탄성체의 경계 하중을 구하기 위한 역경계요소법

An Inverse Boundary Element Method for Finding Boundary Tractions of an Elastic Body

이 상 훈* 김 현 규†
Lee, Sang-Hoon Kim, Hyun-Gyu
(논문접수일 : 2009년 2월 10일 ; 심사종료일 : 2009년 6월 9일)

요 지

대부분의 구조해석 문제는 외부하중에 대하여 구조물의 변형과 응력을 구하게 된다. 하지만 많은 분야에서 표면 트랙션과 내부 응력을 측정변위로 부터 구하기 위한 역문제 해석이 필요하게 된다. 본 연구에서는 구하고자 하는 트랙션 영역과 그와는 다른 영역의 변위를 측정하여 미지의 트랙션을 평가하는 역시스템을 경계요소법을 사용하여 수식화하였다. 본 연구에서 제시한 역경계요소법을 사용하여 측정변위의 작은 노이즈와 측정위치의 영향을 분석하였다.

핵심용어 : 경계 트랙션, 경계요소법, 역문제

Abstract

Most of structural analyses are concerned with the deformation and stress in a body subjected to external loads. In many fields, however, the interpretation of inverse problems is needed to determine surface tractions or internal stresses from measured displacements. In this study, the inverse processes by using the boundary element method are formulated for the evaluation of boundary tractions from displacements measured on a remote surface. Small errors in measured displacements often result in a substantial loss of accuracy of an inverse system. Numerical results show that the error in reconstructed tractions by using the inverse boundary element methods is sensitive to measurement location and noise.

Keywords *: boundary traction, boundary element method, inverse problem*

1. 서 론

대부분의 구조해석 문제는 주어진 경계조건과 하중조건으로 변형과 응력을 해석하는 문제이다. 이를 역으로 생각하면 일부분의 변위를 측정하여 표면이나 내부의 응력 또는 트랙션(traction)을 평가해야 하는 역문제(inverse problems)를 정의할 수 있게 되는데, 이는 지질학, 열전달, 유체역학 등 여러 분야에서 나타난다. 이와 같이 공학적으로 일부 영역의 변위를 측정하여 미지의 트랙션을 구하는 문제가 자주 나타나게 된다. 하지만 구조물의 경계에서 변위를 측정하는데 필연적으로 측정 오차가 발생하게 되고, 평가되는 응력이나 하중의 안정성에 큰 영향을 줄 수 있게 된다. 그러므로 내부의 응력이나 하중을 평가하기 위하여 효율적인 역문제 해결 방법이 절실히 요구되고 있다.

역문제를 해석하여 트랙션을 평가하는 것은 물체 내부에 존재하는 잔류응력을 구하는데 응용될 수 있다. 잔류응력을 측정하는 역문제는 잔류응력이 존재하는 물체를 절단하고 여기서 유발되는 다른 일부 영역의 변위를 측정하여 절단면의 트랙션을 구하는 문제로 정의된다. 물체 내부의 잔류응력을 알아내기 위한 방법 중에는 구멍 주위의 국부적인 잔류응력을 알아내는 응력이완법의 일종인 구멍뚫기 방법(김철 등, 2001)이 있고, X선을 사용하여 표면의 대략적인 잔류응력을 알아내는 방법(강우종 등, 2006)이 있는데, 내부의 전체적인 잔류응력을 구해내는 것은 여전히 어려운 문제로 남아있는 실정이다. 단순한 역해석을 통한 내부의 잔류응력을 구하는 연구들(Gao and Mura, 1989; Cao 등, 2002)이 있었

† 책임저자, 정회원 · 서울산업대학교 기계공학과 교수
Tel: 02-970-6309 ; Fax: 02-949-1458
E-mail: khg@snut.ac.kr
* 서울산업대학교 에너지환경대학원 석사과정

• 이 논문에 대한 토론을 2009년 8월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2009년 10월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

