*Transactions of KSAE, Vol. 17, No. 4, pp.108-117 (2009)*

1225-6382/2009/100-15

# Rayleigh 방법과 Ritz 방법

박 보 용*

인천대학교 공과대학 기계공학과

# Rayleigh Method and Ritz Method

Bo Yong Park*

*Mechanical Engineering, University of Incheon, Incheon 402-479, Korea*
***(Received 9 December 2008 / Accepted 9 March 2009)***

**Abstract** : Leissa claimed in his article that the Rayleigh method is not the same as the Ritz method for determining natural frequencies and its corresponding mode shapes and contended that Rayleigh's name should not be attached to the method. The present article examines the methods in viewpoint of admissible functions and its minimization process, and of the historical developments. It concludes that Leissa's assertion is relevant, although Rayleigh did apply a conceptual theory systematized from the Lagrange method, and given 38 years earlier than Ritz's ‘masterly exposition of theory’.

**Key words** : Rayleigh's quotient(레일리 계수), Rayleigh-Ritz method(레일리-리츠 방법), Vis viva(living forces), Energy(에너지), Natural frequency(고유진동수), Mode shape(모드형), Variational calculus(변분법), Admissible function(허용함수), Functional(범함수), Minimization(최소화), Stationary value(정상치)

## 1. 서 론

**1.1** Leissa[1)]는 진동시스템의 고유진동수와 고유모드의 근사해법의 하나인 ‘Rayleigh-Ritz 방법’ 에 대하여 Rayleigh 및 Ritz의 관련저술을 상대적으로 비교하고 평가한 후,

> ‘… although Rayleigh did solve a few problems which involved minimization of a frequency, these solutions were not by the straight forward, direct method presented by Ritz and used subsequently by others. Therefore, Rayleigh's name should not be attached to the method’

이라고 주장하였다.

**1.2** 역학(mechanics)과 진동학(theory of vibrations)의 이론이 정립되기 시작한 17세기 이후, 수립된 이론의 적부, 또는 그 이론의 창시자의 대한 명예(credit) 문제 등으로, 학자간의 논쟁이 빈번하게 있었다. 대표적으로, 1686년 Leibniz가, ‘Kurzer Beweis eines denkwürdigen Irrtums von Descartes’에서, 1644년 Descartes가 ‘proper measure of force’로서 ‘quantity of motion’ 으로 질량×속도, 즉, ‘$mv$’를 제시하고 그 보존(conservation)을 주장한데 대한 반격으로, ‘vis viva’로 ‘$mv^2$’을 발표한 후, 1740년대까지 약 60년간 간헐적이었던 Cartesian 과 Leibnizian 간의 논쟁(Vis Viva Controversy),[2-4)] 18세기 함수 개념의 혁신에 지대한 영향을 미친 논쟁으로, 1747년 D’Alembert가 양단 고정현의 진동에 대한 편미분 방정식을 유도하고, 그 해를 제시한 이래, 1829년 Dirichlet가 Fourier 급수의 수렴을 증명하기까지 80년간 계속된 D’Alembert, Euler, Daniel Bernoulli, Lagrange 간의 진동하는 현의 일반해(a general solution)에 대한 논쟁(The Vibration String Controversy), 그리고 1699년 Duillier가 영국 왕립협회

*Corresponding author, E-mail: bypark@incheon.ac.kr

에, Leibniz의 미적분법이 Newton에게서 얻은 것 같다고 암시하는 논문을 제출함으로써 1727년 Newton의 생존 시까지 약 30년간 치열했던 미적분법 발견자에 대한 양측 계열 학자간의 논쟁 등을 예거할 수 있다.

**1.3** Rayleigh's quotient 로 웅변되는 'Rayleigh 방법'과, 소위 시험함수(trial functions)로 'energy functional'을 구성한 후, 변분법(variational calculus)의 '최소화 과정(minimizaton process)'으로 특징되는 'Ritz 방법'이 함께 'Rayleigh-Ritz 방법'으로 이해되는 이유는 바로, Rayleigh's quotient로 구해지는 '평형위치에 관하여 진동하는 에너지 보존 시스템의 고유진동수(또는 고유치, eigenvalue)가 고유모드 근처에서 정상치(stationary value)를 갖는다는 것'이다. 즉, 정상치는 기본 고유모드 근처에서 '최소치(minimum value)를 갖는다.' 라는 공통점에 있다.[5, 6)]

**1.4** 따라서, 본 논문에서는 Leissa의 주장과 같이 'Rayleigh 방법'과 'Ritz의 방법'이 고유진동수와 고유모드의 근사해법 상 다른 개념으로 구성되었는지, 아니면 현재 일반적으로 통칭되는 'Rayleigh-Ritz 방법'이 보다 논리적인지를 해석하기 위하여, 제2절에서는 'Rayleigh 방법'을, 제4절에서는 'Ritz 방법'을 요약, 제시한 후, 다음의 세 가지 방법을 채택한다. 첫째로, 제3절에서는 Rayleigh 이전의 학자들이 이미 에너지의 개념과 에너지 보존법칙을 창안하였는지와 이를 응용하여 고유진동수 계산하였는지를 조사, 비교하여, Rayleigh 방법이 과연 선구성이 있는 가를 확인하는 방법, 둘째로, 제 5절에서는 Rayleigh 이후의 영미 및 대륙(유럽)의 학자들의 Rayleigh 방법과 Ritz 방법에 대한 다양한 견해를 제시하고 비교하는 방법, 그리고, 셋째로 제5절의 8)에서는 Leissa의 주장이 정확한지를 Leissa가 그의 논문에서 두 가지 조건 -허용함수의 전개조건 및 허용함수의 계수를 제 4절의 식(23)의 프로세스로 구하며, 다 자유도 시스템 및 연속시스템까지 확장이 가능한 조건- 으로 예시한 증거를 분석하고 확인한다.

