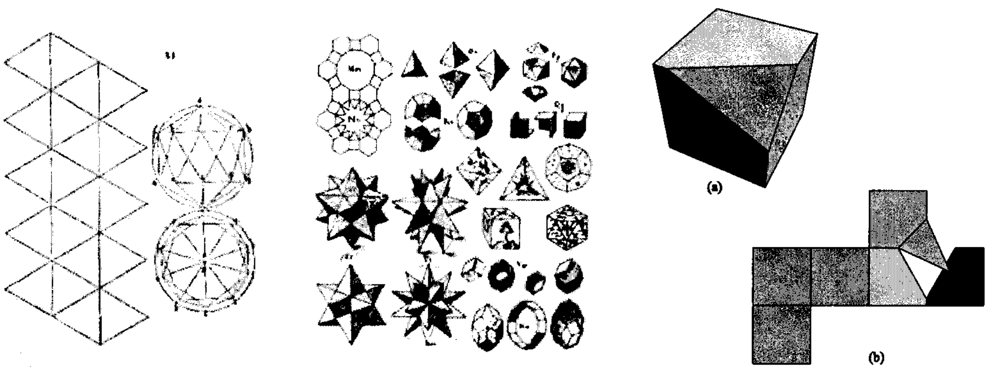
다면체의 색칠 문제는 지구의 지도에 색을 칠하는 문제와 함께 연구되었고, 이를 위해 다면체를

<그림 5>의 오른쪽과 같이 이차원 평면에 눌러서 만드는 다면체 그래프를 통해 다면체의 조합론적인 성질이 연구되었다. 다면체에 대한 경로 문제도 연구되었는데, 그 중에서 1857년 해밀턴은 <그림 5>의 왼쪽과 같이 정십이면체의 하나의 꼭짓점에서 변들을 따라 이동하되 모든 꼭짓점을 한 번씩만 통과한 후 원래의 위치에 올 수 있는지를 연구하였고, 이러한 연구를 바탕으로 <그림 5>의 중앙에 있는 것과 같은 게임을 만들기도 하였다.



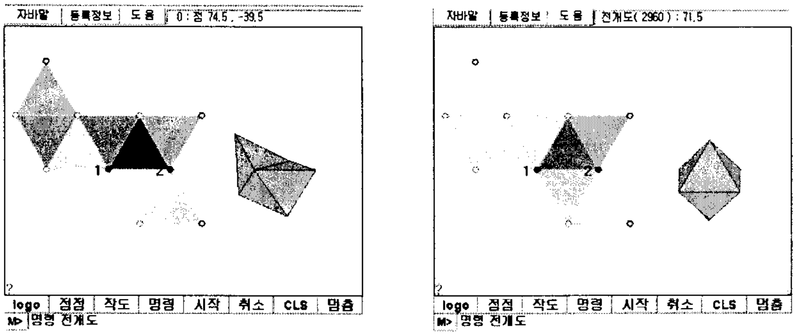
<그림 5>

듀러 (1471~1518) 은 <그림 6>의 왼쪽과 같이 5개의 정다면체와 9개의 아르키메데스 다면체의 전개도를 그려냈다. <그림 6>의 오른쪽과 같이 다면체의 변들을 잘라서 평면에 펼쳐 전개도를 만들 수 있는데, <그림 6>의 오른쪽의 경우에는 면들이 서로 겹친 것이 나타난다. 그렇다면 볼록 다면체의 경우 적당히 변들을 잘라 전개도를 만들되 면들이 서로 겹치지 않도록 할 수 있을까? 중등학교 학생도 이해할 수 있는 기초적인 이 문제는 1975년 Shephard가 낸 문제로 아직까지 풀리지 않은 미해결 문제이다.



<그림 6>

그렇다면 이와 반대로, 주어진 전개도가 있으면 그것으로 다면체를 만들 수 있는가? 만일 만들 수 있다면 유일하게 만들 수 있는가? 이러한 여러 문제들이 연구되고 있는데, <그림 7>은 정팔면체를 만드는 전개도로 배 모양의 다면체를 만들 수도 있다는 것을 보여주고 있다.



<그림 7>

현대에 들어와 다면체의 역할은 점점 증대되고 있다. 1901년 제 1회 노벨 화학상을 받는 밴트호프의 업적 중 하나는 그 동안 평면 구조로 생각했던 메탄의 분자구조가 <그림 8>의 왼쪽과 같이 정사면체 모양의 입체 구조를 갖는다는 것이었고, 또한 DNA 이중나선으로 노벨상을 받은 왓슨과 크릭은 바이러스의 구조가 정다면체를 이룬다고 예측하였는데, 후에 정다면체의 구조를 갖는 바이러스가 발견되었고 더구나 <그림 8>의 오른쪽과 같이 서로 거울 면을 통해 대칭인 아르키메데스 다면체 모양의 바이러스도 발견되었다.