다. 역문제를 효율적으로 해결할 수 있으면 고체 내부의 잔류응력을 평가하는 혁신적인 방법이 될 것이다. 측정된 변위를 사용하여 표면 트랙션을 유한요소법으로 구하는 연구들(Maniatty 등, 1989; Schnur and Zabaras, 1990; Burke 등, 2007; 김현규 등, 2008)이 있어 왔고, 경계요소법을 사용한 연구들(Zhang 등, 1997; Qian 등, 2004)이 수행되었다. 이 연구들에서는 역시스템의 민감도 행렬을 경계요소법으로 구하는 방법을 적용하였다. 본 연구에서는 유한요소법 기반으로 역문제 해석을 새롭게 수식화한 최근의 연구(김현규 등, 2008)에 경계요소법을 적용하여 수식화를 하였다. 또한 변위측정 위치에 따른 역시스템의 경향을 분석하고 변위 측정시 발생하는 필연적인 측정오차를 노이즈를 부여하는 방식으로 구연하여 경계요소법을 적용한 역시스템의 경향을 분석하였다.

2. 경계요소 수식화

2.1 경계 적분방정식의 이산화

경계 적분방정식의 수치해를 구하기 위해서는 경계와 경계함수를 각각 경계요소로 이산화해야 한다. 우선 각 경계요소에 K개의 절점이 있다고 할 때, 경계요소에서 변위 $\boldsymbol{u}$와 트랙션 벡터 $\boldsymbol{t}$에 관한 경계요소를 K개의 기저함수 $\{\phi_1,\phi_2,...,\phi_K\}$를 이용하면 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{\Phi u_e}$, $\boldsymbol{t}=\boldsymbol{\Phi t_e}$ 로 표시할 수 있다. 여기서 $\boldsymbol{u_e}$와 $\boldsymbol{t_e}$는 3차원의 경우 $3K$(2차원의 경우 $2K$)개의 성분을 갖는 벡터이다. 또한 기저함수 $\boldsymbol{\Phi}$는 3차원의 경우 $3\times 2K$(2차원의 경우 $2\times 2K$) 행렬이다. Navier방정식의 기본해, 즉 Kelvin해로 구성된 변위, i 절점의 단위 집중 하중에 대한 트랙션 행렬을 $\boldsymbol{u}^i_*$와 $\boldsymbol{t}^i_*$로 각각 정의하고 경계 적분방정식에 대입하면 다음과 같이 된다.

$$c^i\boldsymbol{u}^i+\int_\Gamma \boldsymbol{t}^i_*\boldsymbol{u}d\Gamma=\int_\Gamma \boldsymbol{u}^i_*\boldsymbol{t}d\Gamma \tag{1}$$

식 (1)에 각 경계요소를 기저함수 $\boldsymbol{\Phi}$로 매개화하면 다음과 같은 이산화된 경계 적분방정식을 얻게 된다.

$$c^i\boldsymbol{u}^i+\sum_{e=1}^{NE}\left\{\int_{\Gamma_j}\boldsymbol{t}^i_*\boldsymbol{\Phi}d\Gamma\right\}\boldsymbol{u}_e=\sum_{e=1}^{NE}\left\{\int_{\Gamma_j}\boldsymbol{u}^i_*\boldsymbol{\Phi}d\Gamma\right\}\boldsymbol{t_e} \tag{2}$$

여기서, NE는 경계요소의 개수이다.

2.2 경계요소 방정식

식 (2)의 적분들을 해석적으로 계산하는 것은 거의 불가능하기 때문에 수치적인 방법으로 계산을 할 수 밖에 없다. 이를 위해 경계와 영역을 매개변수에 의해 좌표변환이 필요하다. 3차원의 경우 기저함수를 매개변수 ξ_1과 ξ_2에 의존하는 함수 $\boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{\Phi}(\xi_1,\xi_2)$라 하고 경계요소의 좌표를 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\Phi x_e}$와 같은 변환을 적용하였다. 식 (2)에 좌표변환과 Gauss구적법에 의한 수치적분을 적용하면 다음과 같다.

