다중모델 해석을 위한 부분층별-등가단층 결합요소

Partial Layerwise-to-ESL Coupling Elements for Multiple Model Analysis

신 영 식† 우 광 성* 안 재 석**
Shin, Young-Sik Woo, Kwang-Sung Ahn, Jaeseok
(논문접수일 : 2009년 4월 8일 ; 심사종료일 : 2009년 5월 18일)

요 지

이 논문에서는 복합재료 적층판 해석을 위해 등가단층요소와 부분-선형 층별 적층요소를 서로 연계시킨 결합요소를 제안하였다. 등가단층요소는 퇴화 쉘요소에 의해 정식화되었으며, 반면에 부분-선형 층별요소의 경우 면내변위는 부분적 선형변화로, 두께방향으로의 면외변위는 일정하다고 가정하였다. 제안된 유한요소모델은 p-수렴방식에 기초를 두고 있다. 변위장 보간을 위해 적분형 르장드르 다항식이, 수치적분을 수행하기 위해서는 가우스-로바토 적분을 각각 채택하였다. 이 연구에서는 주로 p-수렴 결합요소의 검증을 위해 다양한 형태의 유한요소 다중모델에 대해 안정된 수치해석값을 보여주는지에 초점을 두었다. 채택한 예제는 정해를 쉽게 알고 있는 단순한 문제로 인장력을 받는 평판 또는 연직하중을 받는 캔틸레버보에 적용하여 제안된 요소의 성능을 평가하였다.

핵심용어 : 등가단층이론, 부분층별이론, p-수렴 결합요소, 적층복합재료평판, 다중모델

Abstract

This paper presents the p-convergent coupling element on the basis of the ESSE(equivalent single layer shell element) and the PLLE(partial-linear layerwise element) to analyze laminated composite plates. The ESSE is formulated by the degenerated shell theory, on the other hand, the assumption of the PLLE is piecewise linear variation of the in-plane displacement and a constant value of lateral displacement across the thickness. The proposed finite element model is based on p-convergence approach. The integrals of Legendre polynomials and Gauss-Lobatto technique are chosen to interpolate displacement fields and to implement numerical quadrature, respectively. This study has been focused on the verification of p-convergent element. For this purpose, various finite element multiple models associated with the combination of ESSE and PLLE elements are tested to show numerical stability. The simple examples such as a cantilever beam subjected vertical load and a plate with tension are adopted to evaluate the performance of proposed element.

Keywords : *equivalemet-single-layered theory, partial layerwise theory, p-convergent coupled element, laminated composite plates, multiple model*

1. 서 론

다중모델(multiple model) 해석은 하나의 시스템 안에서 2개 이상의 다른 수학적 모델을 가지고 해석하거나, 해석 전 영역에 대한 체눈(mesh)의 밀도를 동일하게 적용하는 것이 아니라 세부 영역별로 체눈의 밀도를 뚜렷하게 차이를 둠으로써 해석의 효율성을 높이는 기법을 말한다. 즉, 최소의 비용으로 최대의 정확성을 획득하기 위해 한정된 계산상의 자원을 사용자의 목적에 맞게 적절하게 배분하는 방법이다. 이러한 다중모델 해석시에는 비적합 유한요소 체눈 또는 비적합 수학적 모델들의 결합이 요구되기도 한다. 비적합 수학적 모델을 사용하는 경우에는 사용되는 모델이 하나일 수도 있고, 여러 개일 수도 있다. 이러한 다중모델 해석시에는 일반적으로 문제가 되는 것이 비적합한 세부영역의 경계에서의

† 책임저자, 종신회원 · 영남대학교 건설시스템공학과 교수
Tel: 053-810-2415 ; Fax: 053-810-4622
E-mail: ysshin@yu.ac.kr
* 영남대학교 건설시스템공학과 교수
** 영남대학교 공업기술연구소 연구원

• 이 논문에 대한 토론을 2009년 8월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2009년 10월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

변위의 연속성과 평형상태를 만족시키는 것이다. 예를 들면, 두께가 두꺼운 솔리드시스템과 두께가 얇은 쉘 부재가 연결되어져 있는 경우, 일반적인 쉘요소만을 가지고서 모델링하는 경우에는 솔리드 시스템에서의 거동을 정확히 예측할 수가 없다. 또한 솔리드요소(8절점 또는 20절점)만을 가지고서 모델링하는 경우, 솔리드요소의 변장비를 고려하여 모델링을 한다면 계산량이 엄청나게 늘어날 수밖에 없을 뿐만 아니라, 매우 얇은 쉘 부재의 경우에는 변장비에 대하여 세심하게 고려하지 않는 경우, 해석의 오차가 커질 가능성이 높아진다. 그래서 이와 같은 문제점을 극복하기 위하여, 다른 유한요소 모델들 간의 연결을 위한 요소가 개발되어왔다. 그에 대한 예로서, 평면요소와 보요소, 3차원요소와 보요소, 스프링요소와 평면응력 및 평판요소, 더 나아가서 3차원요소와 평면요소를 동시에 사용할 수 있는 모델들이 제안되고 있으며, 이들 요소를 일컬어 개념이 서로 다르지만 천이요소(transition element), 계면요소(interface element), 연결요소(link element), 접촉요소(contact element) 등으로 불려진다. 이와 같은 모델링기법은 모델링의 편이성과 함께, 계산의 효율성을 도모할 수 있으며, 경우에 따라서는 해의 결과도 개선시킬 수 있다. 하지만, 이와 같은 모델링기법을 사용하는 경우, 각 요소들의 절점 자유도 수가 다르기 때문에 이와 같은 요소들을 직접적으로 연결하는 것은 어려움이 있을 수밖에 없으며, 일반적으로 문제가 되는 것이 비적합한(non-conforming) 세부영역의 경계에서의 변위의 연속성과 평형상태를 만족시키는 것이다. 초기의 연구에서는 이와 같은 문제점을 극복하기 위하여, 연결 부위에 MCE (multipoint constraint equations)를 사용하여, 솔리드요소와 쉘요소의 연결을 시도하였지만, 이와 같은 모델은 접합부의 복잡한 거동에 대해서는 신뢰할 만한 결과를 도출해 낼 수 없다고 알려져 오고 있다(Surana, 1980).