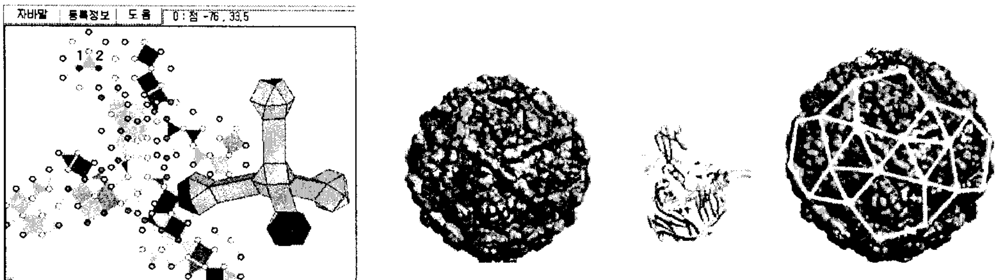
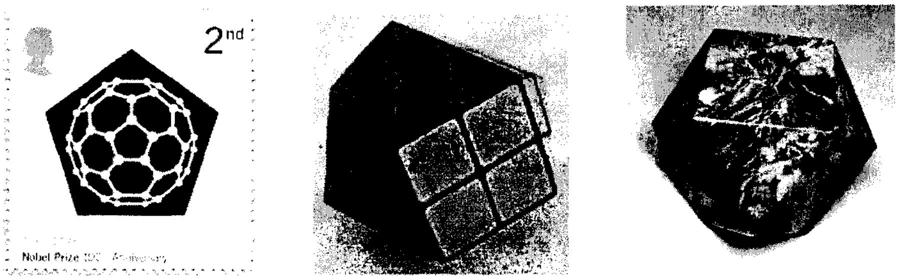


Fig2.6.1a *Echovirus 12*　　b Asymmetric unit　　c *Echovirus 12*, rod packing in 53 symmetry

<그림 8>

뿐만 아니라 1996년의 노벨상은 <그림 9>의 왼쪽과 같이 아르키메데스 다면체인 축구공 구조를 갖는 탄소 60개로 이루어진 분자의 구조를 연구한 학자에 돌아갔으며, 근래에는 아르키메데스 다면체가 <그림 9>의 중앙과 오른쪽과 같은 퍼즐이나 지도 제작에도 사용되고 있다.



<그림 9>

이처럼 정다면체로부터 시작하여 아르키메데스 다면체와 카탈란 다면체를 거쳐 광범위하게 응용되고 연구되는 다면체 연구에는 수학사가 녹아 있으며, 우주를 보는 우주관과 세계관이 들어 있으며, 그래프 이론과 조합론 그리고 밀러 다면체의 반례를 통해 다면체를 재정립하는 과정에서 도입된 다면체 대칭군 등 여러 수학 이론과 개념 발달의 산실이 되어 왔다. 이러한 수학사적인 배경을 갖는 다면체를 학생들에게 의미 있게 수평적 수학화로 탐구의 현장에 올려놓고, 또한 이러한 다면체에 대한 수직적 수학화를 추구하는 문제는 수학을 만드는 수학 정신을 경험시킬 수 있는 좋은 창의적인 탐구가 가능한 문제이다. 본 논문에서는 이러한 수학사적 배경을 갖는 아르키메데스 다면체와 카탈란 다면체를 중심으로, 수학사를 통해 등장하는 해밀턴 경로 문제, 다면체 색칠 문제, 그리고 다면체 전개도를 통한 구성 문제 등을 컴퓨터와 교구 등을 통해 수학실험을 하며 탐구하는 과정과 이러한 수학실험과 탐구를 통해 얻는 결과와 발견된 미해결 문제를 제시한다.

3. 수학실험과 다면체 탐구

Nemirovsky(2004)는 학생들이 수동적으로 보여주는 화면을 응시하는 것보다 행동과 조작으로 이루어지는 행위에 의해 더욱더 자극받게 되고 수식이나 그림으로는 파악할 수 없었던 의미 있는 문제들에 관하여 의식하고 탐구할 수 있는 계기가 될 수 있음을 보여주는 연구가 이루어지고 있음을 언급하였다. 같은 맥락에서 어떤 문제 현상에 대한 실험도구의 사용 가능성은 직접적인 관찰 및 탐구를 통하여 문제를 해결하는 실마리를 제공하는 역할을 할 수 있다. 또한 제시된 문제뿐만 아니라 스스로 의미 있는 문제를 만들어 보다 발전적인 탐구 활동을 가능하게 하는 Problem-posing의 관점에서도 실험 도구는 대단히 유용하다. 예를 들어, 본 연구에서 해밀턴 회로에 의해서 다면체가 나누어지는 부분에 관한 내용은 직접 다면체를 전개도로 분해하여 살펴보던 과정에서 제기되었다. 또한 듀얼다면체에 관한 새로운 정의도 다면체를 직접 조작하는 과정에서의 공간 감각을 수학적인 언어로 정의하게 된 것이다. 이러한 실험 도구는 직접적으로 조작할 수 있는 교구 뿐만 아니라 컴퓨터를 이용하는 '컴퓨터와 수학교육'의 관점에서 접근할 수 있다. '컴퓨터와 수학교육'(조한혁, 2003; Cho, 2004; 김화경, 2006)은 컴퓨터와 함께 수학교육을 연구하는 분야로, 물리적 구성을 통한 정신적 구성