## 2. Rayleigh 방법

**2.1** J.W.S.Rayleigh(1842-1919)에 의한 'Rayleigh 방법'은, 에너지 보존 시스템에서, 고유모드가 기지인 경우, 한 주기간의 운동에너지의 평균 $\overline{T}$ 또는 최대 $T_{\max}$ 이 위치에너지의 평균 $\overline{V}$ 또는 최대 $V_{\max}$ 와 같다는 물리적 원리, 즉,

$$\overline{T} = \overline{V} \quad \text{또는} \quad T_{\max} = V_{\max} \tag{1}$$

$$\text{여기서,} \quad \overline{T} = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} T dt$$

$$\overline{V} = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} V dt$$

$$\mathrm{T + V = const.}$$

으로부터, 고유진동수 ω를 계산하는 방법이다.

예로, 1-자유도 m-k-시스템에서, 고유모드 $x$를 B. Taylor(1685-1731)가 1713년 현의 진동 모양으로 처음 제시한 sine 파형,

$$x(t) = \hat{x}\sin\omega t \tag{2}$$

의 가정에 따라, Rayleigh's quotient R은

$$\omega^2 = R = \frac{V_{\max}}{T_{ref}} = \frac{k}{m} \tag{3}$$

$$\text{여기서,} \quad T_{ref} = \frac{1}{\omega^2}T_{\max}$$

으로 계산됨은 잘 알려져 있다.

식(1)은 1-자유도 시스템뿐만 아니라, 다-자유도 시스템에서도 고유벡터 $\underline{x}$ 에 대하여

$$\omega^2 = R(\underline{x}) = \frac{V_{\max}}{T_{ref}} = \frac{\underline{x}^T \underline{K}\underline{x}}{\underline{x}^T \underline{M}\underline{x}} \tag{4}$$

$$\text{여기서,} \quad V_{\max} = \frac{1}{2}\underline{x}^T \underline{K}\underline{x}$$

$$T_{ref} = \frac{1}{\omega^2}T_{\max} = \frac{1}{\omega^2}\frac{1}{2}\omega^2 \underline{x}^T \underline{M}\underline{x}$$

가 되며, 연속체 시스템, 예로 현의 횡 진동에서도 고유함수 X에 대하여,

$$\omega^2 = R(X) = \frac{V_{\max}}{T_{ref}} = \frac{T}{m}\frac{\int_0^l (\frac{dX}{dx})^2 dx}{\int_0^l X^2 dx} \tag{5}$$

$$\text{여기서,} \quad V_{\max} \simeq \frac{T}{2}\int_0^l (\frac{dX}{dx})^2 dx, \quad \mathrm{T}: \text{인장력}$$

$$T_{ref} = \frac{1}{\omega^2}T_{\max} = \frac{1}{\omega^2}\frac{1}{2}\omega^2 m\int_0^l X^2 dx$$

으로 응용된다.[7)]

**2.2** 식(3)의 R이 식(2)의 $x(t)$가정으로 구해졌듯이, 식(4) 및 식(5)의 R의 계산에는 고유진동형태인

$\underline{x}$ 및 X의 가정이 필요하며, 그 가정에 따라 R의 정확도가 결정된다. R의 오차는 $\underline{x}$ 및 X가 포함하는 오차보다도 약 1/10 [6] 정도로서, $\underline{x}$ 및 X의 가정의 유연성을 보인다.

**2.3** R은 진동시스템의 기본 모드형 및 주파수의 계산에 편리하게 응용된다. Rayleigh는 식 (1)과 식 (4)의 관계를 8)의 Volume One(1판:1877) §88에서, m-자유도 진동시스템에 대하여 T와 V를,

$$\left.\begin{aligned} T &= \left(\frac{1}{2}a_1A_1^2 + \frac{1}{2}a_2A_2^2 + \cdots\right)\dot{\theta}^2 \\ V &= \left(\frac{1}{2}c_1A_1^2 + \frac{1}{2}c_2A_2^2 + \cdots\right)\theta^2 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

으로 전개하고, $\theta(t)$ = cos$pt$ 로 가정한 후, $p^2$을

$$p^2 = \frac{c_1A_1^2 + c_2A_2^2 + \cdots + c_mA_m^2}{a_1A_1^2 + a_2A_2^2 + \cdots + a_mA_m^2} \tag{7}$$

이라 제시하였으며, 진동수 $p$는 정상(stationary) -즉,

> ‘This gives the period of the vibration of the constrained type; and it is evident that the period is stationary, when all but one of the coefficients $A_1$, $A_2$, ⋯vanish, ⋯ ’

- 이라 하였다.(주: E.J.Routh(1831-1907)[9]는 Rayleigh가 8)에서 처음으로 진동수 $p$를 도입하였다고 하였으나, 5)에 의하면, G.Galilei(1564-1642)가 이미 주파수(frequenza)로 진동의 횟수인 운동의 묘사를 이해하였고, M.Mersenne(1588-1648)가 이미 주파수(frequency)를 도입하였음을 알 수 있다.)

**2.4** 또한, Rayleigh는 8)에서, 2-자유도 진동 시스템의 T 와 V를

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}L\dot{q}_1^2 + M\dot{q}_1\dot{q}_2 + \frac{1}{2}N\dot{q}_2^2 \\ V &= \frac{1}{2}Aq_1^2 + Bq_1q_2 + \frac{1}{2}Cq_2^2 \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

으로 전개하고, 에너지 보존시스템의 Lagrange 방정식,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\dot{q}_i}\right) - \frac{dT}{dq_i} + \frac{dV}{dq_i} = 0 \tag{9}$$

에 따라 자유진동 방정식을 유도한 후(주: 또는 $\frac{d}{dt}(T+V) = 0$을 이용 가능), 좌표$q_1$과 $q_2$에 대한 가정,

$$\left.\begin{aligned} q_1 \\ q_2 \end{aligned}\right\} \sim \cos pt \tag{10}$$

으로 ‘특성방정식’,

$$p^4(LN - M^2) + p^2(2MB - LC - NA) + AC - B^2 = 0 \tag{11}$$

을 유도하여, 진동수 $p$를 계산할 수 있음을 제시하였다.