$$\boldsymbol{c^i u^i}+\sum_{e=1}^{NE}\left\{\sum_{l=1}^{L}w_l(\boldsymbol{t}^i_*\boldsymbol{\Phi})_l J\right\}\boldsymbol{u}_e=\sum_{e=1}^{NE}\left\{\sum_{l=1}^{L}w_l(\boldsymbol{u}^i_*\boldsymbol{\Phi})_l J\right\}\boldsymbol{t}_e \tag{3}$$

여기서, L은 Gauss구적법에서 사용되는 적분점과 가중값 w_l의 개수이고, J는 좌표변환으로 인한 Jacobian이다. 또 $(\boldsymbol{t}^i_*\boldsymbol{\Phi})_l$, $(\boldsymbol{u}^i_*\boldsymbol{\Phi})_l$은 각각 $\boldsymbol{t}^i_*\boldsymbol{\Phi}$, $\boldsymbol{u}^i_*\boldsymbol{\Phi}$에 대한 적분점에서의 함수값을 의미한다. 식 (3)은 요소 관점으로 표현되었는데, 절점을 중심으로 정리하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$c^i\boldsymbol{u}^i+\sum_{j=1}^{N}\widehat{\boldsymbol{T}^{ij}}\boldsymbol{u}^j=\sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{U}^{ij}\boldsymbol{t}^j,\ i=1,2,...,N \tag{4}$$

$$\widehat{\boldsymbol{T}^{ij}}=\sum_{e=1}^{NE}\int_{\Gamma_e}\boldsymbol{t}^i_*\boldsymbol{\Phi}^j d\Gamma,\ \boldsymbol{U}^{ij}=\sum_{e=1}^{NE}\int_{\Gamma_e}\boldsymbol{u}^i_*\boldsymbol{\Phi}^j d\Gamma$$

여기서, Γ_e는 j번째 절점을 포함하는 경계요소를 나타낸다. 식 (4)을 보다 간단히 표현하기 위해 $\boldsymbol{T}^{ij}=c^i\boldsymbol{I}^{ij}+\widehat{\boldsymbol{T}^{ij}}$($\boldsymbol{I}^{ij}$는 항등텐서)로 정의하면 다음과 같다.

$$\sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{T}^{ij}\boldsymbol{u}^j=\sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{U}^{ij}\boldsymbol{t}^j,\ i=1,2,...,N \tag{5}$$

또는, $[\boldsymbol{T}]\{\boldsymbol{u}\}=[\boldsymbol{U}]\{\boldsymbol{t}\}$ (6)

여기서, $\boldsymbol{T}$와 $\boldsymbol{U}$는 3차원의 경우, $3\times 3N$행렬이고, $\{\boldsymbol{u}\}$와 $\{\boldsymbol{t}\}$는 각각 변위와 트랙션 값을 포함하는 벡터이다. 식 (6)에 주어진 경계조건을 대입한 다음 미지의 변위와 트랙션 값을 좌변으로 이동시키면, 변위와 트랙션을 구하게 된다. 앞으로 편의를 위하여 벡터나 행렬에 대한 볼드체를 일반체로 표기하기로 하자.

3. 역경계요소 수식화

3.1 잔류응력 평가의 이론적 배경

선형탄성 문제의 평형방정식은 다음과 같다.

$$\sigma_{ij,j}=0 \quad \text{in} \quad \Omega \tag{7}$$

$$\sigma_{ij}=\lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij}+2\mu\varepsilon_{ij} \tag{8}$$

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}) \tag{9}$$

여기서, Ω는 고체 영역이고, Γ는 경계이며, σ_{ij}는 응력, λ

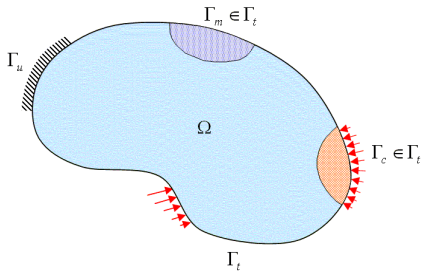


그림 1 역문제의 개념도

와 μ는 Lame상수이다. 주어진 경계조건은 다음과 같다.

