요소 연결 매개법을 이용한 선형 구조물의 동적 컴플라이언스 최적화

Element Connectivity Based Topology Optimization for Linear Dynamic Compliance

윤 길 호†
Yoon, Gil-Ho
(논문접수일 : 2009년 3월 27일 ; 심사종료일 : 2009년 5월 25일)

요 지

본 연구 논문에서는 요소 연결 매개법(Element Connectivity Parameterization Method)을 이용하여 선형 구조물의 동적 컴플라이언스(Dynamic compliance)를 최소화하는 위상을 설계하는 기법을 연구한다. 기존의 밀도를 기반으로 한 위상최적화기법은 각 유한 요소의 탄성계수를 각 요소에 정의되어 있는 설계변수(Design Variable)를 이용하여 위상최적화를 수행한다. 이 방법은 현재까지 많은 선형구조문제에 적용되었지만 비선형 문제와 멀티피직스 시스템에서 수치적인 문제점이 보고되었다. 이런 문제점을 근본적으로 해결하기 위하여 최근에 요소 연결 매개법(Element Connectivity Parameterization Method)이란 새로운 최적화 기법이 개발되었다. 이 새로운 설계 방법은 요소의 강성을 설계하는 것이 아니라 요소의 연결성을 설계하는 기법으로 이를 이용하여 비선형 구조물이나 멀티피직스 시스템의 위상최적화를 효과적으로 수행할 수 있다. 하지만, 아직까지 질량 행렬의 정의에 대한 모호함으로 인하여 동적인 구조물의 최적화에 대한 연구가 많이 이루어지지 않았다. 이런 문제점을 해결하기 위하여 요소 연결 매개법에서 질량행렬을 정의하는 방법을 연구하며, 이를 이용하여 선형 구조물의 동적 컴플라이언스(Dynamic Compliance)를 고려한 위상최적화 문제에 적용하여 제안된 방법을 검증하였다.

핵심용어 : 요소 연결 매개법, 위상최적화, 동적 컴플라이언스

Abstract

This paper studies the Element Connectivity Parameterization Method(ECP method) for topology optimization considering dynamic compliance. The previous element density based topology optimization method interpolates Young's modulus with respect to design variables defined in each element for topology optimization. Despite its various applications, these element density based methods suffer from numerical instabilities for nonlinear structure and multiphysics systems. To resolve these instabilities, recently a new numerical method called the Element Connectivity Parameterization(ECP) Method was proposed. Unlike the existing design methods, the ECP method optimizes the connectivities among plane or solid elements and it shows some advantages in topology optimization for both nonlinear structure and multiphysics systems. In this study, the method was expanded for topology optimization for the dynamic compliance by developing a way to model the mass matrix in the framework of the ECP method.

Keywords : *element connectivity parameterization method, topology optimization, dynamic compliance*

1. 서 론

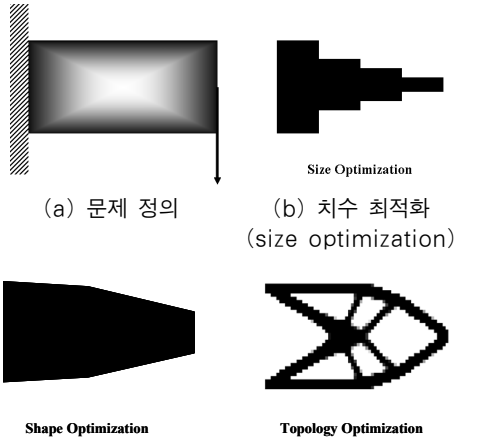
위상최적화(Topology optimization)는 구조물의 설계 영역(Design domain)에 주어진 제한 조건(Constraint)를 만족시키며 목적함수(Objective function)을 최대화하거나 최소화하는 최적의 위상(Topology, layout)을 가지는 구조를 수치적인 방법을 통하여 구하는 구조 최적화(Structural optimization)기법 중의 하나이다. 이 위상최적화 설계(Topology optimization)는 1980년도 후반에 Bendsoe와 Kikuchi가 제안한 후에 음향-구조, 전기-구조 연성, 자기장 문제 등 여러 가지 물리계와 최적화문제에 적용되어 왔다(Bendsoe 등, 2003; Yoon 등, 2007; 2008; Choi 등,

† 책임저자, 정회원 · 경북대학교 기계공학부 전임강사
Tel: 056-950-6570 ; Fax: 056-950-6550
E-mail: ghy@knu.ac.kr

• 이 논문에 대한 토론을 2009년 8월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2009년 10월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