## 3. 에너지 개념의 정립

이 절에서는 ‘Rayleigh 방법’의 근본개념인 에너지, 에너지의 보존원리, $T_{\max} = V_{\max}$ 및 이의 진동수 계산 응용에 대한 역사적 전개를 요약함과 동시에, 서론에서 언급된 첫째 방법에 따른 조사, 비교를 전개한다.

**3.1** 에너지 개념의 형성과 전개는 ‘Vis Viva Controversy’로 시작되었다. ‘proper measure of force’ 에 대한 논쟁은, 18세기 전반기 ‘Paris Academy of Science’ 소속 일단의 Cartesian과 Johann Bernoulli (1667-1748) 동조의 Leibnizian 간의 강성체 간 및 탄성체 간의 충돌문제로, 힘을 작용하는 시간에 따라 측정하느냐 - 즉 $mv$와, 작용하는 힘의 측정으로 작용된 거리를 측정하느냐 - 즉 $mv^2$에 대한 견해와 그들의 보존성에 관한 차이로 발전되었다.[3, 4, 9.10] 1726년 Daniel Bernoulli(1700-1782)와 1743년 J.le R. D’Alembert(1717-1783)가 지적했듯이, 이 논쟁은 패자가 없는 단순, ‘ein Streit um Worte(말의 분쟁)’으로 차츰 식어졌으나, impulse와 kinetic energy등, 2개 물리 용어에 대한 새로운 개념 수립을 촉진하였다.

**3.2** 1673년 C.Huygens(1629-1695)는 ‘Oeuvres Complétes, XⅧ’에서 진동하는 현의 진동모드를 규명하기 위하여 최초로 식(1)의 관계를 응용하였다.[11] 1726년 Daniel Bernoulli는 ‘Examen principiorum mechanicae’에서 vis viva의 문제로서, 식 (1)의 개념과 동일한

$$\frac{v^2}{2} = \int p\,dx \tag{12}$$

여기서, $p$는 단위질량 당 힘

의 관계를 유도하였고,[12] 1728년 Johann Bernoulli는 'St. Petersburg Academy'에 제출한 논문에서, 식(1)과 sine파로 가정한 진동하는 현의 진동모드를 적용하여 진동수를 계산하였다.[11] 또한, 1742년 Johann Bernoulli는 'Discours sur les loix de la communication du mouvement'에서, vis viva 논쟁 중, 탄성스프링의 경우, 식(12)와 같은 결과를 제시하였다.[2]

**3.3** 1686년 G.W.Leibniz(1646-1716)에 의하여 제안된 'lebendige Kraft(vis viva, living force)' 는, 1807년 T.Young(1773-1829)에 의하여 'energy'로 알려지기 시작하였고, 1829년 G.-G.Coriolis(1792-1843)가 'Du Calcul de l'Effet des Machines' '에서 vis viva와 힘과 거리의 곱인 '일'과의 관계로써, $1/2 \cdot mv^2$ 의 '운동에너지(kinetic energy)'를 정확하게 정의하였다. 그리고, '포텐셜에너지(potential energy)'의 개념은 역시 Leibniz의 'tote Kraft(vis mortua, dead force)'으로부터 A.C.Clairaut(1713-1765), J.L.Lagrange(1736-1813) 및 P.-S.Laplace(1749-1827) 등에 의하여 발전되었다. 에너지 보존원리는 Leibniz의 주장, 'dead force의 손실은 상대적으로 living force의 증분에 연관된다.'을 Johann Bernoulli와 Daniel Bernoulli가 계승하여 발전시켰고, S.Carnot(1796-1832) 이후, 열이 운동에너지로의 변환과 에너지 보존의 원리가 연구되었다. 1847년 H.L. F.von Helmholtz (1827-1894)는 'Über die Erhaltung der Kraft'에서, 근육의 신진대사 연구 결과로 현대적 개념의 '열역학 제 1 법칙' 인 '에너지 보존성'에 대한 전개를 하였다. 1849년 경 W.Thomson(Lord Kelvin, 1824-1907)은 'kinetic energy'란 용어를, 1853년 W.J.M.Rankine(1820-1872)은 'potential energy'란 용어를 도입하였다.

**3.4** 13)의 'Vierte Vorlesung' 에서 C.G.J.Jacobi (1804-1851)는

$$\frac{1}{2}\sum m_i {v_i}^2 = U + h \tag{13}$$

를 'Der Satz von der lebendigen Kraft(living force 의 원리)'라 하고,

> 'Man hat in dieser Disciplin festgesetzt, dass die Hälfte der lebendigen Kraft, also $1/2 \cdot \sum m_i {v_i}^2$, gleich der Arbeit der Maschine, oder, wie man sich in diesen practischen Dingen ausdrückt, $1/2 \cdot \sum m_i {v_i}^2$ dasjenige ist, was an einer Maschine bezahlt wird.'

이라고 전개하였다.

**3.5** 14)의 §74 에서 J.C.Maxwell(1831-1879)은 '에너지의 보존 원리' 에 대하여,

> 'The total energy of any material system is a quantity which can neither be increased nor diminished by any action between the parts of the system, though it may be transformed into any of the forms of which energy is susceptible.'

이라고 묘사하였으며, §76에서는 'a change of configuration'에 관련된 시스템의 에너지를 포텐셜에너지로 기술하고, §77에서는 일량 FS와 운동에너지와의 관계를

$$\mathrm{F \cdot S} = \frac{1}{2}MV'^2 - \frac{1}{2}MV^2 \tag{14}$$

이라 하였다. 또한, §120에서 그는, 평형상태에서 운동에너지와 포텐셜에너지가 같음을 응용하여, 단진자의 운동예로부터 중력가속도 g, 또는 진동수 $n$이,

$$\left.\begin{aligned} g &= 4\pi^2 n^2 l \\ n &= (1/2\pi)\sqrt{g/l} \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

임을 유도하였다.