을 강조하는 구성주의(constructionism)를 이론적 배경으로 한다. 나아가 구성주의는 물리적 구성을 위한 놀이 공간을 필요로 하고, 이 공간을 컴퓨터에 구현한 것이 마이크로월드이다. 대표적인 예로 Papert(1980)가 고안한 거북 기하 마이크로월드를 들 수 있다. 김화경 · 송민호(2007)는 마이크로월드 환경에서의 곡선과 거북 행동과의 관계를 연구하며 타원의 길이에 관한 Problem-posing 을 시도하였고, 송민호 · 조한혁(2008)은 이를 보완하여 거북 기하 마이크로월드에서 물리적인 법칙을 적용하는 실험 및 탐구 활동을 통하여 물체의 움직임을 수학적인 언어로 번역하여 수식화하는 활동이 가능함을 보여주었다. 이러한 예에서 볼 수 있듯이 마이크로월드를 도구로 활용하여 문제를 탐구하였을 때, 의미 있는 문제를 만들고 문제에 대한 가설을 찾아서 표현하고, 또한 이를 수학적인 방법으로 정당화하는 접근법이 가능함을 알 수 있다.

앞 장에서 살펴보았듯이 역사적으로 초기에는 다면체를 기하적인 정의를 통하여 접근하였으나, 이러한 접근 방법은 엄밀한 수학적 정의가 어렵고, 따라서 다면체라는 대상에 대한 수학적 접근을 어렵게 만드는 원인이 되었다. 이를 해결하기 위하여 이후 조합적인 방법이나 대수적인 방법을 통하여 다면체를 연구하게 되었다. 이것은 다면체를 직관적으로 이해하기 위해서는 기하적 정의로 접근하는 것이 용이하나 다면체를 탐구하고 수학적인 내용을 이끌어내기 위해서는 다면체의 상태를 수학적인 언어로 표현할 필요가 있음을 의미한다. 이경화 · 최남광 · 송상헌(2007)은 다면체에 관한 학생들의 정당화 유형과 표현의 방식에 관하여 연구하고, 이러한 시각적, 기호적 표현이 다면체 탐구에 있어 중요한 역할을 차지함을 보이고 있다. 또한 다면체를 적절한 수학적인 언어로 표현할 수 있다면 이를 이용한 마이크로월드의 활용이 가능해진다. 김화경(2006)은 마이크로월드에서 언어적 표현은 인터넷을 통한 의사소통을 보다 쉽게 하고, 구성 절차를 파악할 수 있도록 해 주고, 오류 수정을 가능하게 하며, 나아가 환경 설계자의 환경 수정을 보다 손쉽게 한다고 말하고 있다. 즉, 마이크로월드에서 언어적 표현이 의사소통을 위하여 중요하며 특히 다면체와 같은 기술적으로 표현하기 어려운 대상과 관련된 의사소통에서는 다면체를 언어적 표현이 가능한 개체 구조로 변화시켜야할 필요가 있다. 또한, 이러한 개체들 사이의 변화는 손쉽게 이루어져야 한다. 즉, 다면체에 관한 수학적인 언어를 해석하여 해당 다면체에 관한 조작 환경을 제시하고, 또한 자신이 만든 다면체를 언어로 저장하여 타인과 공유할 수 있는 환경이 요구 된다. 여기에서의 공유는 단순한 읽기와 보기뿐만 아니라 수정, 변경, 첨가 등의 공동 연구 활동의 의미로 사용된다. 본 연구에서는 동적 마이크로월드1)를 이용하여 다면체에 관한 내용을 연구원들 사이에서 공유하고, 또한 보완 및 수정을 통하여 다면체를 보다 정교화하여 탐구, 관찰하였다.

이와 같은 이론적, 실제적 필요성에 의해서 본 연구에서 이루어진 다면체 수학실험에 사용된 도구는 다음과 같이 세 가지로 나눌 수 있다.

---

1) 본 논문에서는 자바말(JavaMAL) 마이크로월드를 이용하여 동적 기하(Dynamic Geometry)를 탐구한다. 본 논문에서 사용된 다면체 예제들은 자바말에 통합되어있는 다면체 기능을 이용하여 만들었으며 자바말 마이크로월드는 다음의 사이트에서 사용할 수 있다. http://www.javamath.com

가. 물리적 조작(교구) - 직접적인 조작을 통하여 다면체에 대한 감각 형성에 유용하다. 몇몇 특징 모형(정삼각형 등)을 조합하여 손쉽게 다면체를 만들어 볼 수 있어서 아르키메데스 다면체나 존슨다면체 탐구에 유용하다. 또한 몇 가지 조건을 만족하는 다면체의 존재성에 대한 일종의 예비 실험적 성격도 지니고 있어 문제를 제기하고 가다듬는 탐구 활동에 사용된다.

나. 언어적 표현(컴퓨터 마이크로월드) - 다면체를 컴퓨터 환경에서 구현하고 회전이나 전개도 접기 등의 조작이 가능하도록 하여 교구로 구현하기 어려운 다면체에 대한 탐구 실험 활동에 사용되었다. 이를 위해서는 다면체를 수학 언어로 표현하는 과정이 요구되고, 따라서 필연적으로 수학화 활동이 일어나게 된다. L-system을 응용한 문자식을 통하여 다면체의 각 면을 구성하고, 수식계산을 통하여 면과 면 사이의 각을 입력하여 다면체의 전개도를 구성하게 된다. 본 연구에서는 주로 전개도와 해밀턴 회로와의 관계 및 듀얼 다면체에 대한 탐구 실험 도구로 사용되었다.