2008; Yoon, 2009). 이 위상최적 설계는 기존의 구조최적화 방법인 치수최적화(Size optimization)나 형상최적화(Shape optimization)와 대비하여 초기 위상(Initial topology)이 필요하지 않으며 치수와 형상최적화와 비교하여 더 뛰어난 성능을 가지는 위상을 설계할 수 있다는 강점이 있다. 예를 들어 아래 그림 1(a)와 같은 경계조건과 하중이 존재할 때 그림 1(b, c)와 같이 설계 영역의 한계가 있는 기존의 치수최적화나 형상최적화와 다르게 위상최적화는 그림 1(d)에서 볼 수 있듯이 초기 위상과는 많이 다른 구조물을 얻을 수 있다. 이 위상최적화를 수행하기 위하여 설계변수(Design variable)를 매개화하는 방법에는 크게 두 가지 방법이 있는데 대표적인 방법으로 균질화법을 이용한 위상최적화(Homogenization method based topology optimization) 기법이고 나머지는 가상재료를 이용한 위상최적화 기법(Artificial material method, Solid Isotropic Material with Penalization(SIMP))이 있다(Bendsoe 등, 2003; Choi 등, 2008). 또한 최근에는 레벨셋 기반의 최적설계 또한 연구되고 있다(김민근 등, 2008; 하승현 등, 2007).

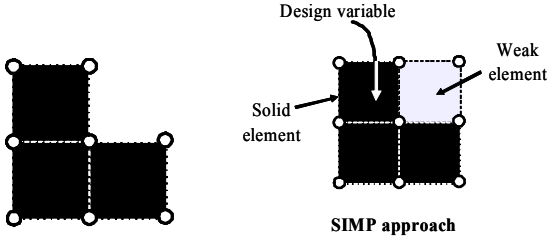
기존의 위상최적화 기법은 선형 구조물에 많이 연구되고 이용되어 왔다. 하지만 비선형 구조물과 멀티 피직스 시스템에 적용할 때 여러 가지 문제가 발생되는 것으로 알려져 있다(Cho 등, 2003; Yoon 등, 2005a,b; 2007; 2008; Choi 등, 2008). 대표적인 문제점으로 구조물의 탄성계수와 비교하여 아주 약한 강성을 가지는 부분의 요소가 비선형해석 중 외부에서 가해지는 힘으로 인하여 찌그러지는 현상을 발생하고 이 때문에 뉴톤랩손(Newton-Raphson)방법을 통하여 해를 구하지 못한다는 문제점이 알려져 있다(Yoon 등, 2005a; Cho 등, 2003). 밀도법에서 이를 해결하기 위한 방법으로 비선형 해석을 수행할 때 변위를 경계조건으로 해석을 하는 방법



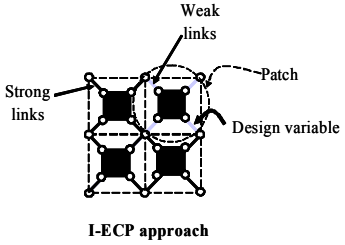
(a) 문제 정의 (b) 치수 최적화 (size optimization)

(c) 형상 최적화 (shape optimization) (d) 위상최적화 (topology optimization)

그림 1 구조 최적화



(a) 모델링 하고자 하는 구조물 (b) SIMP방법으로 모델링



(c) I-ECP방법으로 모델링

그림 2 SIMP방법과 ECP방법의 비교

이 제안되었다(Cho 등, 2003). 또한, 이 문제점을 근본적으로 해결하기 위하여 그림 2에서와 같이 길이가 0인 링크를 사용하여 요소의 연결성을 정의하는 요소 연결 매개법(Element Connectivity Parameterization method; ECP method)이란 위상최적화 기법이 최근에 개발되어 비선형 구조물의 위상최적화에 사용되고 있다(Yoon 등, 2005a,b).

이 새로운 기법은 기존의 위상최적설계 기법과 다르게 설계영역을 분할하는 요소를 서로 물리적으로 분리하고 그 요소 사이를 길이가 0인 링크(link)요소로 연결한다. 그리고 이 링크의 강성을 변화시켜가면서 주어진 위상을 표현하는 새로운 방법이다. 이 방법에서는 설계영역을 분할하는 요소 자체의 강성이 변화하지 않기 때문에 각 요소의 강성을 바꾸는 기존의 위상최적화 기법과 비교하여 요소가 찌그러지는 현상이 적게 일어나고 강성행렬이 양정성(Positive definiteness)이 유지되기에 비선형 구조물에서 해석이 안정되는 수치적인 이점이 보고되었다(Yoon 등, 2005a,b). 링크와 평면 요소와의 관계를 정의하는 방법으로 외부 요소 연결 매개법(External ECP method)와 내부 요소 연결 매개법(Internal ECP method)가 있는데 계산효율의 이점으로 이 논문에서는 내부 요소 연결 매개법만을 사용하고 이 논문에서 요소 연결 매개법은 내부 요소 연결 매개법을 의미한다.