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{on} \quad \Gamma_u \tag{10a}$$

$$\sigma_{ij} n_j = \bar{t}_i \quad \text{on} \quad \Gamma_t \tag{10b}$$

여기서, Γ_u와 Γ_t는 변위와 트랙션이 주어진 경계를 나타낸다. 역문제의 중요한 목표는 트랙션을 모르는 경계의 일부 $\Gamma_c \in \Gamma_t$에서 다른 부분 $\Gamma_m \in \Gamma_t$의 변위를 측정하여 구하는 것이다.

$$u(x) = u^m(x), \quad x \in \Gamma_m \tag{11}$$

여기서, $\Gamma_c \cap \Gamma_m = \varnothing$이다. 그림 1에 변위를 측정하는 영역 Γ_m와 구하고자 하는 하중 영역 Γ_c을 보여 주고 있다. 기본적으로 역문제의 이론해는 다음과 같은 적분방정식으로 나타나게 된다.

$$u(z) = \int_{\Gamma_c} G(z,x) t(x) dS \tag{12}$$

여기서, $z \in \Gamma_m$이고, $G(z,x)$는 kernel함수이다. 식 (12)는 Fredholm의 적분방정식으로 하중이 단지 Γ_c에서만 주어지는 경우에 유효하게 된다. 식 (12)의 적분방정식을 해석적으로 구하기 위하여 kernel함수를 나타내어야 하는데, 일반적인 형상에 대하여 직접적인 해결 방법이 거의 불가능 하므로 경계요소법을 도입하여 관계식을 유도하게 된다. 유한요소법을 도입한 연구(김현규 등, 2008)를 본 연구에서 경계요소법을 적용하여 역문제를 해석하였다.

3.2 경계요소 역문제

본 연구의 역문제는 트랙션이 주어진 경계 Γ_t의 일부 $\Gamma_c \in \Gamma_t$ 미지의 트랙션을 구하기 위하여 다른 부분 $\Gamma_m \in \Gamma_t$의 변위를 사용하게 된다. 측정 면 Γ_m에서의 변위를 $u^m \in R^m$, 트랙션을 평가하고자 하는 면 Γ_c의 변위를 $u^c \in R^n$로 나타내고, 그 외의 변위를 u^r로 하고 변위 측정 면의 트랙션을 $t^m \in R^m$로 트랙션 평가를 위한 면의 트랙션을 $t^c \in R^n$로 그 외의 트랙션을 t^r이라고 나타내면 경계요소 방정식 (5)는 다음과 같이 된다.

$$\begin{bmatrix} T_{ee} & T_{er} & T_{em} & T_{ec} \\ T_{re} & T_{rr} & T_{rm} & T_{rc} \\ T_{me} & T_{mr} & T_{mm} & T_{mc} \\ T_{ce} & T_{cr} & T_{cm} & T_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^e \\ u^r \\ u^m \\ u^c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{ee} & U_{er} & U_{em} & U_{ec} \\ U_{re} & U_{rr} & U_{rm} & U_{rc} \\ U_{me} & U_{mr} & U_{mm} & U_{mc} \\ U_{ce} & U_{cr} & U_{cm} & U_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t^e \\ t^r \\ t^m \\ t^c \end{Bmatrix} \tag{13}$$

여기서, 변위 경계조건이 주어진 부분에 대한 변위와 트랙션을 u^e와 t^e로 나타내었다. 식 (13)의 왼쪽 항에서 T_{rr}의 역행렬을 구할 수 있으므로 식 (14)와 같이 축약하여 나타낼 수 있다. 식 (13)의 오른쪽 항의 트랙션벡터 값 중 t^r값이 주어지지 않는 역문제는 다음과 같이 된다.