다. 의사소통 및 상호작용(게시판) - 수학적으로 언어화된 다면체를 텍스트 형태로 저장할 수 있는 인터넷 기반 의사소통 환경 구성에 사용되었다. 본 연구에 사용된 게시판[2]은 마이크로월드와 다면체의 수학적 표현이 연계되어 사용될 수 있도록 설계되었으며 이를 통하여 다면체 탐구 결과를 저장 및 재현하고 연구원 사이의 정보 공유 및 의사소통이 가능하였다.

다음은 연구에 참여한 고등학교 학생이 이러한 도구를 활용하여 다면체와 관련된 탐구 활동을 하면서 제기하고 나름대로의 정당화 과정을 찾으려고 노력하였던 문제들이다.

1) 어떤 종류의 다면체가 해밀턴 회로를 가지게 되는가?
2) 해밀턴 회로가 존재하는 다면체에서는 임의로 연속한 n개의 점을 잡았을 때, 해밀턴 회로를 찾을 수 있다. 이때, n의 최댓값은 얼마인가?
3) 해밀턴 회로는 없고 해밀턴 경로만 존재하는 다면체가 있을까?
4) 다면체의 해밀턴 경로 중에 그 경로를 따라 잘랐을 때 전개도가 만들어지는 경우가 있는가?
5) 다면체를 해밀턴 회로로 자르면 두 부분으로 나뉘는데 이때 두 부분의 면의 개수는 같은가?
6) 아르키메데스 다면체와 카탈란 다면체 사이의 듀얼 관계를 좀 더 쉽게 정의할 수 없을까?
7) 밀러다면체의 듀얼다면체는 주사위다면체가 될 수 있는가?
8) 삼각기둥은 정삼각형 snub가 가능한가?
9) 카탈란 다면체에서 해밀턴 회로가 없는 것이 존재하는가?

물론 이러한 문제들에 대하여 완벽하게 해답을 제시하거나 일반화하는 것은 힘든 과정이고, 실제로 위의 문제들 중에서 몇몇 문제는 해답을 찾았고, 어떤 문제는 추측에 대한 정당화가 부족한 문제도 있으며, 증명할 방법을 찾을 수 없는 문제도 있었다. 이러한 문제들은 각각 수학적으로 의미를 지니고 있으며 많은 연구가 파생될 가능성이 있다고 생각된다. 하지만 무엇보다 의미있는 점은 다양한

2) 본 논문에서 소개된 게시판 환경은 다음의 사이트에서 볼 수 있다. http://www.javamath.com

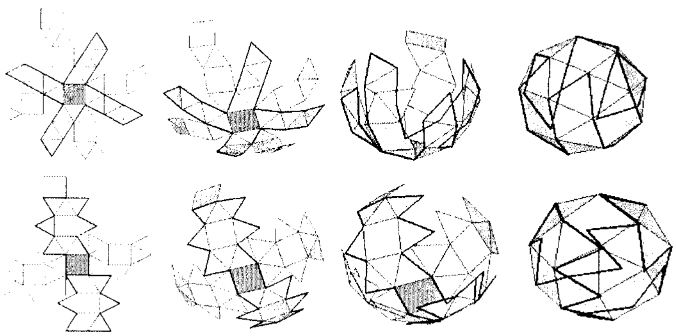
상황으로 문제를 확산시키면서 탐구의 범위를 학생 스스로 확장하는 과정에서 학생이 직접 제기하고 정당화하려고 시도했던 문제들이라는 것이다. 다음 장에서는 위의 질문들 중에서 5번과 9번 질문에 대하여 학생이 제시한 정당화 과정을 살펴보고자 한다.

4. 다면체 색칠과 해밀턴 회로 탐구

앞에서 살펴보았듯이 다면체 탐구를 위해서는 다면체를 직접 만들어보는 구성 및 조작 과정이 필요하다. 이를 위해서는 필연적으로 다면체와 그 전개도를 생각해야만 하는데, 주어진 다면체의 전개도를 찾는 문제는 어려운 과제이다. 다면체의 전개도를 구하는 과정에서 해밀턴 경로와 다면체 전개도 사이에 관계가 있을 것으로 파악하였고, 결국 다면체의 전개도를 구하기 위하여 해밀턴 경로를 이용하게 되었다. 이 과정에서 새로운 문제 5번이 제기되었는데, 그것은 다면체를 해밀턴 회로로 잘랐을 때 나타나는 두 부분에 관한 것이다. 문제 5번을 살펴보면 다음과 같다.

문제 5번) 다면체를 해밀턴 회로를 따라 절단하였을 때, 다면체는 두 부분으로 나누어지게 된다. 이때 해밀턴 회로 안쪽과 바깥쪽의 면의 개수는 어떻게 되는가?

예를 들어 <그림 10>은 snub cube에서 모든 점을 지나는 해밀턴 회로 중 두 경우를 표현한 것이다. 각각의 경우, 해밀턴 회로로 다면체를 절단하게 되면 안쪽 조각에 포함되는 다각형의 개수가 다름을 알 수 있다. 이러한 각각의 조각에 포함되는 다각형의 개수에 대한 규칙을 찾고자 하는 것이 문제 5번에서 요구하는 것이다.