선형 구조물의 고유진동수와 동적 컴플라이언스 해석을 위해서는 강성행렬 뿐만 아니라 질량행렬을 구해야 한다(Diaz 등, 1992; Ma 등, 1993; Pedersen, 2000; Kim 등, 2000; Jog, 2002). 기존의 위상최적설계 기법에서는 유한요소 해석 이론에 의하여 강성행렬과 질량해석이 유한요소 이론

에 의해서 자연스럽게 정의된다. 요소 연결 매개법도 위상을 정의할 때 일차원 링크를 쓴다는 점을 제외하곤 유한요소 이론을 이용하기 때문에 기존의 유한요소 방법과 마찬가지로 강성행렬 구성할 수 있다. 그러나 질량행렬을 구성할 때 일차원의 링크가 질량을 가져야 하는지 그리고 설계영역을 분할하는 요소의 질량 행렬이 어떻게 정식화가 되어야 하는지에 관한 부분이 명확하지 않은 문제점이 있다. 그래서 이 논문에서는 이 주제에 대해서 연구하고 직관적으로 생각할 수 있는 방법의 문제점을 살펴보고, 이를 해결하기 위한 새로운 방법을 제시하였다. 또한, 이를 이용하여 선형구조물의 동적 컴플라이언스 최소화하는 최적의 구조물을 설계하였다.

2. 선형 구조물의 동적 컴플라이언스 해석

2.1 요소 연결 매개법을 위한 새로운 질량 행렬의 개념

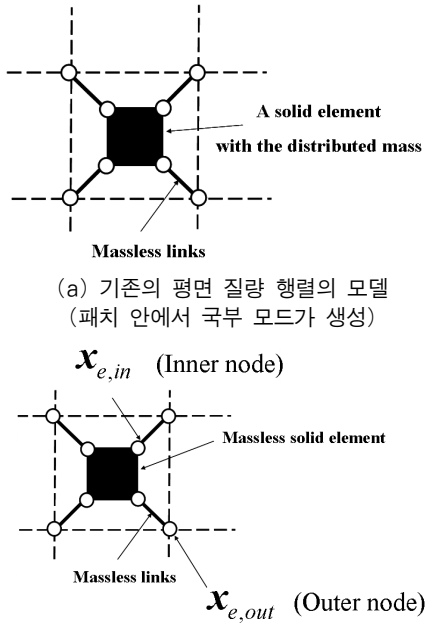
직관적으로 생각할 수 있는 질량행렬구성 방법으로 그림 3(a)와 같이 체적이 0인 링크에는 질량이 없는 것으로 모델링하고, 영역을 분할하는 요소에는 질량이 있다고 간주하는 방법이 있다. 이러한 모델링 방법은 개념적으로 이해가 간단하고 그리고 수식적으로 구현(Implementation)이 간단하다. 하지만, 이 논문에서 여러 수치해석을 통하여 패치(Patch)내에서 솔리드 요소와 링크 사이에 스프링과 질량시스템에서 살펴볼 수 있는 많은 국부적 진동이 관찰되었다. 이런 문제는 특히 링크의 강성이 약한 모든 패치 내에서 국부적인 모드(Local Mode)를 발생시키며, 이는 저차 진동을 고려하는 대부분의 동적 위상 최적화 문제에서 원하지 않는 모드가 최적화되고 최적화 문제가 불안정해지는 수치적인 문제가 발생한다(Pedersen, 2000; Yoon, 2009).

이런 국부 모드의 문제점을 해결하기 위하여 이 논문에서는 그림 3(b)와 같이 새로운 패치 질량 모델(Patch Mass Model)을 제안하였다. 이 패치 질량 모델은 다음의 특성을 가진다(Yoon, 2009).

특징 1. 패치 내부에 정의된 설계 변수와 선형관계가 있는 영역을 분할하는 요소의 질량행렬을 구성함(영역을 분할하는 요소의 강성행렬은 설계 변수와 독립적임).

특징 2. 영역을 분할하는 요소의 질량행렬을 외곽 노드(Outer node)의 자유도(Degrees of freedom)에 어셈블(Assemble)하는 특징이 있음.

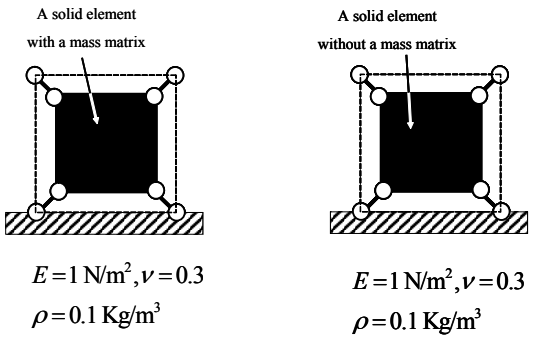
이 패치 질량 모델 방법은 기하 비선형 구조물의 고유 진동수를 최적화하는 문제에 적용되어 그 장점을 보였으며, 이 논문에서는 이 방법을 확장하여 선형 구조물의 동적 컴플라이언스(Dynamic compliance)최소화 문제에 적용하며 그