2차원 모델과 3차원 모델을 동시에 모델링하여 해석하는 방법에는 크게 순차적 접근방식(sequential or multistep methods)과 일괄해석방식(simultaneous methods)으로 나눌 수가 있다. Thompson 등(1990)은 2차원 모델링 영역에는 일차 전단변형이론을 적용하여 2차원 영역을 먼저 해석을 한 후, 3차원 영역에 일반적인 솔리드요소를 가지고서 모델링한 후에 2차원 해석에서의 결과 값들을 3차원 해석에 적용시키는 순차적 접근방식을 사용하였다. 이러한 방법을 순차적 접근방식 중에서도 비반복적 방법(non-iterating methods)이라고 하는데(Knight 등, 1991), 이와 같은 해석 방법은 2차원 영역에서의 거동은 3차원 영역에 반영되는 반면에, 3차원 영역의 거동은 2차원 영역에 반영될 수 없는 단점을 가지고 있다. 또한, 3차원 영역의 해석 시에 2차원 영역과의 경계에서 이전의 해석값의 변위값이 경계조건으로 부과되기 때문에 변위의 연속조건은 만족되는 반면에, 경계에서의 힘의 평형조건은 보장되지 않는다. 이와 같은 문제점을 해결하기 위해서, Mao 등(1991)과 Whitcomb 등(1993)은 반복적 방법(iterating methods)을 사용하였다. 한편, 일괄해석방식은 몇 가지의 수학적 모델을 사용하여 해석을 시행하는 방법이다. Surana(1980), Liao 등(1988), Davila(1994), Feng 등(1998), Garusi 등(2002)은 다양한 천이요소를 사용하여 전체 영역을 한 번에 모델링하여 해석하는 방법을 시도하였다. 이와 같은 방법은 다른 수학적 모델들 간의 경계에서의 상호작용을 명확히 설명할 수 있으며, 비선형으로의 확장성도 용이하여 최근에 많이 사용하는 방법이다.

본 연구에서는 두께가 두꺼운 시스템과 상대적으로 두께가 매우 얇은 평판이 접하는 시스템을 해석하는 경우, 두께가 두꺼운 영역은 3차원 모델을 적용하고, 얇은 평판 영역은 2차원 쉘요소로 모델링하여, 이들을 동시에 사용하기 위한 p-수렴 결합요소(p-convergent coupling element)를 제안한다. 2차원 영역은 Ahmad(1970)가 제안한 퇴화 쉘요소(degenerated shell element)에 기초를 두고 두께방향으로 C_z^1-함수이론(Rohwer 등, 2005)을 적용한 p-수렴 등가단층 쉘요소(equivalent-single-layer shell element; ESSE)를 사용한다(우광성 등, 2004). 또한 3차원 영역에서는 솔리드요소와 비교하여 자유도를 상당히 줄인 부분-선형 층별분리 이론을 적용한 요소(partial-linear layerwise element; PLLE)를 사용하여, 면내변위의 두께방향으로의 층간의 관계는 선형으로 가정을 하며, 두께방향으로의 변위는 일정하다는 가정을 사용함으로써, 평면응력(plane stress) 조건을 사용할 수 있도록 하였다. 또한, 2차원, 3차원 및 연결요소 부분 모두 p-세분화 기법을 사용하여 모델링의 간략화를 도모하였으며, p-세분화 기법에 자주 사용하는 계층적 성질을 가지는 적분형 르장드르 함수를 형상함수로 채택하였다. 본 논문에서는 재료적 성질을 등방성이라는 가정을 사용하여 요소를 정식화한다. 하지만, 본 연구에서 언급되는 모든 요소들은 직교이방성(orthotropic or transversely isotropic) 및 시간의존성(time-dependent)을 가지는 재료에 직접적으로 확장 가능하다. 요소의 검증을 위한 예제로서, 요소들의 특성을 파악하기 위하여 축력 및 휨을 받는 일정한 단면을 가지는 평판 부재에 대하여 해석을 시행한다. 더 나아가서, 두께가 두꺼운 솔리드 시스템과 두께가 매우 얇은 평판 부재가 결합되어진 시스템을 위하여 제안되어지는 요소들을 사용하여 해석한 후, 참고문헌 및 기존의 고체요소의 결과들과 비교하였다.

2. *p*-수렴 결합요소의 정식화

2.1 등가단층 쉘요소(ESSE)

등가단층 쉘요소(equivalent-single-layer shell element; ESSE)는 막변형에너지에 관해서는 평면응력을 가정하고, 휨변형 및 두께방향의 전단변형 에너지에 관해서는 Mindlin 평판이론에 근거한 일차전단변형 이론을 이용하며, 총 변형에너지에 관한 강성행렬을 두께 방향으로 여러 개의 층을 나누어서 따로 계산한 후, 산술적으로 합한다. 이와 같은 방법은 3차원상의 응력 및 변형률 조건들을 층의 전체 두께에 대한 중립면에서의 거동으로 표현될 수 있도록 2차원으로 차원을 줄이는 감차(dimension reduction or degeneration) 시키는 방법이다. 그래서 두께방향으로의 각 층의 중립면에 응력점이 존재하게 되지만, 자유도의 개수는 일반적인 쉘요소와 동일하다. 그래서 절점당 자유도는 5 자유도가 되며, 임의의 절점(k)에서 3개의 직선변위(u^k, v^k, w^k) 그리고 2개의 회전변위(α^k, β^k)가 존재한다. 이와 같은 퇴화 쉘요소(degenerated shell element)에 기초를 둔 등가단층 쉘요소의 경우에는 기본적인 가정에서는 일반적인 쉘요소와 유사하지만, 강성도 행렬 구성시에 일반적인 쉘요소에서는 8×8 강성행렬이 필요하지만, 퇴화 쉘요소에서는 강성도 행렬의 크기가 5×5 행렬이 되어서, 강성도 행렬의 크기를 줄일 수 있는 장점을 가지고 있다. 기하형상(좌표)의 표현은 각 요소의 4개의 꼭지점 모드(vertex mode)를 갖고서, 선형 라그랑지 다항식을 이용하여 표현을 하고, 변위장의 표현은 식 (1)과 같으며, 사용되는 모드는 고차형상함수를 사용하기 때문에 통상 4개 이상의 모드를 사용하는 저매개변수요소(sub-parametric element) 개념이 적용된다.