**3.6** 9)(1판:1860, 2판:1868, 3판:1877, 7판:1905)의 §333에서 Rayleigh의 스승인 Routh는 'Half the vis viva is also called the kinetic energy of the particle.' 이라 하였으며, §359에서는 '에너지 보존의 원리'에 대하여,

> 'When a system moves under any conservative force, the sum of the kinetic and potential energies is constant throughout the motion.'

이라고 하였다.

## 4. Ritz 방법

**4.1** W.Ritz(1878-1909)에 의한 'Ritz 방법'[15)]은 수리 물리학의 '경계치 문제'를 수치적으로 해결하는 하나의 방법이다. 예로, 고유치 문제로서 선형 미분 방정식으로 표시된 수리 물리학 현상 중에 진동하는 현의 고유 진동에 관한 미분 방정식,

$$\frac{d^2y}{dx^2}+k^2y=0, \qquad y(+1)=0,\ y(-1)=0 \tag{16}$$

의 해로, 그는 기하학적 경계조건을 만족하는 유한의 다항식인 '허용함수(admissible function)' $y_n$,

$$y_n=(1-x^2)(a_0+a_1x^2+a_2x^4+\cdots+a_nx^{2n}) \tag{17}$$

을 가정한 후, $y_n$의 계수 $a_i$를 결정하기 위하여 변분법의 이용을 제안하였다. 즉,

> '⋯ dann wird das Integral eine bekannte Funktion $J_n(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ der $a_i$, die $x$ nicht enthält. Man bestimme die $a_i$ so, dass $J_n$ ein Extremum werde, also aus dem Gleichungssystem
>
> $$\frac{\partial J_n}{\partial a_1}=0,\ \frac{\partial J_n}{\partial a_2}=0,\cdots,\ \frac{\partial J_n}{\partial a_n}=0\text{'} \tag{18}$$

은, 진동하는 현에 대하여 범함수(functional) $J_n$

$$J_n=\int_{-1}^{+1}({y'_n}^2-k_n^2y_n^2)dx \tag{19}$$

가 식 (18)을 만족하는 최소가 되도록, $a_i$를 결정함을 의미한다.

**4.2** Ritz가 15)에서 언급한, 'Da bei physikalischen und mechanischen Problemen $J_n$ in einfachem Zusammenhang mit wichtigen Grössen, nämlich der potentiellen und kinetischen Energie steht, ⋯'는 'Ritz 방법'에서 변분법의 응용으로, 예로 진동하는 현의 고유진동수 $\omega_n$, 즉, 근 $k_n$과 진동모드 $y_n$을

> 'Jeder dieser Wurzeln entspricht ein bestimmtes $y_n$, und man findet leicht, dass die kleinste dem Minimum von
>
> $$\frac{\int_{-1}^{+1}{y'_n}^2dx}{\int_{-1}^{+1}y_n^2dx} \tag{20}$$
>
> entspricht, für geeignete Wahl der $a_n$'

으로 계산되며, 이것은 결국 식(19)의 범함수 $J_n$의 최소는 에너지 범함수의 최소와 같은 것으로,

$$\frac{\partial}{\partial a_i}J_n=\frac{\partial}{\partial a_i}\frac{\int_{-1}^{+1}{y'_n}^2dx}{\int_{-1}^{+1}y_n^2dx}$$

$$=Minimum\left(\frac{V_{\max}}{T_{ref}}\right)=0 \tag{21}$$

바로 식 (5)가 만족되어야 함을 의미한다.[7, 16, 17)]

**4.3** 'Ritz 방법'을 요약하면, $w$가

> 'Ist aber $w$ als Integral einer Differentialgleichung, unter gewissen Nebenbedingungen, definiert, ⋯'

으로,

$$w_n=\psi_0+a_1\psi_1+a_2\psi_2+\cdots+a_n\psi_n \tag{22}$$

여기서, $\psi_i$는 멱급수 또는 삼각함수

이면,

> '⋯, dass bei wachsendem n die genauigkeit unbegrenzt wachse,⋯'

되며,

> 'Gegenstand dieser Abhandlung ist die Angabe einer Methode zur Bestimmung der $a_i$ unter der Voraussetzung, dass es sich um ein Variationsproblem handle,⋯'

으로서, 범함수 $J_n$

$$J_n=\int_a^b f(x,w,w',w'',\cdots,w^{\sigma})dx \tag{23}$$

가 식 (18)과 같이 극치(Extremum)를 갖도록 계수 $a_i$를 구하는 방법이다. 그리고, 'Ritz 방법'의 응용성과 정확도가 15)의 말미에 묘사되었다. 즉,

> '⋯, dass unsere Methode für die Berechnung der Schwingungszahl des Fundamentaltons einer Saite, Membran oder Platte besonders vorteilhaft ist, und dass je höher der Oberton ist, mit dem man es zu tun hat, um so grösser die Anzahl Konstanten $a_i$ sein wird, die man zu berechnen hat, um eine gegebene Genauigkeit zu erreichen.'

이라고 하였으며 Chladni's figures 연구에도 그의 방

법을 이용할 수 있다 하였다.