<그림 10>

각각의 다면체에 대하여 해밀턴 회로가 존재한다면, 회로에 의해 나누어진 두 부분의 면의 개수를 비교하기 위해서 사용할 도구가 필요하다. 다음은 아래와 같은 수학적 판별 도구를 개발하여 다면체에 적용하였던 과정을 설명하고 있다.

판별 도구) 해밀턴 회로가 존재하는 모든 다면체에서 다음이 성립한다.

$$\sum_{k \geq 3} (k-2)(p'_k - p''_k) = 0 \quad \cdots ①$$

(p'_k : 회로 안쪽의 k각형의 개수 , p''_k : 회로 바깥쪽의 k각형의 개수)

몇 개의 다각형들이 만나서 이루어진 도형의 점의 개수를 n이라 하자. 그러면 다음과 같은 관계가 성립한다 ; 다각형들의 점의 개수의 총합 - 2 * (다각형의 개수 - 1) = n. 이것은 교구를 이용하여 다면체를 만들면서 다각형에 다각형을 붙이는 과정에서 나온 결과로써 s개의 다각형이 하나의 꼭지점에서 만나게 되면 s개의 꼭지점이 중복된다는 것을 표현한 것이다. 예를 들어 <그림 11>과 같이 사각형에 삼각형을 붙이면 이루어진 도형의 점의 개수는 두 다각형의 점의 개수의 합인 7에서 삼각형이 만나면서 중복된 점의 개수인 2를 뺀 값인 5가 된다. 그리고 해밀턴 회로에 의해서 잘린 다면체의 두 부분은 각각 n개의 동일한 점을 가지는 도형이 된다. 따라서 다음과 같은 관계가 성립하고 이를 정리하면 위의 식 ① 이 된다 ; $\sum_{k \geq 3} p_k'(k-2) = \sum_{k \geq 3} p_k''(k-2) = n-2$. 이것은 해밀턴 회로가 모든 점을 다 지난다는 성질 때문에 성립하는 것이다.

앞에서 구한 도구 (식 ①)을 이용하여 다양한 다면체에 대하여 해밀턴 회로에 의해서 나누어지는 두 부분의 면의 개수를 비교해보자.

가. 정다면체

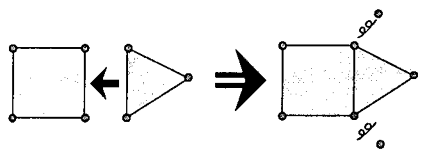
정다면체에서는 한 가지 종류의 정다각형만 사용된다. 따라서 다음과 같은 식이 성립한다.

$$\sum_{k \geq 3} (p_k' - p_k'')(k-2) = (n-2)(p_n' - p_n'') = 0 \qquad \therefore \quad p_n' = p_n''$$

위의 결과에 따르면, 정다면체에서는 어떤 해밀턴 회로를 따라서 정다면체를 절단하여도, 절단된 조각에 포함된 면의 개수는 항상 동일하게 된다.

나. 아르키메데스 다면체

아르키메데스 다면체는 크게 사용되는 다각형이 2가지인 경우와 3가지인 경우로 나눌 수 있다. 여기에서는 2가지 다각형을 사용하는 경우에 대해서만 살펴본다[3]. 사용되는 다각형을 a, b각형이라고 하자. 그러면 다음과 같이 식이 성립한다.



<그림 11>

$$(a-2)(p_a' - p_a'') + (b-2)(p_b' - p_b'') = 0$$

$$p_b' = p_b'' \ \Rightarrow \ p_a' = p_a''$$

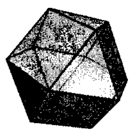
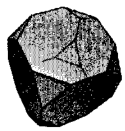
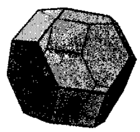
---

3) 다각형이 3가지 종류(a, b, c각형)인 경우에는 다음과 같이 관계식을 구할 수 있다.
$(a-2)(p_a' - p_a'') + (b-2)(p_b' - p_b'') + (c-2)(p_c' - p_c'') = 0$

$$p_b' \neq p_b'' \quad \Rightarrow \quad \frac{p_a' - p_a''}{p_b'' - p_b'} = \frac{b-2}{a-2} \quad \cdots ②$$

이 결과에 의하면 아르키메데스 다면체 중에서 두 가지 다각형을 사용하는 경우, 해밀턴 회로에 의해서 나누어지는 두 부분은 위에서 볼 수 있듯이 두 가지 경우로 나누어지게 된다. 즉, 만약 두 부분에서 하나의 다각형의 개수가 같다면 다른 다각형도 같은 개수로 두 부분에 포함되게 된다. 또한 만약 다각형의 개수가 다르다면 그것은 일정한 비(식 ②)로 나타난다. 다음 <표 1>은 몇 가지 아르키메데스 다면체 에 대한 결과를 예로 보여주고 있다.