$$
\begin{aligned}
u(x,y,z) &= \sum_{k=1}^{n}[\Psi^k(\xi,\eta)u^k + \Psi^k\zeta\frac{h^k}{2}(r_x^k\alpha^k - s_x^k\beta^k)] \\
v(x,y,z) &= \sum_{k=1}^{n}[\Psi^k(\xi,\eta)v^k + \Psi^k\zeta\frac{h^k}{2}(r_y^k\alpha^k - s_y^k\beta^k)] \\
w(x,y,z) &= \sum_{k=1}^{n}[\Psi^k(\xi,\eta)w^k + \Psi^k\zeta\frac{h^k}{2}(r_z^k\alpha^k - s_z^k\beta^k)]
\end{aligned}
\tag{1}
$$

여기서, n은 해당요소에서의 절점의 총 개수를 나타내며, 임의의 절점 k에서의 벡터, $\overrightarrow{r^k}=[r_x^k, r_y^k, r_z^k]$는 절점의 두께 방향 벡터와 직교하고, 전체좌표계 xz-평면에 평행한 벡터를 의미한다. 또한, 벡터 $\overrightarrow{s^k}=[s_x^k, s_y^k, s_z^k]$는 두께 방향 벡터에 대해서 벡터 $\overrightarrow{r^k}$를 외적(cross product)한 벡터이다. Ψ는 2차원 계층적 형상함수(hierarchical shape function)를 의미하며, ξ, η, ζ는 서로 독립적인 3차원 자연좌표계를 의미한다. Ψ를

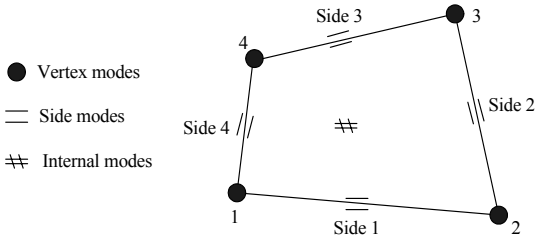


그림 1 계층적 형상함수의 구성

정의하기 위해서, 먼저 계층적 성질과 직교성을 가지는 일차원 적분형 르장드르 다항식은 다음과 같이 정의된다.

$$
\begin{aligned}
T^{i+1}(\xi) &= \sqrt{\frac{2i-1}{2}}\int_{-1}^{\xi}\frac{1}{2^{i-1}(i-1)!}\frac{d^{i-1}}{dw^{i-1}}(w^2-1)^{i-1}dw \\
& \quad i=2,3,4... \\
T^1(\xi) &= \frac{1-\xi}{2} \qquad T^2(\xi) = \frac{1+\xi}{2}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

사용되는 2차원 계층적 형상함수는 식 (2)에서 정의된 형상함수에 의해서 정의되는데, 사용되는 저매개변수요소는 그림 1과 같이 3개의 모드로 구성된다.

꼭지점 모드(vertex modes)는 일반적으로 많이 사용되어지는 선형 라그랑지 요소와 동일하며, 사용되어지는 임의의 형상함수 차수 p에서의 주변 모드(side modes)는 식 (3)과 같이 정의된다.

$$
\begin{aligned}
\Psi_1^i(\xi,\eta) &= T^1(\eta)\,T^{i+1}(\xi) \\
\Psi_2^i(\xi,\eta) &= T^2(\xi)\,T^{i+1}(\eta) \\
\Psi_3^i(\xi,\eta) &= T^2(\eta)\,T^{i+1}(\xi) \qquad 2 \le i \le p \\
\Psi_4^i(\xi,\eta) &= T^1(\xi)\,T^{i+1}(\eta)
\end{aligned}
\tag{3}
$$

여기에서 사용되는 형상함수 Ψ에서의 아래첨자는 그림 1에서의 주변 모드 번호를 가리킨다. 그리고 형상함수의 차수가 4차 이상에서 발생되는 내부 모드(internal modes or bubble modes)는 주변 모드와 유사하게 $T^i(\xi)\,T^j(\eta)$로 계산되어 질 수 있으며, 여기에서 i와 j는 3이상의 양의 정수를 가지며, $i+j=p+2$를 만족시켜야 한다. 그래서 이러한 조건을 만족시키는 모든 형상함수는 임의의 p 차수에서의 내부 모드로 사용될 수 있다.

2.2 부분-선형 층별 요소(PLLE)

그림 2와 같은 적층평판을 해석하기 위해서 일반적인 층별이론에서는 각 층의 변위장을 분리하여 정의를 한다. 부분-선형 층별요소(PLLE: partial-linear layerwise element)에서

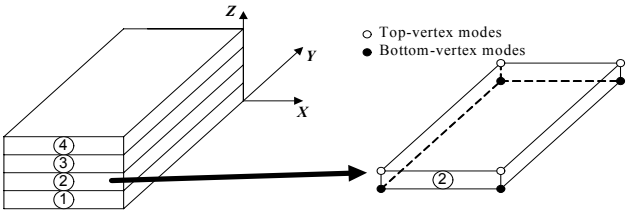


그림 2 적층평판 해석을 위한 임의의 층에서의 꼭지점 모드

는 각 층의 횡수직변형이 존재하지 않는다는, 즉 적층의 두께방향으로의 면외변형(out-of-plane action)이 선형이라는 가정을 사용하여 임의의 층에서의 변위장을 다음과 같이 정의한다.

$$u(x,y,z)=\sum_{k=1}^{n}\Psi^k(\xi,\eta)\,T^k(\zeta)u^k$$
$$v(x,y,z)=\sum_{k=1}^{n}\Psi^k(\xi,\eta)\,T^k(\zeta)v^k \qquad (4)$$
$$w(x,y,z)=\sum_{k=1}^{m}\Psi^k(\xi,\eta)w^k$$