(a) 기존의 평면 질량 행렬의 모델
(패치 안에서 국부 모드가 생성)

(b) 새롭게 제안된 패취 질량 모델
(Patch Mass Mode; 패치의 국부 모드를 해결)

그림 3 요소 연결 매개법의 질량 행렬에 관련한 모델



(a) A straight model (b) Present Patch Mass model

그림 4 기존의 유한요소 모델과 패치 질량 모델 예제

특성을 살펴본다(Yoon, 2009). 이 새로운 패치 질량 모델을 사용하면 결과적으로 영역을 분할하는 요소가 질량을 가지고 있지 않기 때문에 결과적으로 링크와 영역 분할 요소 사이에 관찰되는 고유진동수가 무한대가 되는 수치 해를 얻게 된다. 그럼으로 위상최적화 과정 중에 발생하는 국부 모드로 인한 여러 가지 수치적인 문제와 최적화 과정에서 생겨나는 문제점들을 해결할 수 있다.

기존의 유한요소 모델과 패치 질량 모델을 수치 해석적으로 자세히 살펴보기 위하여 그림 4에서 한 개의 요소에 대해서 기존의 일반적인 유한요소 기법과 이 패취 질량모델을 이용한 8개의 고유모드를 살펴보았다.

그림 5(a)에서 볼 수 있듯이 그림 3(a)의 기존의 질량 행렬 구성 방법을 사용하면 5번째부터 8번째의 고유 모드가 링

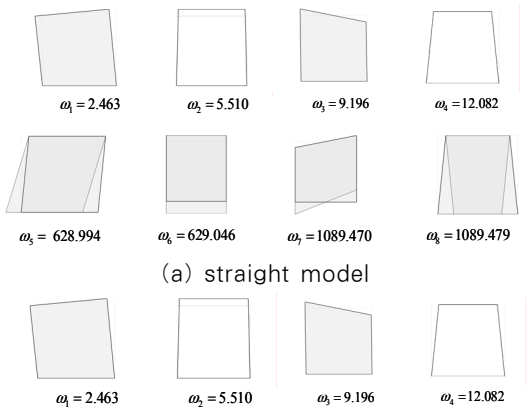


그림 5 한 개의 요소로 이루어진 요소 연결 매개법의 패치에서 고유진동수 비교

크와 패치 내부의 솔리드 요소의 관계에서 발생하는 4개의 고유모드이다. 이 예제에서는 링크의 설계변수가 1이고, 링크의 강성이 영역을 분할하는 요소의 강성보다 크기 때문에 패치내부에서 발생되는 고유모드의 고유 진동수가 상대적으로 크다. 하지만, 비 구조물을 모델링하기 위하여 작은 강성의 링크를 사용하면 이들 모드가 저차모드가 되어 국부 모드 문제가 심각하게 발생된다. 하지만, 그림 5(b)에서 볼 수 있듯이 패취 질량 모델에서는 영역분할 요소의 질량(Mass)이 0이기 때문에 고유진동수가 수치적으로 무한대에 있고, 이런 이유로 최적화과정 중 국부 모드 문제점이 관찰되지 않는다.

2.2 동적 컴플라이언스 정식화

동적 구조시스템의 과도응답을 구하기 위하여 질량, 댐핑, 그리고 강성을 고려한 다음의 이산화된 구성방정식을 유한요소법을 이용하여 수치해석을 한다(Bathe, 1996).

$$M\ddot{X}_t + C\dot{X}_t + KX_t = F_t \tag{1}$$

여기서, 강성행렬과 질량 행렬은 각각 K와 M이고, 댐핑 행렬은 C이다. 시간의 종속적인 변위와 힘은 각각 X_t과 F_t으로 표현되어 진다. 일반적으로 구조물의 동적 컴플라이언스는 조화 외력(Harmonic Force)과 이 때문에 발생하는 구조물의 조화 변위(Harmonic Deflection)의 곱(Product)으로 정의된다. 이를 구하기 위하여 특정한 주파수 영역에서 다음과 같은 구성방정식으로 전개한다.

$$X_t = Xe^{iwt}, F_t = Fe^{iwt} \tag{2}$$

$$C = \alpha M + \beta K \tag{3}$$

$$[-w^2 M + iw(\alpha M + \beta K) + K]X = F \tag{4}$$

여기서, 주파수 영역에서의 힘과 변위를 각각 X와 F로 표현하였다. 그리고, 레일리(Rayleigh) 댐핑 행렬을 모델링하는데 사용되는 질량 행렬과 강성 행렬의 계수를 각각 α와 β를 사용하였다. 또한, 일정 주파수 대역에서의 동적 컴플라이언스(Dynamic compliance)는 다음과 같이 정의할 수 있다(Bathe, 1996; Ma 등, 1993).