$$\begin{bmatrix} \bar{T}_{ee} & \bar{T}_{em} & \bar{T}_{ec} \\ \bar{T}_{me} & \bar{T}_{mm} & \bar{T}_{mc} \\ \bar{T}_{ce} & \bar{T}_{cm} & \bar{T}_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^e \\ u^m \\ u^c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{U}_{ee} & \bar{U}_{em} & \bar{U}_{ec} \\ \bar{U}_{me} & \bar{U}_{mm} & \bar{U}_{mc} \\ \bar{U}_{ce} & \bar{U}_{cm} & \bar{U}_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t^e \\ t^m \\ t^c \end{Bmatrix} \tag{14}$$

여기서,

$$\bar{T}_{ee} = T_{ee} - T_{er} T_{rr}^{-1} T_{re} \quad \bar{U}_{ee} = U_{ee} - T_{er} T_{rr}^{-1} U_{re}$$

$$\bar{T}_{em} = T_{em} - T_{er} T_{rr}^{-1} T_{rm} \quad \bar{U}_{em} = U_{em} - T_{er} T_{rr}^{-1} U_{rm}$$

$$\bar{T}_{ec} = T_{ec} - T_{er} T_{rr}^{-1} T_{rc} \quad \bar{U}_{ec} = U_{ec} - T_{er} T_{rr}^{-1} U_{rc}$$

$$\bar{T}_{me} = T_{me} - T_{mr} T_{rr}^{-1} T_{re} \quad \bar{U}_{me} = U_{me} - T_{mr} T_{rr}^{-1} U_{re}$$

$$\bar{T}_{mm} = T_{mm} - T_{mr} T_{rr}^{-1} T_{rm} \quad \bar{U}_{mm} = U_{mm} - T_{mr} T_{rr}^{-1} U_{rm}$$

$$\bar{T}_{mc} = T_{mc} - T_{mr} T_{rr}^{-1} T_{rc} \quad \bar{U}_{mc} = U_{mc} - T_{mr} T_{rr}^{-1} U_{rc}$$

$$\bar{T}_{ce} = T_{ce} - T_{cr} T_{rr}^{-1} T_{re} \quad \bar{U}_{ce} = U_{ce} - T_{cr} T_{rr}^{-1} U_{re}$$

$$\bar{T}_{cm} = T_{cm} - T_{cr} T_{rr}^{-1} T_{rm} \quad \bar{U}_{cm} = U_{cm} - T_{cr} T_{rr}^{-1} U_{rm}$$

$$\bar{T}_{cc} = T_{cc} - T_{cr} T_{rr}^{-1} T_{rc} \quad \bar{U}_{cc} = U_{cc} - T_{cr} T_{rr}^{-1} U_{rc}$$

이 과정에서 역행렬 구성과 이후의 계산과정의 해답을 얻기 위해 식 (14)의 오른쪽 항의 t^e, t^c를 요소중심의 행렬에서 절점중심의 행렬로 바꿔주어야 하고, 그에 따른 $[U]$의 $\bar{U}_{ee}$, $\bar{U}_{re}$, $\bar{U}_{ce}$, $\bar{U}_{ec}$, $\bar{U}_{mc}$, $\bar{U}_{rc}$도 절점중심의 행렬로 바꿔주는 과정이 필요하다. 식 (14)의 축약과정에서 측정 면과 트랙션을 평가하는 면이 아닌 나머지 면의 변위 u^r은 다음과 같이 유도된다.

$$u^r = T_{rr}^{-1}(U_{re}t^e + U_{rm}t^m + U_{rc}t^c - T_{re}u^e - T_{rm}u^m - T_{rc}u^c) \tag{15}$$