여기서, m은 앞에서 정의 내린 n과 마찬가지로 하나의 요소에서, 즉 임의의 층에서 사용되어지는 절점 개수를 의미하며, 층별이론에서는 n과 m이 동일하지 않을 수도 있다. 사용되어지는 모든 형상함수는 퇴화 쉘요소에서 언급한 형상함수와 동일하며, 1차원 형상함수를 나타내는 T는 선형뿐만 아니라 2차 이상의 고차함수를 사용할 수 있다. h-수렴방식에 기초하여 부분층별이론을 사용한 문헌(Owen 등, 1987)에서는 T에서 선형함수를 사용한 결과와 2차 함수를 사용한 결과를 비교하였는데, 2차 함수를 사용하는 경우 계산량이 상당히 증가함에도 불구하고 결과값에 대한 향상은 거의 없음을 보이고 있다. 그래서 본 연구에서는 T를 선형으로 가정하여, n과 m을 동일값으로 하여 임의의 층에서의 변위장을 다음과 같이 정의한다.

$$u(x,y,z)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\Psi^{k(\xi,\eta)}}{2}[(1-\zeta)u^k_{bottom}+(1+\zeta)u^k_{top}]$$
$$v(x,y,z)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\Psi^{k(\xi,\eta)}}{2}[(1-\zeta)v^k_{bottom}+(1+\zeta)v^k_{top}] \qquad (5)$$
$$w(x,y,z)=\sum_{k=1}^{n}\Psi^k(\xi,\eta)w^k$$

2.3 쉘요소와 층별요소의 연결을 위한 결합요소(CSLE)

그림 3은 부분층별요소와 등가단층요소를 하나의 시스템 안에서 동시에 사용하기 위한 서로 다른 2가지 모델의 경계에서의 결합요소(CSLE: coupling element for shell and layerwise element)중 하나를 도식적으로 보이고 있다. 저

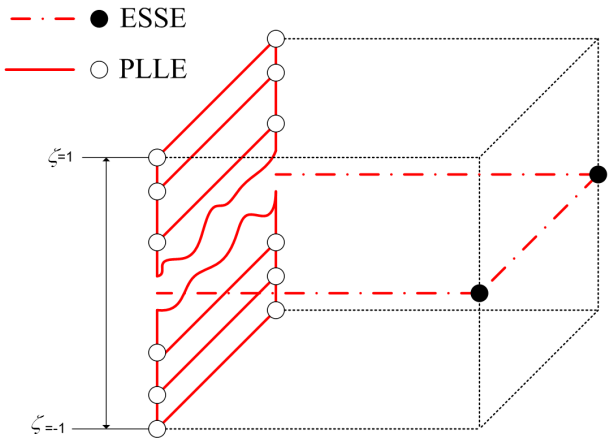


그림 3 등가단층 쉘요소와 부분-선형 층별 요소를 연결할 수 있는 결합요소

매개변수 요소에서 사용되는 꼭지점 모드와 주변 모드는 그림 3에 나타내는 바와 같고, 내부 모드의 경우에는 계산의 경제성을 위해서 등가단층 이론을 적용한다. 결합요소의 변위장은 다음과 같이 정의된다.

$$u(x,y,z)=\sum_{k=1}^{a}\frac{\Psi^{k(\xi,\eta)}}{2}[(1-\zeta)u^k_{bottom}+(1+\zeta)u^k_{top}]$$
$$+\sum_{k=1}^{b}[\Psi^k(\xi,\eta)u^k+\Psi^k\zeta\frac{h^k}{2}(r^k_x\alpha^k-s^k_x\beta^k)]$$
$$v(x,y,z)=\sum_{k=1}^{a}\frac{\Psi^{k(\xi,\eta)}}{2}[(1-\zeta)v^k_{bottom}+(1+\zeta)v^k_{top}]$$
$$+\sum_{k=1}^{b}[\Psi^k(\xi,\eta)v^k+\Psi^k\zeta\frac{h^k}{2}(r^k_y\alpha^k-s^k_y\beta^k)]$$
$$w(x,y,z)=\sum_{k=1}^{a}\Psi^k(\xi,\eta)w^k+\sum_{k=1}^{b}[\Psi^k(\xi,\eta)w^k$$
$$+\Psi^k\zeta\frac{h^k}{2}(r^k_z\alpha^k-s^k_z\beta^k)]\ ;\ n=a+b \qquad (6)$$

2.4 응력 및 변형률 관계

부분층별이론과 등가단층이론 모두 횡수직응력은 무시되어지기 때문에, 2차원, 3차원 영역 및 이들 영역을 연계시키는 결합요소 부분에서도 동일하게 평면응력 조건이 적용된다. 전체 좌표계 X, Y, Z에 대한 응력 변형률의 관계는 다음과 같다.

$$\sigma_{x,y,z}=\overline{D}\left\{\epsilon_{x,y,z}-\epsilon^o_{x,y,z}\right\} \qquad (7)$$

여기서,

$$\epsilon_{x,y,z} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ u_{,y}+v_{,x} \\ u_{,z}+w_{,x} \\ v_{,z}+w_{,y} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

$\epsilon^{o}_{x,y,z}$는 초기 변형률을 나타내며, 재료적 성질을 등방성으로 가정한 강성행렬 $\overline{D}$는 다음 식과 같다.

$$\overline{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{55} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$D_{11} = D_{22} = \frac{E}{1-\mu^2} \quad D_{12} = \frac{E}{1-\mu} \quad D_{33} = D_{44} = D_{55} = G$$

3. 수치해석 예제

3.1. 인장 축력 또는 휨을 받는 캔틸레버 평판

제안되는 요소들의 검증을 위해서, 그림 4와 같은 인장력 또는 휨을 받는 평판문제를 해석하였다. 탄성계수 값은 E=300GPa이며, 프아송 비는 ν=0으로 설정하였다. 검증을 위한 모델은 총 4개로 설정을 하였으며, 모든 모델에 대해서 X축 방향으로는 크기를 균등하게 분배하였다. 그림 5~8은 각 모델에서의 요소망을 나타내고 있다. 각 그림에 있는 원은 꼭지점 모드를 나타내고 있으며, 흰색 원은 3차원 모델링에 관련된 꼭지점 모드를 나타내고, 검은색 원은 2차원 모델링에 관련된 꼭지점 모드를 나타내고 있다. 또한 실선은 3차원 모델링에 관련된 주변 모드를 나타내고, 점선은 2차원 모델링에 관련된 주변 모드를 나타내며, 형상함수 4차 이상에서 자동으로 생성되는 내부 모드는 그림에서 생략하였다. Model A는 3차원 모델인 PLLE만을 가지고서 모델링한 경우이며, 그림 5는 Model A의 1개의 층으로 모델링한 경우와 2개의 층으로 모델링한 경우를 각각 나타내고 있다.