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_{\omega_s}^{\omega_e} |(F^T X)| d\omega \\ &= \int_{\omega_s}^{\omega_e} \sqrt{(F^T X_{real})^2 + (F^T X_{imag})^2} d\omega\end{aligned} \tag{5}$$

조화 외력의 크기는 F 이고, 변위의 실수 부분과 허수 부분은 X_{real}과 X_{imag}로 나타내어져 있다. 그리고 가진력과 응답의 진동은 w_s부터 w_e까지 고려하였다. 수치적으로 식 (5)의 적분을 구하기 위해서 일반적으로 균등한 샘플링 간격을 이용한 수치 적분을 사용한다.

2.3 요소 연결 매개법을 이용한 동적 컴플라이언스 정식화

2.3.1 밀도를 이용한 기존 위상최적화

요소 내부에서 정의된 밀도를 이용한 SIMP방법을 이용한 위상최적화에서는 다음과 같이 한 개의 요소에 대하여 강성행렬과 질량행렬을 구성하고 구성방정식을 전개한다.

$$K = \sum_{e=1}^{NE} k_{e,SIMP}(\gamma_e), \ \mathrm{M} = \sum_{e=1}^{NE} m_e(\gamma_e) \tag{6}$$

여기서, NE는 요소의 개수이고, 각 요소의 강성행렬과 질량행렬은 다음과 같이 정의된다. 여기서 밀도가 1일 때의 강성행렬과 질량행렬은 각각 k_0와 m_0로 나타나 있다.

$$k_{e,SIMP}(\gamma_e) = \gamma_e^n k_0, m_e(\gamma_e) = \gamma_e m_0 \tag{7}$$

$$k_0 = \int_{v_e} B^T C B dv, m_0 = \int_{v_e} \rho H^T H dv \tag{8}$$

변위와 스트레인 간의 행렬과 형상 함수는 각각 B와 H이 구성 행렬(Constitutive matrix)는 C 이다. 요소의 밀도는 ρ이다. 각 요소의 볼륨은 v_e로 표현되어 있다. 여기서, SIMP의 벌칙 계수는 n이다.

2.3.2 요소 연결 매개법을 이용한 위상최적화

SIMP방법과 달리 요소 연결 매개법에서는 링크를 이용하여 최적화를 수행하기 때문에 다음과 같이 그림 3의 패치에 대하여 구성방정식을 구하여야 한다.

$$\boldsymbol{S}_e^{patch} = \left[(1+iw\beta)\boldsymbol{k}_e^{patch} + (\alpha wi - w^2)\boldsymbol{m}_e^{patch}\right] \tag{9}$$

$$\left[\boldsymbol{S}_e^{patch}\right]\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_{e,out}\\ \boldsymbol{x}_{e,in}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{f}_{e,out}\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix} \tag{10}$$

여기서, $\boldsymbol{S}_e^{patch}$, $\boldsymbol{k}_e^{patch}$, 과 $\boldsymbol{m}_e^{patch}$는 레일리 댐핑(Rayleigh Damping)을 고려한 각 패치의 동적 행렬, 강성 행렬과 질량 행렬을 나타내고 있다. 또한, 외곽 노드(Outer node)와 안쪽 노드(Inner node)의 변위는 그림 3(b)와 같이 각각 $\boldsymbol{x}_{e,out}$과 $\boldsymbol{x}_{e,in}$이다. 외곽 노드에 작용하는 외력은 $\boldsymbol{f}_{e,out}$이다. 여기서, 외력은 외곽 노드에만 작용한다는 것을 가정하고 있다. 패취 질량 모델에서의 $\boldsymbol{k}_e^{patch}$와 $\boldsymbol{m}_e^{patch}$는 다음과 같이 정의된다.

$$\boldsymbol{k}_e^{patch} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{k}_{i,e} & -\boldsymbol{k}_{i,e}\\ -\boldsymbol{k}_{i,e} & (\boldsymbol{k}_{i,e}+\boldsymbol{k}_{structure})\end{bmatrix} \tag{11}$$

$$\boldsymbol{m}_e^{patch} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{m}_e & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix} \quad (\boldsymbol{m}_e\text{가 } \boldsymbol{x}_{e,out}\text{에 정의되어 있음}) \tag{12}$$

위 식에서 영역을 분할하는 요소의 강성행렬과 질량행렬은 $\boldsymbol{k}_{structure}$와 $\boldsymbol{m}_e$이다. 그리고, 링크의 강성을 l_e라 할 때 행렬 $\boldsymbol{k}_{i,e}$과 $\boldsymbol{m}_e$는 다음과 같이 정의된다. 여기서 $\boldsymbol{m}_e$는 식 (7)과 (8)과 같이 일반적인 밀도를 기반으로 한 위상최적화와 동일하게 정식화한다(Yoon 등, 2005a,b).