여기서, 변위벡터 u^c는 주어진 변위로 고정 경계의 경우 그 값을 0되고 측정절점 u^m에서의 트랙션벡터인 t^m은 힘이 주어지는 부분이 아니므로 그 값이 0이다. 그러므로 식 (14)를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \overline{T}_{mm} & \overline{T}_{mc} \\ \overline{T}_{cm} & \overline{T}_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^m \\ u^c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{U}_{me} & \overline{U}_{mc} \\ \overline{U}_{ce} & \overline{U}_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t^e \\ t^c \end{Bmatrix} \tag{16}$$

$$\begin{bmatrix} \overline{T}_{em} & \overline{T}_{ec} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^m \\ u^c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{U}_{ee} & \overline{U}_{ec} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t^e \\ t^c \end{Bmatrix} \tag{17}$$

식 (17)는 식 (14)의 첫 번째 방정식을 나열한 것이다. 식 (16)의 첫 번째 방정식에 Moore-Penrose 유사(pseudo) inverse(Astere 등, 2004)를 사용하면 다음과 같다.

$$u^c = \overline{T}_{mc}^{+}(\overline{U}_{me}t^e + \overline{U}_{mc}t^c - \overline{T}_{mm}u^m) \tag{18}$$

여기서 $\overline{T}_{mc}^{+}$는 다음과 같다.

$$\overline{T}_{mc}^{+} = (\overline{T}_{mc}^{T} \cdot \overline{T}_{mc})^{-1}\overline{T}_{mc}^{T} \quad \text{for} \quad m > n \tag{19}$$

유사 역행렬은 주어진 조건이 더 많은 문제에서 원하는 방정식을 최소 제곱 관점에서 가장 근접한 해를 구하는 방법이다. 식 (18)를 식 (16)에 대입하면,

$$\begin{aligned} &\overline{T}_{cm}u^m + \overline{T}_{cc}\left[\overline{T}_{mc}^{+}(\overline{U}_{me}t^e + \overline{U}_{mc}t^c - \overline{T}_{mm}u^m)\right] \\ &\quad = \overline{U}_{ce}t^e + \overline{U}_{cc}t^c \end{aligned} \tag{20}$$

또한 식 (18)를 식 (17)에 대입하면,

$$\begin{aligned} &\overline{T}_{em}u^m + \overline{T}_{ec}\left[\overline{T}_{mc}^{+}(\overline{U}_{me}t^e + \overline{U}_{mc}t^c - \overline{T}_{mm}u^m)\right] \\ &\quad = \overline{U}_{ee}t^e + \overline{U}_{ec}t^c \end{aligned} \tag{21}$$

식 (20)와 식 (21)를 다음과 같이 정리 할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \hat{U}_{ce} & \hat{U}_{cc} \\ \hat{U}_{ee} & \hat{U}_{ec} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t^e \\ t^c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{T}_{cm} \\ \hat{T}_{em} \end{bmatrix} \{u^m\} \tag{22}$$

여기서, $\hat{U}_{ce} = \overline{U}_{ce} - \overline{T}_{cc}\overline{T}_{mc}^{+}\overline{U}_{me}$

$$\begin{aligned} \hat{U}_{cc} &= \overline{U}_{cc} - \overline{T}_{cc}\overline{T}_{mc}^{+}\overline{U}_{mc} \\ \hat{U}_{ee} &= \overline{U}_{ee} - \overline{T}_{ec}\overline{T}_{mc}^{+}\overline{U}_{me} \\ \hat{U}_{ec} &= \overline{U}_{ec} - \overline{T}_{ec}\overline{T}_{mc}^{+}\overline{U}_{mc} \\ \hat{T}_{cm} &= \overline{T}_{cm} - \overline{T}_{cc}\overline{T}_{mc}^{+}\overline{T}_{mm} \\ \hat{T}_{em} &= \overline{T}_{em} - \overline{T}_{ec}\overline{T}_{mc}^{+}\overline{T}_{mm} \end{aligned}$$

식 (22)에서 t^e와 t^c값은 미지수이고 u^m값은 역문제에 있어서 주어지는 값이다. 그러므로 식 (22)를 풀기위해 다음과 같은 과정을 거치게 된다.

$$\begin{Bmatrix} t^e \\ t^c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{U}_{ce} & \hat{U}_{cc} \\ \hat{U}_{ee} & \hat{U}_{ec} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{T}_{cm}u^m \\ \hat{T}_{em}u^m \end{bmatrix} \tag{23}$$

식 (23)에서 구한 t^e와 t^c값을 앞의 식 (18)에 대입하면 u^c를 구할 수 있고, 이 값을 식 (15)에 대입하면 u^r를 구할 수 있게 된다.