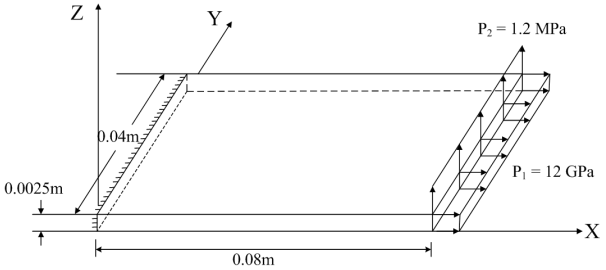
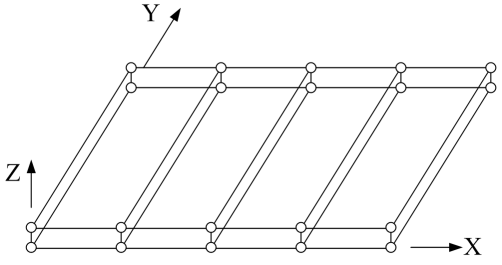
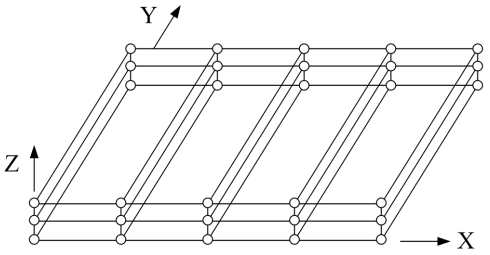


그림 4 인장 또는 휨을 받는 캔틸레버 평판

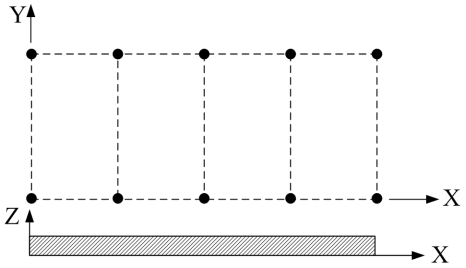


(a) 1개의 층으로 모델링

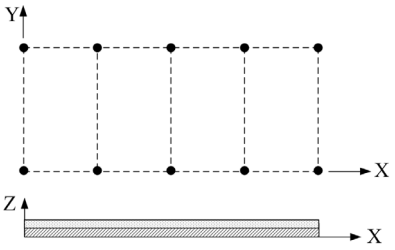


(b) 2개의 층으로 모델링

그림 5 Model A의 요소망



(a) 1개의 층으로 모델링



(b) 2개의 층으로 모델링

그림 6 Model B의 요소망

Model B는 2차원 모델인 ESSE만을 가지고서 모델링한 경우이며, 그림 6은 Model B의 1개의 층으로 모델링한 경우와 2개의 층으로 모델링한 경우를 각각 나타내고 있다. Model C는 2차원 모델과 3차원 모델이 혼합된 요소인 CSLE만으로 모델링한 경우이며, 이와 관련된 요소망은 그림 7에 나타나있다. Model D는 CSLE을 가지고서 ESSE와 PLLE를 연결한 형태이고, 이와 관련된 요소망은 그림 8에 나타나 있다.

표 1은 P_1 하중이 작용하는 경우, 즉 부재의 면내 거동

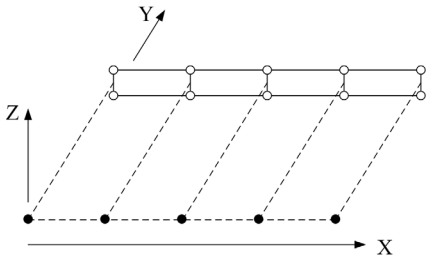


그림 7 Model C의 요소망

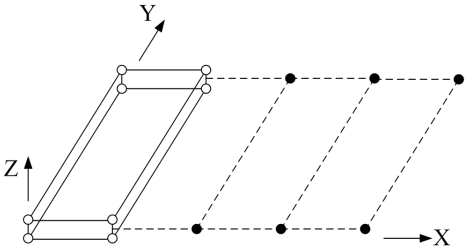


그림 8 Model D의 요소망

표 1 P_1 하중이 작용하는 경우 각 지점의 변위값($\times 10^{-4}$m)

x 좌표	정해	Model A 〔1,0〕	Model B 〔0,1〕	Model C 〔1,1〕	Model D 〔1,1〕
0.02m	8.0	8.0	8.0	8.0	8.0
0.04m	16.0	16.0	16.0	16.0	16.0
0.06m	24.0	24.0	24.0	24.0	24.0
0.08m	32.0	32.0	32.0	32.0	32.0

시에 각 지점에서 발생하는 변위값을 나타내고 있으며, 모든 모델에 대해서 동일한 값이 나오고 있다. 또한 축력 방향의 응력값 또한 모든 모델에서 평판 전체에 걸쳐서 12GPa 으로 균일하게 나왔다. 표 1에 표시되어 있는 〔*,*〕 기호의 앞의 숫자는 PLLE 모델과 관련되어진 층수를 의미하고, 뒤의 숫자는 ESSE 모델과 관련된 층수를 의미한다.

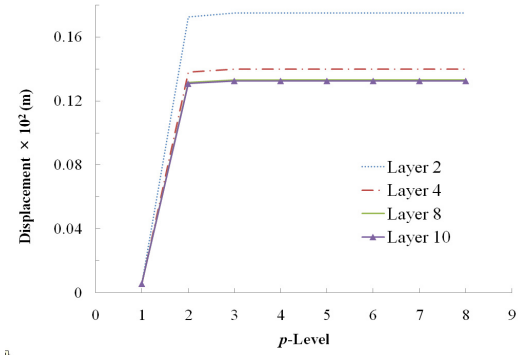
표 2는 P_2 하중이 작용하는 경우, 부재의 휨거동 시에 각 지점에서 발생하는 처짐값을 나타내고 있다. Model A의 경우 층수와 상관없이 정해와 일치함을 나타내고 있으며, 2차원 모드가 존재하는 Model B~D의 경우에는 층의 수에 따라서 값이 바뀌고 있으며, 두 층을 사용하는 경우보다 세 층을 사용하는 경우, 해의 개선효과가 있음을 알 수 있다. 2차원 모델과 관련된 요소의 경우, 두께 방향으로 층의 수만큼 가우스 적분점이 존재 한다 그래서 막내 변형 에너지를 계산하는 경우에는 층의 수를 하나만 사용하여도 충분하지만, 휨 변형 에너지의 경우에는 두께 방향으로 가우스 적분점이 하나만 존재하면, 휨 변형에 대한 에너지가 전혀 계산되지 않는 관계로, 두께 방향으로 최소한 둘 이상의 층이 모델링 될 필요가 있다. 그림 9에서는 ESSE 또는 CSLE이 사용되어