**4.4** Ritz는 15)에서 언명한대로 4각형 판의 횡 진동에 대한 'Ritz 방법'의 응용성을 18)에서 증명하였다. 1787년 E.Chladni(1756-1827)에 의하여 Chladni's figures가 발견되고, 1807년 Napoleon 앞에서 소개된 후, 'Plate 진동이론'은 1808년 'Paris Academy of Science'의 공모과제로 선정되었다. '판 진동 미분방정식'은 1813년 수상자인 S.Germain (1776-1831)의 기본방정식의 수립과, S.-D.Poisson (1781-1840)의 굽힘 강성계수의 수정을 거쳐, 1850년 G.R. Kirchhoff(1824-1887)가 경계조건(예로, 원형판의)을 고려한 해를 유도함으로써 완성되었지만, 그 이론의 수치적 계산은 1909년 Ritz에 의하여 비로소 가능해졌다.[18] 즉, 1904년 'Paris Academy of Science'의 'Solution of plate equation with a rigid rectangular boundary'에 대한 공모에 따라, Ritz는 정방형 판의 진동모양의 계산을 제출하였고, 심사 후 뒤늦게 심사위원 중의 하나였던 J.-H.Poincare(1854-1912)에 의하여, Ritz의 'une méthode d'ingénieur'의 탁월성이 1909년의 사후 수상과 함께 인정되었다.

**4.5** 'Bubnov-Galerkin 방법'은 근본적으로는 'Ritz 방법'의 일반화이며, 에너지 표현이 허용되지 않는 문제를 풀기위한 'weighted residual methods'중의 하나이다. 'Ritz 방법'은 이 방법과 FEM의 선도적 근사해법으로, 가정된 시험함수를 이용하여, '변분법 원리'를 '수치적 방법'으로 변환하는 방법이다. 즉, 무한차원 공간에서 범함수를 최소화 하는 대신에, 기본함수의 선형중첩으로 표현된 유한차원의 근사적 부공간(subspace)에서 근사적 최소화를 하는 방법으로, 이를 위한 정상(stationarity)조건은 수치적으로 풀 수 있는 선형시스템을 제공한다. 예로, 연속체 진동시스템의 고유진동수와 고유모드를 변분법을 이용한 이산화과정을 통하여 구하는 수치적 근사방법이 'Ritz 방법'이다.

**4.6** 시험함수 식(22)는 B.Taylor와 Johann Bernoulli의 진동하는 현의 sine파형의 인식과 Daniel Bernoulli의 진동하는 현의 조화함수의 중첩성의 제기로부터 J.B.J.Fourier (1768-1830)의 Fourier 급수전개까지, 어떤 해석적 함수의 급수 전개를 의미한다. 1692년 Leibniz가 곡선의 기하학적 형상을 나타내기 위하여 '함수(function)'란 단어를 도입한 이후, 18세기의 '탈기하화(degeometrization)'[5]를 통하여, Taylor급수, C.Maclaurin(1698-1746)의 급수 및 Lagrange (1736-1813)의 'linear trigometric interpolation'인 'generatix'[19]등이 발표되었고, 이어서 19세기 P.G.L. Dirichlet(1805-1859)의 Fourier 급수증명 및 Ritz의 스승인 D.Hilbert(1862-1943)의 변분법 상 식(22)의 수렴증명[15]등으로, 공간상의 곡선이 어떤 함수로 묘사될 수 있으며, 또한 이들 함수를 다항식으로 전개가 가능해졌다.

## 5. 'Rayleigh 방법'과 'Ritz 방법'의 검토 및 비교

이 절에서는 서론에서 언급된 둘째 방법과 셋째 방법에 따라 'Rayleigh 방법'과 'Ritz 방법'의 특성을 분석하고, 비교한다.

**5.1** Rayleigh는 그의 방법이 진동시스템의 기본고유진동수의 근사계산에만 이용되리라 추정하였고, 고차모드의 응용에서는 의심스러워 했다.[7] 즉, 그는 20)에서 원형관의 유체 흔들림 (sloshing)주파수를 계산함에 있어,

> '… But for this purpose it is doubtful whether the method is practical.'

이라고 하였으며, 21)에서는

> '… but perhaps the most explicit formulation of it is a more recent paper (주: 20)), where it takes almost exactly the shape employed by Ritz. From the title it will be seen that I hardly expected the method to be so successful as Ritz made it in the case of higher modes of vibration.'

이라고 하였다.

**5.2** Rayleigh는 'Ritz 방법'을 이해하고, 21)에서 처음에는,

> 'I wish to call attention to a remarkable memoir by W. Ritz (주:(18)) in which, somewhat on the above lines, is developed with great skill what may be regarded as a practically complete solution of the problem of Chladni's figures on square plates.'

이라고 Ritz의 업적을 치하하고, 다음에는,

> 'Ritz rather implies that I had overlooked the necessity of the first two terms in the expression of an arbitrary function. It would have been better to have mentioned them explicity ; …'

이라고 판모드 식의 가정에 대한 중요성을 공유한 후,

> '… but I am surprised that Ritz should have regarded the method itself as new. An integral involving an unknown arbitrary function is to be made a minimum. The unknown function can be represented by a series of known function with arbitrary coefficients - accurately if the series be continued to infinity, and approximately by a few terms. When the number of coefficients, also called generalized coordinates, is finite, they are of course to be determined by ordinary methods so as to make the integral a minimum. It was in this way that I found the correction for the open end of an organ-pipe(주: Phil.Trans. Vol.CLXL (1870), Scientific Paper, Vol. I, p.57 또는 8)의 Volume Two, Appendix A),…'

이라며, 1908년에 발표된 'Ritz방법'[15]의 개념을, 38년 먼저 그가 발견하고, 응용하였음을 주장하였다.

**5.3** 식(7)의 $p$에 대한 Rayleigh 의 'stationary'평가는 Rayleigh's quotient R에 대한

$$\frac{\partial R}{\partial a_i} = 0 \tag{24}$$

여기서, R = R($a_1, a_2, \cdots, a_n$)

으로 전개되고, 정상(stationarity)의 정의, 즉, '독립변수 각개의 대한 1차 편미분량이 0이 되는 상태'에 따라, R이 바로 에너지 보존 시스템의 고유치임을 의미하는데, 식(24)를 6,16,17)에서는, 변분법 상 적분(functional) $J_n$ 이 정상이 되어야 하는 조건,

$$\frac{\partial J_n}{\partial a_i} = 0 \text{ 또는 } \delta J_n = 0 \tag{25}$$

과 동일하다고 해석하였다.