<표 1> 아르키메데스 다면체에서 해밀턴 회로에 의한 조각들의 다각형 개수

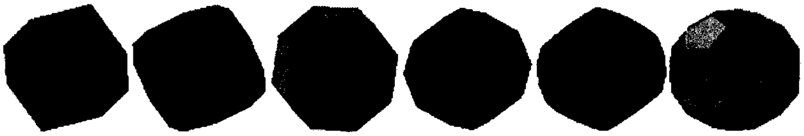
아르키메데스 다면체	 cuboctahedron	 truncated cube	 truncated octahedron
다각형	삼각형 8개 (a=3) 사각형 6개 (b=4)	삼각형 8개 (a=3) 팔각형 6개 (b=8)	사각형 6개 (a=4) 육각형 8개 (b=8)
$(p_a', p_a'', p_b', p_b'')$	(4 , 4 , 3 , 3) (6 , 2 , 2 , 4)	(4 , 4 , 3 , 3)	(3 , 3 , 4 , 4) (5 , 1 , 3 , 5)
$\frac{p_a' - p_a''}{p_b'' - p_b'}$ ($= \frac{b-2}{a-2}$)	(6 , 2 , 2 , 4) 2		(5 , 1 , 3 , 5) 2

예를 들어 <표 1>에서 cuboctahedron 의 경우, 임의의 해밀턴 회로로 다면체를 잘랐을 때, 나타나는 조각의 면의 개수는 삼각형 4개, 사각형 3개로 양쪽 다 동일한 경우, 또는 삼각형 6개, 사각형 2개와 삼각형 2개, 사각형 4개로 나오는 경우의 두 가지 경우 중 하나가 된다. 또한 truncated cube의 경우에는 어떤 해밀턴 회로로 다면체를 잘라도 항상 삼각형 4개, 팔각형 3개로 이루어진 조각이 나오게 된다.

아르키메데스 다면체의 경우에는 모두 해밀턴 회로를 구할 수 있었다. 그러나 아르키메데스 다면체의 듀얼다면체인 카탈란 다면체의 경우, 해밀턴 회로를 가지고 있지 않은 경우도 존재한다. 존재하는 경우에 대해서는 앞의 식을 적용하여 나누어지는 부분의 면의 개수를 구할 수 있었고, 나아가 존재하지 않는 경우에 대한 증명도 필요하다는 생각을 하게 되었다. 이렇게 해서 제기된 문제가 바로 9번 문제이다.

문제 9번) 카탈란 다면체에서 해밀턴 회로가 존재하지 않는 경우가 있는가? 만약 그렇다면 존재하지 않음을 어떻게 증명할 수 있는가?

다음은 고등학생이 해밀턴 회로가 존재하지 않는 카탈란 다면체에 대하여 그 이유를 설명하는 과정이다. 카탈란 다면체의 듀얼 다면체는 아르키메데스 다면체이고, 카탈란 다면체에서 모든 점을 지나는 해밀턴 회로를 찾는 문제는 대응되는 아르키메데스 다면체에서 모든 면을 지나는 경로를 찾는 문제와 같게 된다. 따라서 해당 아르키메데스 다면체에서 모든 면을 거쳐서 제자리로 돌아오는 경로가 없음을 보이면 된다.



<그림 12>

<그림 12>는 문제풀이를 위해 적절히 다면체에 색칠하기를 한 것이다. 이 그림은 다음 <표 2>와 같이 정리되고 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.

<표 2> 아르키메데스 다면체 컬러링

	1	2	3	4	5	6
빨간색 면의 수(R)	8	6	12	20	12	30
파란색 면의 수(B)	6	8	8	12	20	20
초록색 면의 수(G)	0	0	6	0	0	12
|R-G-B|	2	2	2	8	8	2
같은 색끼리 인접(인접하는 색)	×	○(R)	×	×	○(R)	×

여기에서 모든 면을 지나서 제자리로 돌아온다는 말은 인접하는 같은 색을 가지지 않는 색의 경우, 다른 색들이 적어도 그 색의 개수보다는 많거나 같아야 한다는 것을 의미한다. 즉, 위의 1과 같은 경우에는 빨간색 면끼리 서로 접하지 않으므로 빨간색 면을 지난 다음에는 반드시 빨간색이 아닌 면으로 가야한다. 하지만 빨간색 면의 개수(8)보다 파란색 면의 개수(6)이 작기 때문에 하나의 면을 한번만 지나서 제자리로 돌아올 수 없게 된다. 다른 경우에도 같은 규칙을 적용하여 보일 수 있다.

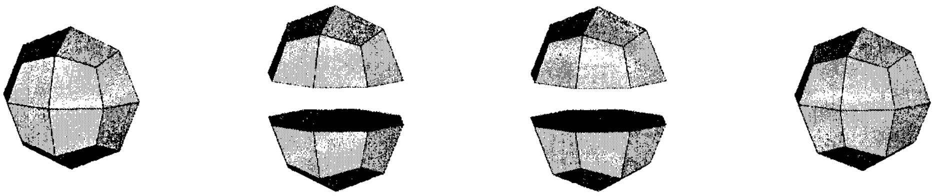
5. 발견된 미해결 다면체 문제

앞에서 다면체에 관한 탐구 실험을 통하여 제기되고 해결된 문제들 중에서 몇 가지 예를 살펴보았다. 하지만 제기된 문제 중에서는 상당히 흥미있는 내용이지만 그 증명 방법이 난해하여 가설로 남겨놓을 수밖에 없었던 문제도 있다. 여기에서는 그 중 몇 가지 경우에 대하여 살펴보고자 한다.