3.3 역시스템의 condition 수

식 (19)의 유사 역시스템을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$(\overline{T}_{mc}^{T}\overline{T}_{mc})u^c = \overline{T}_{mc}^{T}(\overline{U}_{me}t^e + \overline{U}_{mc}t^c - \overline{T}_{mm}u^m) \tag{24}$$

식 (24)는 역문제의 특성을 나타내고, 이는 일반적으로 측정변위는 오차를 갖게 되는데, 실제적으로는 다음과 같은 방정식을 해석하게 된다.

$$(\overline{T}_{mc}^{T}\overline{T}_{mc})\hat{u}^c = \overline{T}_{mc}^{T}(\overline{U}_{me}t^e + \overline{U}_{mc}t^c - \overline{T}_{mm}\hat{u}^m) \tag{25}$$

여기서 $\hat{u}^m$와 $\hat{u}^c$는 오차를 포함한 변위들이다. u^m와 u^c의 상태오차는 다음과 같이 나타난다.

$$\frac{\| u^c - \hat{u}^c \|}{\| u^c \|} \le \| \overline{T}_{mc}^{T}\overline{T}_{mc} \| \, \| (\overline{T}_{mc}^{T}\overline{T}_{mc})^{-1} \| \, \frac{\| u^m - \hat{u}^m \|}{\| u^m \|} \tag{26}$$

여기서, $\| \cdot \|$는 행렬의 놈(norm)을 나타낸다. 그러므로 역문제의 condition 수 κ는 다음과 같이 정의된다(양경택, 1999).

$$\kappa(\overline{T}_{mc}^{T}\overline{T}_{mc}) = \| \overline{T}_{mc}^{T}\overline{T}_{mc} \| \, \| (\overline{T}_{mc}^{T}\overline{T}_{mc})^{-1} \| \tag{27}$$

역시스템의 condition수는 측정 오차로 인하여 결과값의 상대적 오차를 의미하게 되어, condition수가 크게 되면 평

가되는 오차도 커지게 된다. 일반적으로 condition수가 커지면 역시스템이 ill-posed하게 되고 부정확한 결과를 얻게 된다. 수치 계산에서 컴퓨터의 유효자리수로 인하여 일반적으로 10^{16}이상의 condition수를 갖는 역시스템은 수치적 심각한 수치적 불안정이 나타나게 된다.

4. 해석결과

4.1 측정위치에 따른 역시스템의 영향

역문제의 결과 특성을 파악하기 위하여 그림 2와 같은 외팔보 문제에서 오른쪽 면의 트랙션을 일부 표면의 변위를 사용하여 구하는 문제를 해석하였다. 해석 모델의 크기는 H=1.0mm, W=2.0mm이고, 길이 L=10.0mm, P=10.0kgf/mm^{2}이다. 재료의 탄성계수와 Poisson 비는 E=21000kgf/mm^2, ν=0.3이다. 해석 모델의 왼쪽 면을 구속하였으며 구하고자 하는 트랙션 면은 오른쪽 면이다. 그림 2는 구조물의 측정 변위값