표 2(a) P_2 하중이 작용하는 경우 각 지점의 변위값($\times 10^{-4}$m)

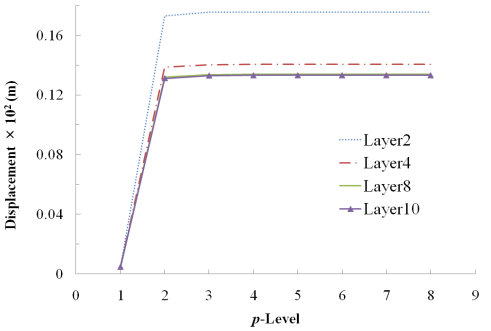
x 좌표	정해	Model A		Model B	
		〔1,0〕	〔2,0〕	〔0,2〕	〔0,3〕
0.02m	1.13	1.13	1.13	1.50	1.27
0.04m	4.10	4.10	4.10	5.47	4.61
0.06m	8.30	8.30	8.30	11.07	9.34
0.08m	13.11	13.11	13.11	17.48	14.75

표 2(b) P_2 하중이 작용하는 경우 각 지점의 변위값($\times 10^{-4}$m)

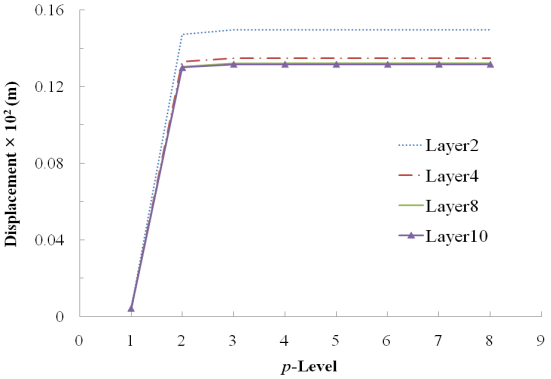
x 좌표	정해	Model C		Model D	
		〔1,2〕	〔1,3〕	〔1,2〕	〔1,3〕
0.02m	1.13	1.51	1.27	1.13	1.13
0.04m	4.10	5.48	4.62	4.37	4.20
0.06m	8.30	11.12	9.38	9.26	8.66
0.08m	13.11	17.57	14.82	14.96	13.81



(a) Model B



(b) Model C



(c) Model D

그림 9 P_2 하중이 작용하는 경우 x=8m에서의 처짐값에 대한 수렴성 테스트

지는 경우, 형상함수의 차수를 증가시키는 것과 아울러, 층의 수를 늘림으로써 값이 점점 수렴되고 있음을 보여주고 있으며, 표 2에서의 정해값과 거의 유사함을 알 수 있다.

3.2 응력특이를 가지는 부재

이번 예제에서는 결합요소의 적용성을 확장하여 그림 10과 같은 응력특이를 가지는 두께가 두꺼운 부재에 얇은 평판이 연결되어 있는 캔틸레버 문제를 고려하고자 한다. 재료 물성치는 앞의 예제와 동일하고, 유한요소 모델은 그림 11과 같다. 제안되어지는 모델의 검증을 위해 쉘요소로만 모델링한 2차원 모델(Surana 1980)과 ANSYS의 SOLID 45 요소로만 구성된 3차원 모델링에 의한 결과값들과 비교된다.

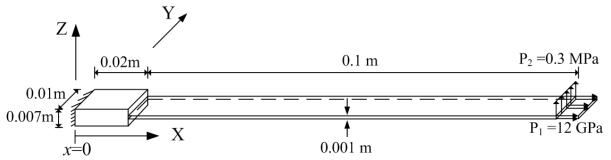


그림 10 응력특이를 가지는 부재의 형상

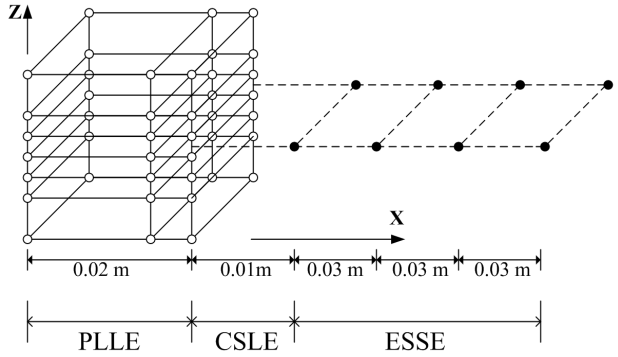


그림 11 결합요소를 사용한 유한요소 모델

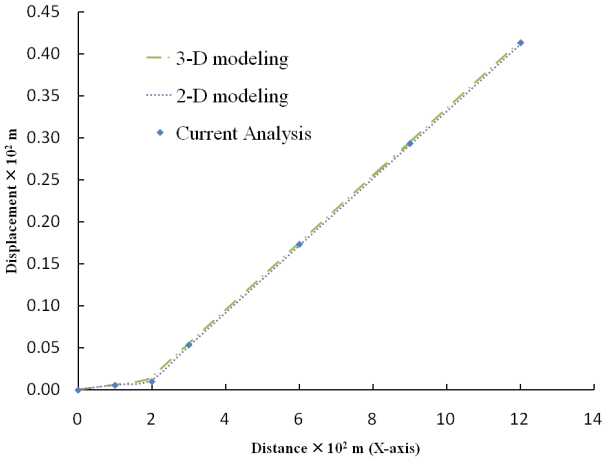
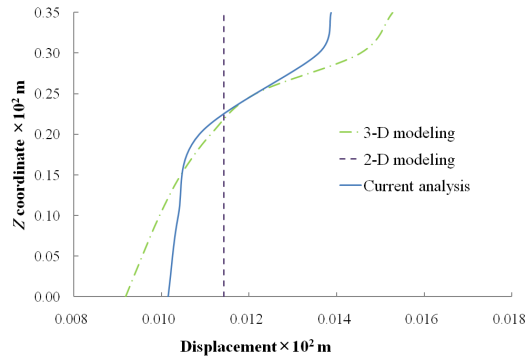
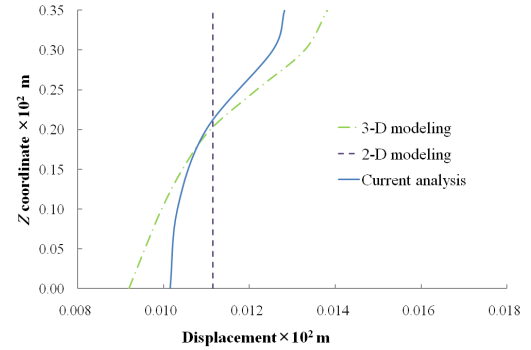