가. 주사위 다면체

남호영(2005)은 주사위 다면체를 모든 면이 그 다면체의 대칭군 아래에서 동치인 다면체로 소개하고 군 이론 및 오일러의 공식을 이용하여 그 종류를 증명하였다. 본 연구에는 소개되지 않았으나 연구 과정에서 각각의 카탈란 다면체에 대하여 주사위로 만들 수 있는 경우의 수를 구하였다. 이 과정에서 카탈란 다면체가 아르키메데스 다면체의 듀얼이라는 점을 상기하고, 또한 아르키메데스 다면체에 혼란을 야기했던 밀러다면체를 생각하게 되었다. 학생의 사고는 자연스럽게 밀러다면체의 듀얼 다면체는 과연 주사위 다면체가 될 수 있을까? 라는 의문을 가지게 되었다. <표 3>은 밀러다면체의 듀얼 다면체가 어떤 식으로 만들어지는지 보여준다.

<표 3> 밀러다면체의 듀얼 다면체를 만드는 과정



rhomb-cuboctahedron	가운데 절단	45도 회전	밀러다면체의 듀얼 다면체

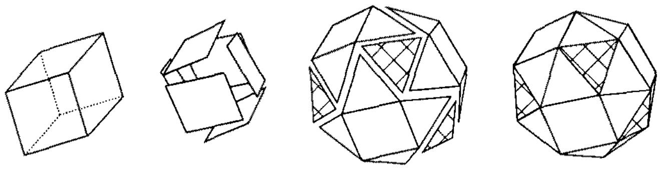
밀러다면체의 듀얼 다면체에 대하여 계산을 통하여 모든 면의 면적이 같으며 이면각도 모두 같음을 알 수 있었다. 하지만 주사위 다면체로 알려진 다면체들 중에서는 그 모습을 찾을 수가 없었다. 여기서 우리는 주사위 다면체의 정의에 대하여 다시 생각해보게 되었다. 예를 들어 다음과 같은 다면체는 각 면의 확률이 같지는 않지만 주사위로 사용될 수 있는 다면체가 된다. 이와 마찬가지로 주사위 다면체의 정의를 어떻게 내리느냐에 따라서 위의 다면체가 주사위가 될 수도 있다는 생각을 하게 되었다. 하지만 이것은 이 연구에서 해결되지 못했으며 결국 밀러다면체의 듀얼 다면체가 주사위가 될 수 있는지 없는지를 증명하는 것은 후속 과제로 남게 되었다.

나. 삼각기둥 snub와 존슨 다면체

아르키메데스 다면체의 전개도를 그리기 위해서 그 구조를 연구하던 도중, snub라는 방법으로 일부 다면체의 구조를 파악할 수 있음을 알게 되었다.

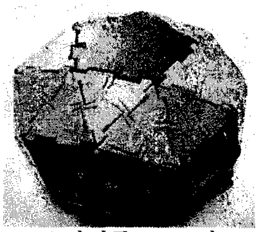
Snub이란 주어진 각 면에 동일한 규칙으로 새로운 다각형들을 붙인 후, 다시 결합하였을 때, 다면체가 되는 조작을 의미한다. 본 연구에서 다루는 snub 다면체는 붙이는 정다각형이 정삼각형인 경우이다.

예를 들어 Snub Cube를 만드는 <그림 13> 과정을 보면 알 수 있듯이, 기본 다면체인 정육면체를 분해하여 각각의 정사각형에 4개의 정삼각형을 붙이고 이를 다시 결합한다.

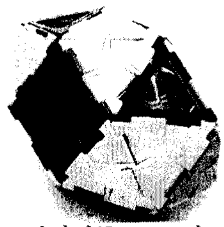


<그림 13>

Snub의 방식에 따르면 기존의 면의 한 점을 기준으로 펴진 부분이 정삼각형 하나로 이어지기 때문에 기존의 다면체에서는 한 점에서 세 면이 모여야 하는 것이다. 따라서 Snub되기 이전 다면체의 면은 정삼각형, 정사각형, 정오각형으로 제한됨을 알 수 있었다(정육각형 이후에는 한 꼭짓점을 중심으로 360도가 넘으므로 평면이 되어버리거나 오목해진다). 따라서 Truncated Tetrahedra이나 Truncated Cube의 경우 정육각형과 정팔각형의 면을 가지고 있기 때문에 snub가 불가능한 것이다. 여기에서 한 면에서 3개가 만나며 정삼각형, 정사각형, 정오각형으로 이루어진 다면체는 정사면체, 정육면체, 정이십면체, 삼각기둥, 오각기둥이 있고 따라서 snub가 가능한 정다각형으로 이루어진 다면체는 이 다섯 가지 경우뿐이다. 앞의 세 가지 다면체들을 snub하면 각각 Icosahedra, Snub Cube, Snub Dodecahedron가 된다. 하지만 삼각기둥과 오각기둥을 snub한 결과는 찾을 수가 없었다. 그래서 우선 snub가 가능한지 여부를 판단하기 위하여 다각형 조작 도구를 이용해 <그림 14>와 같이 직접 만들어 보았다.