$$\boldsymbol{k}_{i,e} = l_e\mathbf{I} \quad (\mathbf{I}\text{: Identity Matrix}) \tag{13}$$

$$\boldsymbol{m}_e = \gamma_e\boldsymbol{m}_0 \tag{14}$$

$$l_e = (l_{\max} - l_{\min})\frac{\gamma_e^n}{1+(1-\gamma_e^n)\tau} + l_{\min} \tag{15}$$

$$(\text{단, } \tau = \frac{(l_{\max} - l_{\min})}{diag(\boldsymbol{k}_{structure})\times 2})$$

링크의 최대 최소 강성은 각각 $l_{\max}$과 $l_{\min}$이다. 그리고 n과 τ는 벌칙계수(Penalty value)이다(Yoon, 2009). 여기서 만약 패치 질량 모델을 사용하지 않고 그림 2(a)와 식 (8)과 같이 일반적인 유한요소법에서 정의되는 모델을 사용하면 다음과 같이 $\boldsymbol{m}_e^{patch}$가 정의된다.

$$\boldsymbol{m}_e^{patch} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{m}_e\end{bmatrix} (\boldsymbol{m}_e\text{가 } \boldsymbol{x}_{e,in}\text{에 정의되어 있음}) \tag{16}$$

하지만, 이 모델은 그림 5에서 볼 수 있듯이 국부 모드 문제가 심각하다. 그림 5(a)에서는 설계 변수가 1로 링크의 강성이 강함으로 5번째와 8번째 모드로 구성된 국부 모드가 전역 모드보다 커지지만, 설계변수가 0으로 가까이 갈수록 5번째와 8번째 모드의 진동수가 아주 낮아지는 국부 모드 현상이 발생한다.

위에서 구한 동적행렬과 외력의 행렬을 동적 행렬(Global stiffness matrix)에 어셈블리(Assemble)하여 하모닉 응답과 동적 컴플라이언스를 구하게 된다. 그런데 패치를 구성하기 위하여 기존의 위상최적화 방법과 비교하여 그림 3과 같이 노드를 상대적으로 많이 사용하고 강성행렬의 크기가 더 커지는 단점이 있다. 이런 특성 때문에 수치해석을 수행하는데 많은 시간이 소요되는 단점이 있다. 이런 단점을 해결하기 위하여 패치레벨에서의 동적행렬을 바로 어셈블리하지 않고 패치내의 안쪽 노드(Inner node)의 변위를 제거하는 정적 축약(Static condensation)을 통하여 실제로 해결해야 할 시스템의 크기를 줄이게 된다. 그러기 위하여 다음과 같이 축약을 수행하여 축약된 $\boldsymbol{s}_e^{cond}$ 행렬을 만든다.

$$\boldsymbol{s}_e^{cond} = \begin{bmatrix}(\alpha iw - w^2)\boldsymbol{m}_e\\ +(1+iw\beta)\boldsymbol{k}_{i,e} - \boldsymbol{k}_{i,e}(\boldsymbol{k}_{i,e}+\boldsymbol{k}_{structure})^{-1}\boldsymbol{k}_{i,e}\end{bmatrix} \tag{17}$$

$$\boldsymbol{f}_e^{cond} = \boldsymbol{f}_{e,out} \tag{18}$$

$$\boldsymbol{S}^{cond} = \sum_{e=1}^{NE}\boldsymbol{s}_e^{cond}, \boldsymbol{F}^{cond} = \sum_{e=1}^{NE}\boldsymbol{f}_e^{cond} \tag{19}$$

$$\boldsymbol{S}^{cond}\boldsymbol{X}_{out} = \boldsymbol{F}^{cond} \tag{20}$$

여기서, 패치의 개수는 영역을 분할하는 요소의 개수와 마찬가지로 NE이다.

축약된 강성행렬을 이용하여 외곽 노드(Outer node)의 전역 변위($\boldsymbol{X}_{out}$)를 계산하고 내부 노드에 가해지는 외력이 없다고 가정함으로 제안된 요소 연결 매개법에서 식 (5)의 동적 컴플라이언스는 다음과 같이 계산하게 된다.

$$\Phi = \int_{\omega_s}^{\omega_e}\left|(\boldsymbol{F}^{cond^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{X}_{out})\right|d\omega \tag{21}$$

그리고 각 패치의 안쪽 노드의 변위는 다음 식을 이용하여 다시 계산을 수행한다.

$$\boldsymbol{x}_{e,in} = (\boldsymbol{k}_{i,e}+\boldsymbol{k}_{structure})^{-1}\boldsymbol{k}_{i,e}\boldsymbol{x}_{e,out} \tag{22}$$

3. 선형 구조물에서의 동적 컴플라이언스를 고려한 위상최적화 정식화

3.1 최적화를 위한 정식화

이 절에서는 위에서 연구된 요소 연결 매개법을 이용하여 선형 구조물의 동적 컴플라이언스를 최적화한다. 이를 위하여 다음과 같이 질량의 한계를 고려한 최적화 문제를 정식화

하였다(Diaz 등, 1992; Ma 등, 1993; Jog, 2002).

$$\text{Min } \Phi = \int_{\omega_s}^{\omega_e} \left| (\boldsymbol{F}^{cond^{\mathrm{T}}} \boldsymbol{X}_{out}) \right| d\omega \tag{23}$$

$$\text{s.t} \sum_{e=1}^{NE} \rho_e(\gamma_e) v_e \leqq V^*$$

여기서, 설계 변수는 γ이다. 각 요소의 볼륨은 v_e로 표현되어 있고 설정된 재료의 한계 값은 V^*로 표현되어 있다.