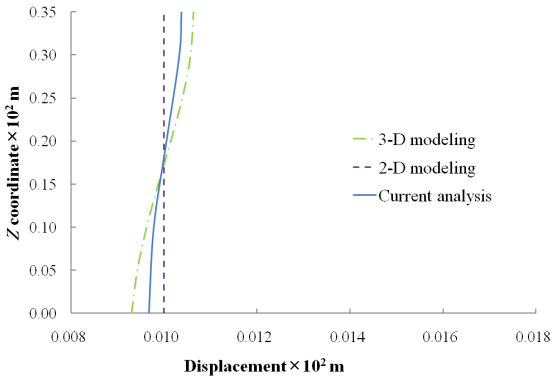
그림 12 P_1하중이 작용하는 경우 X-축 방향 길이에 따른 변위값(u)



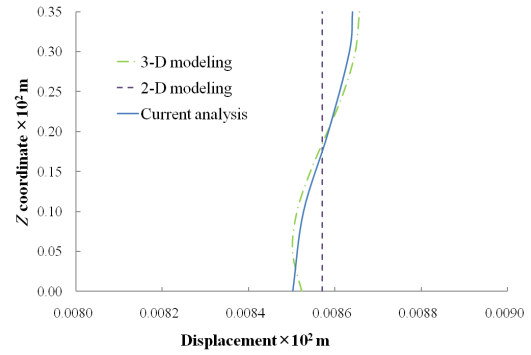
(a) x =0.02m



(b) x =0.0195m



(c) x =0.0175m



(d) x =0.015m

그림 13 인장하중이 작용하는 경우 솔리드 내의 각 지점에서의 두께에 따른 변위값

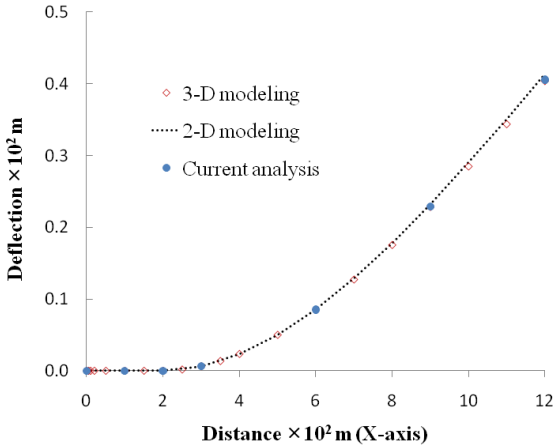
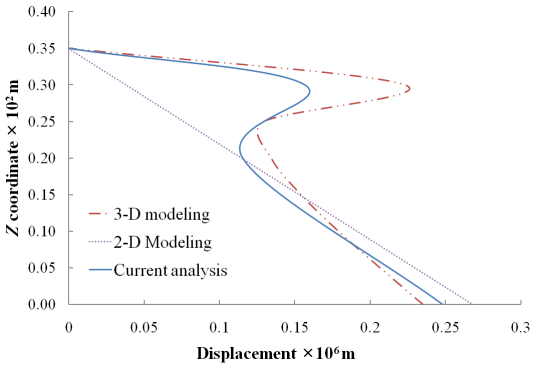


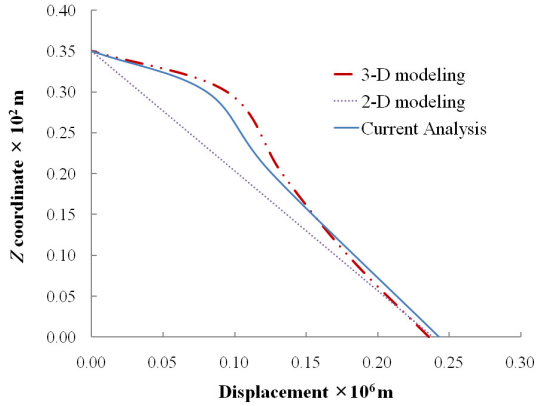
그림 14 P_2하중이 작용하는 경우 각 위치에서의 처짐량

그림 12는 인장하중(P_1)이 작용하는 경우 그림 10에서의 X축을 따라 변화하는 부재 두께의 중앙에서의 X축방향으로의 변위값을 나타내고 있다. 그림 12에서 보듯이 2차원 모델, 3차원 모델 및 결합요소를 사용한 모델 세 가지 모델 모두 거의 차이가 없음을 알 수 있다. 한편, 일반적으로 두께가 심하게 변하는 곳을 가지는 부재의 경우에는 두께 방향으로 변위의 변화가 심하게 일어나는 것으로 알려져 있다(Surana, 1980). 그림 13은 두께의 변화가 일어나는 지점(x=0.02m) 및 그 근처에서의 두께 방향의 변위 양상을 나타내고 있다. 일반적인 솔리드요소를 가지고서 모델링 경우에는 두께가 급격하게 변화하는 지점(x=0.02m)에서 변위가 심하게 변화하는 것을 잘 표현해 주고 있으며, 2차원 쉘요소만을 가지고서 모델링한 경우에는 전혀 이와 같은 거동을 표현할 수 없음을 알 수 있다. 제안되어지는 모델은 비교적 두께방향의 변위양상을 잘 표현해 주고 있으며, x=0.02m 지점에서 멀어질수록 3차원 모델과 유사한 거동을 하는 것을 알 수 있다. 하지만, 솔리드요소의 거동과 정확하게 일치하지 않는 이유는 결합요소가 가지는 오차에 대한 영향보다는 솔리드 부분에 사용되어지는 PLLE모델이 평면응력의 가정을 사용하는 관계로 두께가 급격하게 변화하는 곳에서는 어느 정도의 오차가 유발된다고 볼 수 있다.