오각기둥 Snub화



삼각기둥 Snub화

<그림 14>

하지만 만약 이 다면체가 실제로 존재한다면 존슨다면체의 규칙을 만족하게 된다. 하지만 존슨 다면체는 모두 92종류라고 증명이 되었고 위와 같은 형태의 다면체는 존재하지 않았다. 가장 가능성이 높은 경우는 교구의 틈에서 야기된 오차들로 인해서 다면체처럼 보이지만 실제로는 다면체가 아닌 경우일 것이다. 그렇다면 위와 같이 이루어진 다면체는 있을 수 없다는 것은 어떻게 보일 수 있을까? 정사각형 n개와 정삼각형 m개로 이루어진 다면체가 존재하지 않는다는 것을 어떻게 증명할 수 있을까? 이것은 이번 연구에서 해결하지 못했지만, 추후 연구해볼 가치가 충분한 과제로 생각된다.

6. 결 론

요사이 영재 교육기관 및 과학 고등학교 등에서 사사교육 (R&E) 이 강조되고 있다. 또한 수학교육 연구에서도 수학화교육, 문제해결교육, 수학사와 수학교육, 수학실험과 정당화교육 등의 주제가 주목을 받고 있다. 본 연구에서는 이러한 수학교육의 연구와 과학 고등학교에서의 사사교육을 다면체에 대한 탐구를 통해 융합시키려 하였다. 즉, 수학사를 통해 문제를 발견하여 제시하고, 추측과 정당화 과정을 통해 문제를 해결하고, 수학실험을 통해 발견된 미해결 문제를 제시하였다. 수학사를 통해 다면체에 대한 배경을 이해하고, 이러한 다면체를 수학적 개념과 이론으로 재구성하는 과정은 수학화교육의 좋은 예가 될 수 있다. 또한, 입체인 다면체를 조작하고, 분석하고, 의사소통할 수 있는 수학적 언어와 도구의 한계를 통해, 컴퓨터와 교구 등의 수학실험 도구와 다면체의 전개도를 컴퓨터도 알아듣도록 언어적 표현의 중요성을 경험하는 좋은 예가 되었다. 무엇보다도, 주어진 문제를 푸는 과정으로서의 수학교육이 아니라, 스스로 문제를 제기하고 해결하는 (problem posing-solving) 탐구를 통해 수학적인 결과를 얻고, 의미 있는 미해결 문제를 제시할 수 있었다는 것이 수학사와 수학실험을 통한 다면체 탐구의 가장 큰 결과였다.

참 고 문 헌

김화경 (2006). '컴퓨터와 수학교육' 학습-지도 환경에 관한 연구. 서울대학교 교육학 박사학위 논문.

김화경 · 송민호 (2007). LOGO와 DGS 매개 모델과 오류 사례. 대한수학교육학회지 <수학교육학연구>, **17(2)**, pp.111-125, 서울: 대한수학교육학회

남호영 (2005). 주사위가 될 수 있는 다면체. 제7회 Math Festival 분과E.

송민호 · 조한혁 (2008). 거북 행동을 통한 함수 그래프 구성. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육논문집> **22(2)**, pp.125-136, 서울: 한국수학교육학회

이경화 · 최남광 · 송상헌 (2007). 수학영재들의 아르키메데스 다면체 탐구 과정 - 정당화 과정과 표현 과정을 중심으로. 대한수학교육학회지 <학교수학> **9(4)**, pp487-506, 서울: 대한수학교육학회

조한혁 (2003). 컴퓨터와 수학교육. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> **42(2)**, pp.177-191, 서울: 한국수학교육학회.

Cho, H., Kim, S., Han, H., Jin, M., Kim, H., & Song, M. (2004). Designing a Microworld for Mathematical Creative and Gifted Students, *Proceeding of 10th International Congress on Mathematical Education*, Copenhagen, Denmark.

Nemirovsky, R. (2004). Introduction, PME Special Issue: Bodily activity and imagination in mathematics learning, *Educational Studies in Mathematics* **57(3)**, pp.303-305.

Papert, S. (1980). *Mindstorms: Children, computers, and powerful ideas,* Cambridge,

Massachusetts: Perseus Publishing.
Grünbaum, B. (1994) Polyhedra with Hollow Faces, *Proceeding of NATO-ASI Conference on Polytopes ... etc*, Toronto. ed T. Bisztriczky et al, Kluwer Academic, pp.43-70.
Grünbaum, B. (2008). An enduring error, https://digital.lib.washington.edu/xmlui/handle/1773/4592

Exploring polyhedrons through history of mathematics and mathematical experiments

Cho, Han Hyuk
Seoul National University
E-mail : hancho@snu.ac.kr

Song, Min-Ho
Seoul National University, Graduate School
E-mail : mino@snu.ac.kr

Choi, Jae-Yeun
Hansung Science High School
E-mail : cjy0052@naver.com

We study the process of horizontal and vertical mathematization on the polyhedron problems through the history of mathematics, computer experiments, problem posing, and justifications. In particular, we explore the Hamilton cycle problem, coloring problem, and folding net construction on the Archimedean and Catalan polyhedrons. In this paper, we present our mathematical results on the polyhedron problems, and we also present some unsolved problems that we found. We found that the history of mathematics and mathematical experiments are very useful in such R&E exploration as polyhedron problem posing and solving project.

* ZDM Classification : U74
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C80
* Key Words : polyhedron, History of Mathematics, Mathematical Experiments, Microworld, JavaMAL