3.2 동적 컴플라이언스의 민감도 해석

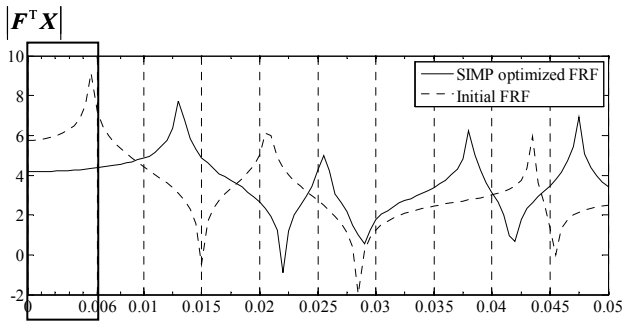
수치해석적인 방법을 이용하여 위상최적화를 수행하기 위하여 패치에 정의되어 있는 설계변수에 대한 민감도를 계산하는 것이 필요하다. 이 논문에서는 효과적인 민감도 수행을 위하여 보조변수 방법(Adjoint variable method)을 이용하여 민감도를 계산하였다. 보조변수 $\boldsymbol{\lambda}$를 계산하기 위하여 다음과 같은 보조변수 방정식을 이용한다.

$$\frac{d\Phi}{d\gamma_e} = \int_{w_s}^{w_e} 2Real(\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}} \frac{d\boldsymbol{S}^{cond}}{d\gamma_e} \boldsymbol{X}_{out}) d\omega \tag{24}$$

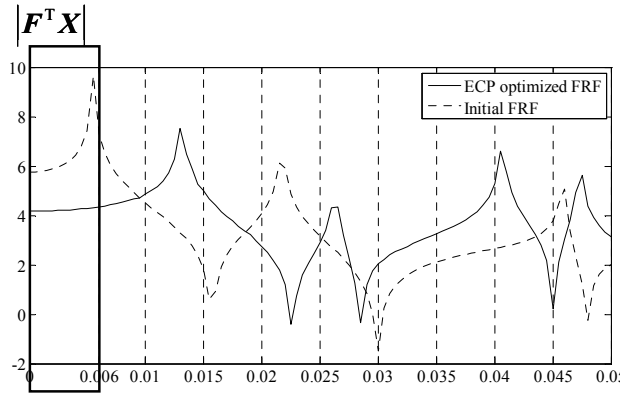
$$\boldsymbol{\lambda} = -\frac{\alpha}{2} \boldsymbol{X}_{out}, \alpha = \frac{\overline{\boldsymbol{X}}_{out}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{F}^{cond}}{\left| \boldsymbol{X}_{out}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{F}^{cond} \right|} \tag{25}$$

4. 위상최적화 결과

요소 연결 매개법을 기반으로 한 동적 컴플라이언스를 고려한 위상최적화 기법을 적용하여 위상최적화를 수행하였다. 설계 영역은 그림 6(a)과 같이 정의되어 있다. 목적함수를 구하기 위하여 0(rad/s)에서부터 0.006(rad/s)영역을 수치적분하였다. 그림 6(b)와 (c)는 각각 SIMP방법과 ECP방법으로 구한 결과들을 보여주고 있다. 이 예제에서는 선형구조물의 동적 컴플라이언스를 최적화했기 때문에 두 방법으로 최적화된 구조물들의 설계와 주파수 응답이 거의 비슷하다.



(a)



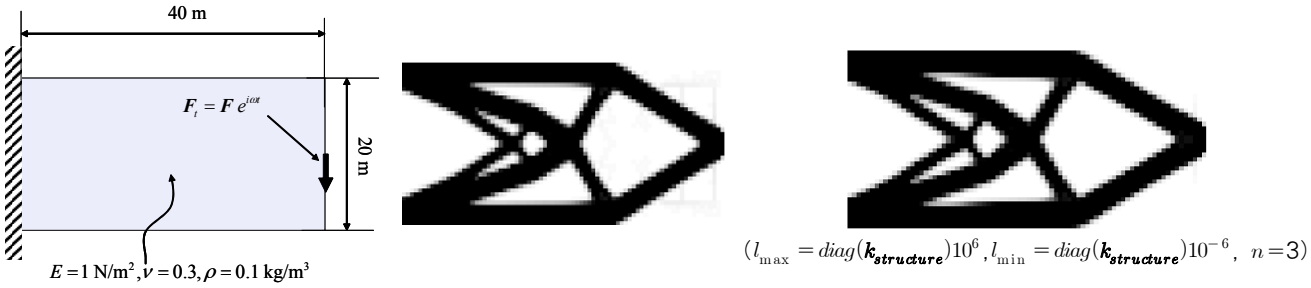
(b)