**5.4** R.Courant(1888-1972)는 22)에서,

> 'Since Gauss and W. Thomson, the equivalence between boundary value problems of partial differential equations on the one hand and problems of the calculus of variations on the other hand has been a central point in analysis. At first, the theoretical interest in existence proofs dominated and only much later were practical applications envisaged by two physicists, Lord Rayleigh and Walter Ritz; they independently conceived the idea of utilizing this equivalence for numerical calculation of the solution, by substituting for the variational problem simpler approximating extremum problems in which but a finite number of parameters need be determined. Rayleigh, in his classical work -Theory of Sound- and in other publications, was the first to use such a procedure. But only the spectacular success of Walter Ritz and its tragic circumstances caught the general interest. In two publications of 1908 and 1909, Ritz, …, gave a masterly account of the theory, …'

이라고 하였다. 즉, 그는 편미분 방정식의 경계치 문제와 변분법 문제간의 등치성이 해석학의 중심문제였다고 간파하였으며 Rayleigh와 Ritz가 해의 수치적 계산에 변분법을 응용함으로써, 이 등치성을 이용하는 생각을 각자 독립적으로 창안하였으며, Rayleigh는 그런 과정을 처음으로 사용하였고, Ritz는 이 이론에 대한 결정적 업적을 이루었다고 평가하였다.

**5.5** S.P.Timoshenko(1878-1972)는 23)에서,

> 'Die Grundidee (주: 15)의) war dieselbe wie bei Rayleigh, nur lieferte Ritz den mathematischen Konvergenzbeweis.'

이라고 하였으나, 7)에서는 'Ritz 방법'을 'Rayleigh -Ritz 방법'이라 칭하는 최근의 경향[6, 24]과는 다르게, 'a further development of Rayleigh's approach'라하고, 'Rayleigh 방법'과 별개로 전개하였다.

**5.6** Michlin은 25)에서, 'Rayleigh 방법'과 'Ritz 방법'간의 관계를,

> '…, daß das Ritzsche Verfahren sich in den Anwendungen auf Probleme aus der Schwingungslehre als eine weitgehende Verallgemeinerung des sogenannten "Rayleigh-Verfahrens" erweist.'

이라고 언급하였다.

**5.7** Tongue는 24)의 §6.4에서, ‘Ritz 방법’의 논리 전개를 다음과 같은 시나리오로 가상하였다. :

> ‘Rayleigh's quotient gives us a good way of estimating a system's fundamental frequency. If I use a pretty good estimate for the first eigenvector, I'll get an excellent approximation. But I'd like know more than just the fundamental frequency; I'd like several natural frequencies and I'd like to know their associated eigenvectors. …what Ritz decided, after a bit of rumination, was that the fundamental reality of Rayleigh's quotient was the fact that it was stationary when perturbed around any of the system's actual eigenvectors. So what Ritz decided to do was to generalize the concept of an estimated vector. Rather than use just a single vector as an estimated vector, Ritz used several. …He chose to treat his trial vectors as if they were the eigenvectors, and thus he proposed forcing Rayleigh's quotient to be stationary with respect to perturbations about them.’

이 가상은 정상 개념(stationary concept)하 전개 가능하다고 판단된다. 또한, Ritz의 스승인 Voigt, Hilbert, Klein 중, F.Klein (1849-1925)이 Routh의 Dynamics[9]에 관심이 있었음은, Ritz 역시, Todhunter-Routh-Rayleigh계의 Rayleigh가 제안한 R의 중요성을 인지하고 있었다고 추정할 수 있다.

**5.8** · Leissa는 1)에서 ‘Rayleigh 방법’과 ‘Ritz 방법’이 일반적으로 ‘Rayleigh-Ritz 방법’으로 통칭되는 이들 두 가지 방법 간의 동질성을 검토하였다. 즉, 그는 Rayleigh가 21)에서, ‘Ritz 방법’보다 그의 방법이 먼저 창안되었다는 주장을, 그의 저서 8)의 관련된 부분, §88, 89, 90, 91, 182, 209, 210 및 §265와 논문 20,21)을 위주로, Ritz의 ‘eine neue Methode’[15]의 근간 - 즉, 첫째로 미분(또는 편미분)방정식의 해로서, 급수로 표현된 ‘허용함수(admissible function)’ (주: 식(22),예로 식(17))로 전개, 둘째로 식(22)의 계수 $a_i$에 대한 편도함수(partial derivatives)로써, 최소화 과정(주: 식(24) 또는 식(25))을 통하여 진동시스템의 고유모드와 그에 해당하는 고유 진동수를 기본차 및 고차까지 계산 - 과, 비교하였다.

· 한편으로, Rayleigh는 진동하는 현(§89), 외팔보(§182), 박막(§209, 210)등의 진동, 파이프의 공기진동(§265, ‘correction for open end’-8)의 Volume Two Appendix A), 원형관의 유체진동[20]과 Chladni's figures[21]의 고유진동수(대부분 기본 고유진동수)계산에 있어, 세 가지 해석과정을 이용하였다. 즉, 첫째로 §182, 265, 20), 21)에서는 §88의 $T_{\max} = V_{\max}$의 조건을 이용하였고, 둘째로 §89, 21)에서는 §88과 90의 과정 - Lagrange 방정식으로 자유진동식을 유도한 후, 가정된 고유모드의 조화운동으로 ‘특성방정식’을 구하고, 특성방정식의 근을 이용 - 으로, 셋째로 §209, 210과 ‘correction for open end’ 에서는, 이미 1730년대 L.Euler (1707-1783)와 Daniel Bernoulli가 ‘linked pendulum’ 및 ‘hanging chain’의 연속체 모델에서 고유모드를 Bessel함수로 유도[11]한 것과 같이, Bessel함수와 경계조건을 이용하였다.