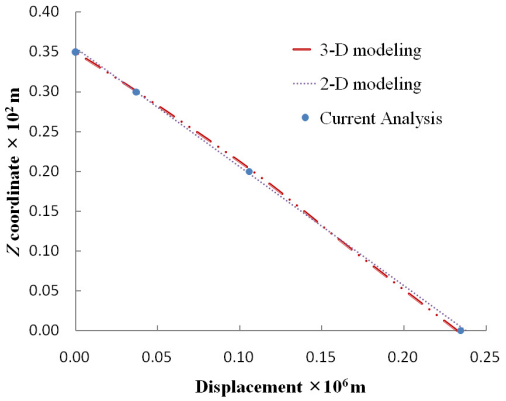
그림 14는 휨하중이 작용하는 경우 두께의 중앙 부분에서의 x축 길이에 따른 처짐량에 대한 그래프이다. 앞에서의 면내거동과 마찬가지로 2차원 모델, 3차원 모델 및 제안되어지는 모델 3가지 모두 거의 차이가 없음을 알 수 있다. 그림 15는 두께가 변화하는 지점(x=0.02m) 및 그 근처에서의 x축 방향에 대한 변위값을 나타내고 있다. 면내 거동과 마찬가지로, 두께가 변화하는 지점에서의 두께에 대한 변위 양상이 심하게 변화하는 것을 알 수 있으며, 쉘 부재의 연결이 시작되는 지점(z=0.003m)에서 변위값이 심하게 변화하는



(a) x=0.02m



(b) x=0.0195m



(c) x=0.0175m

그림 15 휨이 발생하는 경우 솔리드 내의 각 지점에서의 두께에 따른 면내 변위값

것을 알 수 있다. 이 또한 2차원 모델에서는 제대로 표현할 수 없음을 알 수 있으며, 제안되는 모델에서는 비교적 3차원 모델과 유사한 거동을 나타내고 있다.

4. 결론 및 고찰

본 연구에서는 3차원 및 2차원 유한요소 모델이 동시에 필요한 경우, 효율적인 해석을 위한 결합요소를 제안하였다. 3차원 탄성이론을 가정하여 해석할 필요가 있을 때 전체 시

스템을 모두 3차원으로 모델링하는 것은 상당히 비경제적인 모델링 방법이며, 유한요소 해석 시에 필히 고려되는 형상비를 고려한다면, 훨씬 더 많은 컴퓨터 자원을 필요로 하며, 이는 최근에 그 활용범위가 넓어지는 대형 구조물 해석시에 효율성이 급격히 떨어 질 수밖에 없다. 본 연구에서는 부분적인 3차원 모델과 2차원 모델을 동시에 사용하여 계산의 효율성을 높이면서도, 3차원 해석의 결과와 유사한 거동을 할 수 있는 모델을 제안하여, 그 적용성을 몇 가지 기본 예제를 가지고서 살펴보았다. 또한 모델링의 간편성을 위해서 *p*-세분화 기법을 사용하였다. 향후 제안되어지는 모델을 기초로 한 적층평판 정적 및 동적해석에 대한 확장이 가능하다고 판단된다.

감사의 글

이 연구는 2008학년도 영남대학교 학술연구조성비에 의한 것 임.

참 고 문 헌

안재석, 우광성 (2009) 직교이방성 적층구조 해석을 위한 부분-선형 층별이론에 기초한 저매개변수요소, 한국전산구조공학회 논문집, 22(2), pp.189~196.

우광성, 안재석, 박진환 (2004) p-Version 비선형 유한요소 모델링과 실험적 검증에 의한 팻취 보강된 RC보와 슬래브의 극한강도 산정, 한국전산구조공학회 논문집, 17(4), pp.375~387.

Ahmad, S., Irons, B.M., Zienkiewicz, O.C. (1970) Analysis of thick and thin shell strucutres by curved finite elements, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 2, pp.419~451.

Davila, C. (1994) Solid-to-shell transition elements for the computation of interlaminar stresses, *Computing Systems in Engineering*, 5(2), pp.193~202.

Feng, W., Hoa, S.V. (1998) Partial hybrid finite elements for composite laminates, Finite Elem. Anal. Des. 30, pp.365~382.

Garusi, E., Tralli, A. (2002) A hybrid stress-assumed transition element for solid-to-beam and plate-to-beam connections, *Comput. Struct.*, 80, pp.105~115.

Knight, N.F. Jr., Ransom, J.B, Griffin, O.H. Jr., Thompson, D.M. (1991) Global/local methods research using a common structural analysis framework, *Finite Elem. Anal. Des.*, 9(2), pp.91~112.

Liao, C.L., Reddy, J.N., Engelstad, S.P. (1988) A solid-shell transition element for geometrically nonlinear analysis of composite strucutres, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 26, pp.1843~1854.

Mao, K.M., Sun, C.T. (1991) A refined global-local finite element analysis method, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 32(1), pp.29~43.

Owen, D.R.J., Li, Z.H. (1987) A refined analysis of laminated plates by finite element displacement methods-I. fundamentals and static analysis, *Comput. Struct*, 26(6), pp.907~914.

Rohwer, K., Friedrichs, S., Wehmeyer, C. (2005) Analyzing laminated structures from fibre-reinforced composite materialan assessment, *Technische Mechanik*, 25(1), pp.59~79.

Surana, K.S. (1980) Transition finite elements for three-dimensional stress analysis, Int. *J. Numer. Methods Eng.*, 15, pp.991~1020.

Thompson, D.M., Griffin, O.H. (1990) 2-D to 3-D global/local finite element analysis of cross-ply composite laminates, *J. Reinf, Plast. Compos.*, 9, pp.492~502.

Whitcomb, J.D., Woo, K. (1993) Application of iterative global/local finite element analysis Part 1: Linear analysis, *Commun. Numer. Methods Eng.*, 9(9), pp.746~756.