그림 7 SIMP 방법과 ECP 방법으로 구한 위상최적화 결과의 FRF(Frequency Response Function) 비교

물리적으로 0(rad/s)에서 0.006(rad/s)까지 동적 컴플라이언스의 적분을 최소화하면 결과적으로 1번째 고유진동수가 최대화되기 때문에 강성이 커지는 효과를 얻을 수 있었다. 여기서 그림 7의 사각형으로 표시된 바와 같이 0(rad/s)와 0.006(rad/s)사이의 주파수 구간의 동적 컴플라이언스가 초기의 주파수 응답과 비교하여 최소화된 것을 볼 수 있다.

5. 결 론

이 논문에서는 요소 연결 매개법을 사용하여 선형 구조물의 동적 컴플라이언스를 최소화하는 구조물을 설계하였다.



(a) 문제 영역 (b) SIMP방법 결과 (c) ECP 최적화 결과

그림 6 2차원 영역에서의 동적 컴플라이언스를 고려한 위상최적화 결과(ω_s =0(rad/s), ω_e =0.006(rad/s), integration step ($\triangle\omega$)=0.001(rad/s))

패치 내에서 영역을 분할하는 요소와 링크 간에서 살펴볼 수 있는 국부모드를 해결할 수 있는 새로운 패치 질량 모델(Patch mass model)을 적용하였다. 또한, 제1차 고유진동수 주변의 동적 컴플라이언스를 최소화를 통하여 정적 컴플라이언스(Static compliance) 최소화와 거의 비슷한 결과를 얻을 수 있음을 보였다. 앞으로 이 방법을 확장하여 비선형 구조물의 동적 컴플라이언스를 최소화하는 연구를 수행할 수 있을 것으로 예상된다.

감사의 글

이 논문은 2008년도 경북대학교 학술연구비에 의하여 연구되었음.

참 고 문 헌

김민근, 조선호 (2008) 확장 B-스플라인 기저함수를 이용한 레벨셋 기반의 형상 최적설계, 한국전산구조공학회 논문집, 21(3), pp.239~245.

하승현, 조선호 (2007) 등기하 해석법을 이용한 설계 민감도 해석, 한국전산구조공학회 논문집, 20(3), pp.339~345.

Bathe, K.J. (1996) Finite element procedures, Prentice hall.

Bendsoe, M.P., Sigmund, O. (2003) Topology Optimization Theory, Methods and Applications, Springer-Verlag, New York.

Cho, S.H., Jung, H.S. (2003) Design sensitivity analysis and topology optimization of displacement-loaded nonlinear structures, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192, pp.2539~2553.

Choi, J.S., Yoo, J.H. (2008) Structural optimization of ferromagnetic materials based on the magnetic reluctivity for magnetic field problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(49~50), pp.4193~4206.

Diaz, A.R. Kikuchi, N. (1992) Solutions to shape and topology eigenvalue optimization using a homogenization method, *International Journal for Numerical Method in Engineering*, 35, pp.1487~1502.

Jog, C.S. (2002) Topology design of structures subjected to periodic loading, *Journal of Sound and Vibration*, 253(3), pp.687~709.

Kim, T.S., Kim, Y.Y. (2000) Mac-based mode-tracking in structural topology optimization, *computer & structures* 74, pp.375~383.

Ma, Z.D., Kikuchi, N., Hagiwara, I. (1993) Structural topology and shape optimization for a frequency response problem, *Comput. Mech.* 13(3), pp.157~174.

Pedersen, N.L. (2000) Maximization of eigenvalues using topology optimization, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 20(1), pp.2~11.

Yoon, G.H., Kim, Y.Y. (2005a) Element connectivity parameterization for topology optimization of geometrically nonlinear structures, *International Journal of Solids and Structures*, 42(7), pp.1983~2009.

Yoon, G.H., Kim, Y.Y. (2005b) The element connectivity parameterization formulation for the topology design optimization of multiphysics systems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 64, pp.1649~1677.

Yoon, G.H., Jensen, J.S., Sigmund, O. (2007) Topology Optimization of Acoustic-Structure Interaction Problems using a Mixed Finite Element Formulation, *International Journal for Numerical Method in Engineering*, 70, pp.1049~1076.

Yoon, G.H., Sigmund, O. (2008) A monolithic approach for electrostatic problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(45~48), pp.4062~4075.

Yoon, G.H. (2009) Maximizing the fundamental eigenfrequency of geometrically nonlinear structures using the element connectivity based topology optimization, in review.