· 다른 한편으로, Leissa는 고유모드가, §89에서는 $y = \cos pt\,[1-(2x/l)^n]$의 단일 허용함수로, §91에서는 $y=\phi_1\sin\frac{\pi x}{l}+\phi_2\sin\frac{2\pi x}{l}+\phi_3\sin\frac{3\pi x}{l}+\cdots$ 의 sine파형 고유모드의 무한급수로, §182에서는 $y=(-3lx^2+x^3)\cos pt$로, 20)에서는 $\eta = -2q_2(r/c)+4q_4(r/c)^3-6q_5(r/c)^5+\cdots$ 와 같이 단일 항, 2개 항 및 무한급수 등으로 전개되었음을 확인하였으나, 검토된 저술 중에 식(22)와 같은 다중 허용함수의 적용이 없었음을 지적하는 동시에, §89와 ‘correction for open end’에서 비록 불명한 최소화 과정*이 있었지만, 역시 검토된 부분 전체에서 ‘Ritz 방법’이 제시한 ‘직접적인 최소화 과정’은 없었기 때문에,

> ‘… Rayleigh did solve a few problems in ways similar to that used subsequently by Ritz, but not the same.’

---

* 저자 주: §89에서는 $y=\cos pt\,(1-(2x/l)^n)$의 지수 $n$에 대하여, $\partial p^2/\partial n=0$으로부터, $n=1.72474$를 구한 후, 기본 고유진동수 $p^2$의 최소값을 계산하였음; ‘correction for open end’에서는, 8)의 §111b, 235l, 235m, 307, 308과 26)을 검토함으로써, 종방향속도 $v=1+\mu r^2/R^2+\mu' r^4/R^4$에서 $\mu=0$인 경우, ‘에너지 최소화’를 통하여 $\mu'=1.103$을 구하였다. 범함수의 최소화에 따라 허용함수의 계수계산으로는 이해될 수가 있겠으나, 고유진동수 계산과정은 분명하게 기술되지 않았다.

이라며, 이들 두 가지 방법 간에 동질성이 없다고 평가하였다.

## 6. 결 론

본 논문의 목적은 'Rayleigh 방법'과 'Ritz 방법'은 같지 않기 때문에 'Rayleigh-Ritz 방법'에서 Rayleigh의 이름을 붙여서는 안 된다.' 라는 Leissa의 주장이 타당한지를, 서론에서 이미 언급된 세 가지 방법으로 비교, 검토하며, 경우에 따라 예시한 증거를 분석함에 있었다.

앞의 2., 3., 4.와 5.절의 내용을 검토, 종합하여, 다음과 같은 결과를 도출하였다 :

**6.1** 이 두 가지 방법이 'Rayleigh-Ritz 방법'으로 통칭되는 이유는, 서론에서도 언급된 바와 같이, 고유치의 'stationary 특성'이다. Rayleigh가 8)의 §88에서도 언급하고, 다시 §265에서도,

> '⋯ principle that the period of a free vibration fulfils the stationary condition, and may therefore be calculated from the potential and kinetic energies of any hypothetical motion not departing far from the actual type.'

이라고 기술한 것은 '어떤 제한된 공간'에서 주기적 운동의 정상거동을 의미한다(주: 9)의 §375, Clausius's theory of stationary motion).

**6.2** Rayleigh의 21)에서의 주장, 즉, 'Ritz 방법'의 개념전개를 이미 그의 저술에서도 취급하였다는 그의 견해는, 기본 고유진동수의 근사계산 외 고차모드와 고차 고유진동수의 근사계산에 대하여 회의적이었던 Rayleigh가 Ritz의 'masterly exposition of the theory'[6]에 따라 고차까지의 근사계산이 가능함을 인정하고, Leissa가 검토한 두 가지 조건인 허용함수의 도입과 최소화 과정전개에 대한 것이었다. 즉, Rayleigh는 그의 저술에서 허용함수를 도입하였으며, 최소화 과정에 대하여서는, 허용함수를 '유한한 급수로 전개하기 위하여 미지의 계수로 구성된 적분을 최소화하여야 한다는' 일반적인 해석 과정이라고만 서술하고, 저술 상 구체적인 최소화 과정은 생략하였다.

**6.3** Courant는, 이론의 시초는 Rayleigh가, 그 이론의 실제적 전개는 Ritz가 하였다고 평가를 하였고, Timoshenko는 이들 두 가지 방법의 근본 아이디어는 동일하다고 하였으며, Tongue는 'Rayleigh-Ritz 방법'의 전개를 하나의 이론체계 전개로 투시하였고, Meirovitch는 6)에서, 'In view of the fact that Ritz's work was independent of Rayleigh's, referring to the approach as the Rayleigh-Ritz method is quite appropriate.' 이라 하며 'Rayleigh-Ritz 방법'의 통칭 적격성을 부여하였다. 이러한 통칭 적격성은 최근의 27)에서도, Leissa의 견해와는 다르게, 확인할 수 있다.

**6.4** 'Ritz 방법', 즉, 'direct variational solution method'는 경계치-고유치 문제를 변분법을 이용하여, 근사 해석하는 방법으로서, 에너지 표현이 불가능하고 복잡한 형의 경계조건을 갖는 문제를 해결하는 'Bubnov-Galerkin 방법'과 FEM은 'Ritz 방법'의 일반화이다. 주어진 고유모드로서 고유진동수를 계산하는 'Rayleigh 방법'과는 다르게, 미지계수 $a_i$로 구성된 식(22)의 고유모드로서, 계수변화에 따른 에너지 범함수(예, Lagrangian)의 극치 계산으로 $a_i$ 및 고유진동수를 계산하는 'Ritz 방법'은 $a_i$의 $i$를 증가시킴으로, 'Rayleigh 방법'에 의한 고유진동수의 계산보다도 더 높은 계산 정확도를 갖는다.

**6.5** Leissa는 Rayleigh 의 관련저술을 'Ritz 방법'의 근간인 두 가지 조건과 비교하였으며, 특히 최소화 과정을 갖는 'Ritz 방법'이 'Rayleigh 방법'과는 해석 과정이 다르다고 평가하였다. 이에 대하여는 "Ritz 방법'이 'Rayleigh 방법'보다도 훨씬 일반화된 방법' 이라고 평가한 Michlin의 평가가 참조될 수 있다.

**6.6** 3.절에서 알 수 있는 바와 같이, 에너지 보존 시스템의 $T_{\max} = V_{\max}$, 그리고 이를 이용한 진동수의 계산이 이미 17세기 말부터, 일련의 수학자(geometer) 및 역학자 사이에서 진행되어 왔던 사실, 그리고 vis viva의 원리가 일반화된 내용으로 독립적으로 금세기에 전개된 것이 'Rayleigh-Ritz 방법'[12] 이라는 견해와, 'Ritz 방법'으로 Chladni's figures를 실제로 근사계산한 'Ritz 방법'의 응용성, 그리고 Rayleigh가 26)에서 오늘날의 'Rayleigh 방법'이라 불려지는 고유진동수 계산을 'Lagrange 방법'이라 기술한 것을, Leissa의 주장과 비교하며 고려하면,

식(22)의 전개와 또한, 이의 적분형의 변분 Minimum 으로서 근사해를 수치적으로 전개하는 방법인 ‘Ritz 방법’에 대한 Leissa의 주장은 역사적인 관점과 내용의 전개에서 일단 적절하다고 평가된다. 그러나, Rayleigh의 관련문헌을 보다 광범위하게 검토하고, 관심 있는 여러 학자들의 의견을 거쳐, ‘Ritz 방법’을 ‘Rayleigh 방법’과 분리시킴이 바람직하다.

## 후 기

본 논문은 인천대학교 2007년도 지원과제인, ‘진동학의 원리’ 내용의 일부로서, 자료조사 및 수집에 협조를 하여 주신 TU Berlin 물리학과와 도서관의 관련 여러분에게 감사를 표합니다.

## References

1) A.W. Leissa, “The Historical Bases of the Rayleigh and Ritz Methods,” J. Sound and Vibration, Vol.287, pp.961-978, 2005.
2) M. Terrall, Vis Viva Revisited, Hist. Sci., pp.189-209, 2004.
3) C. Iltis, “Leibniz and the Vis Viva Controversy,” Isis, Vol.62, Issue 1, pp.21-35, 1971.
4) T. L. Hankins, “Eighteenth-Century Attempts to Resolve the Vis Viva Controversy,” Isis, Vol.56, Issue 3, pp.281-297, 1965.
5) 박보용, 18세기 진동학의 진화(Evolution of Vibration Theory in the Eighteenth Century), 한국경영공학회지, 제12권 제3호, pp.29-48, 2007.
6) L. Meirovitch, Principles and Techniques of Vibrations, 7.14, Prentice Hall, 1997.
7) W. Weaver, Jr., S. P. Timoshenko and D. H. Young, Vibration Problems in Engineering, 5th ed., John Wiley & Sons, 1990.
8) J. W. S. Rayleigh, The Theory of Sound, Volume One(1877), Volume Two(1878), Dover, 1945.
9) E. J. Routh, The Elementary Part of a Treatise on the Dynamics of a System of Rigid Bodies, MacMillan, 1905.(주: 독일어판, 1897년 6판을 독일어로 1898년 출간, F.Klein이 서문을 씀).
10) E. Mach, Die Mechanik in ihrer Entwicklung, F. A. Brockhaus, 1912.
11) J. T. Cannon and S. Dostrovsky, The Evolution of Dynamics : Vibration Theory from 1687 to 1742, Springer -Verlag, 1981.
12) I. Szabó, Geschichte der Mechanischen Prinzipien, Birkhäser, 1987.
13) C. G. J. Jacobi's Vorlesungen über Dynamik Gehalten an der Uni. zu Königsberg im Wintersemester 1842-1843 und Nach Einem von C.W. Borchart Ausgearbeiteten Hefte, Verlag. G. Reimer, 1884.
14) J. C. Maxwell, Matter and Motion, Dover, 1991.
15) W. Ritz, Über Eine Neue Methode zur Lösung Gewisser Variationsprobleme der Mathematis-Chen Physik, J. Für Reine und Angewandte Mathematik, 135, 1-61, 1908.
16) A. L. Fetter and J. D. Walecka, Theoretical Mechanics of Particles and Continua, Dover, 2003.
17) H. J. Weber and G. B. Arfken, Essential Mathematical Methods for Physicists, Elsevier, 2004.
18) W. Ritz, Theorie der Transversalschwingungen Einer Quadratischen Platte Mit Freien Rändern, Annalen der Physik, Vol.28, pp.737-786, 1909.
19) N. Luzin, The Evolution of ⋯, The American Mathematical Monthly, Vol.105, No.1, pp.59-67, 1998.
20) J. W. S. Rayleigh, On the Calculation of the Frequency of Vibration of a System in Its Gravest Mode, with an Example from Hydrodynamics, Phil. Mag. XLVⅡ, pp.566-572, 1899.
21) J. W. S. Rayleigh, On the Calculation of Chladniś Figures for a Square Plate, Phil. Mag. XXii, pp.225-229, 1911.
22) R. Courant, Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibrations, Bull. American Math. Society 49, pp.1-23, 1943.
23) S. P. Timoshenko, Erinnerungen, Ernst & Sohn, 2006.
24) B. H. Tongue, Principles of Vibration, 6.4, Oxford University Press, 1996.
25) S. G. Michlin, Variationsmethoden Mathematischen Physik, Akademie-Verlag, 1962.
26) J. W. S. Rayleigh, On the Instability of Jets, Proc. London Mathematical Society, Vol.10, pp.4-13, 1878.
27) J. Wauer, Kontinuumsschwiugungen, Vieweg+ Teubner, 2008.