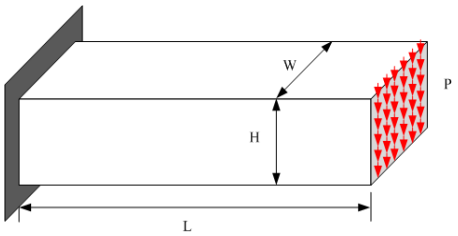
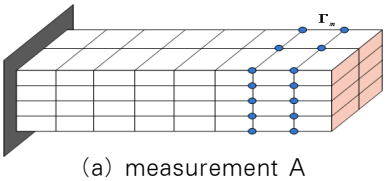
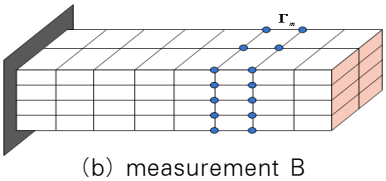
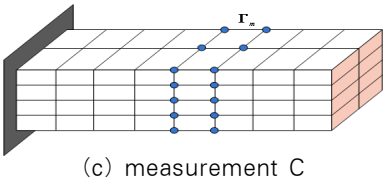
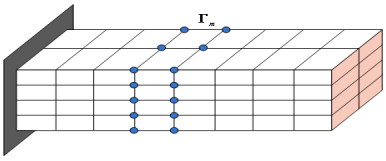


그림 2 외팔보 문제


(a) measurement A


(b) measurement B


(c) measurement C


(d) measurement D

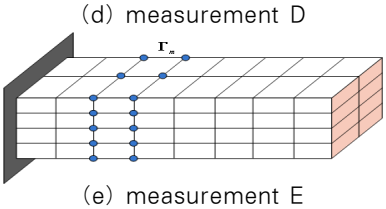
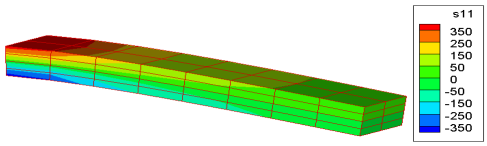
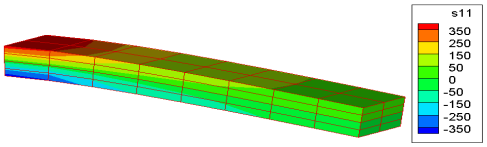

(e) measurement E

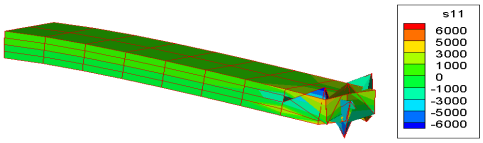
그림 3 측정 위치들



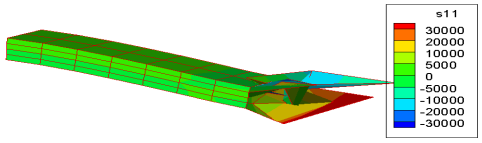
(a) measurement A



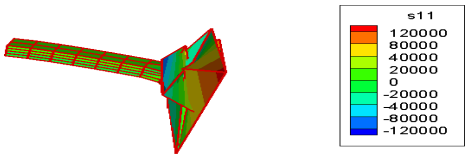
(b) measurement B



(c) measurement C



(d) measurement D



(e) measurement E

그림 4 측정위치의 영향

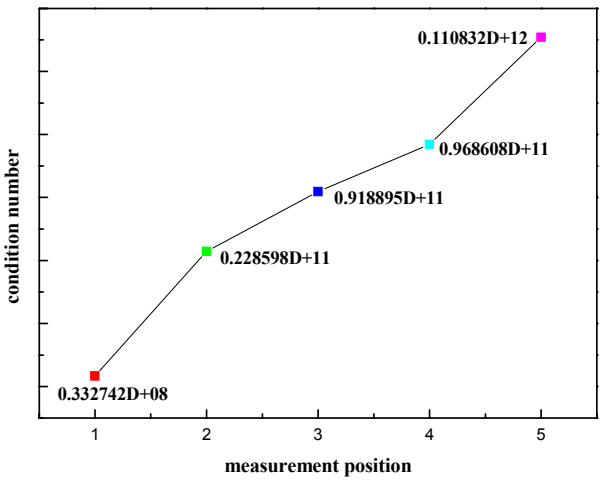


그림 5 측정위치와 condition 수

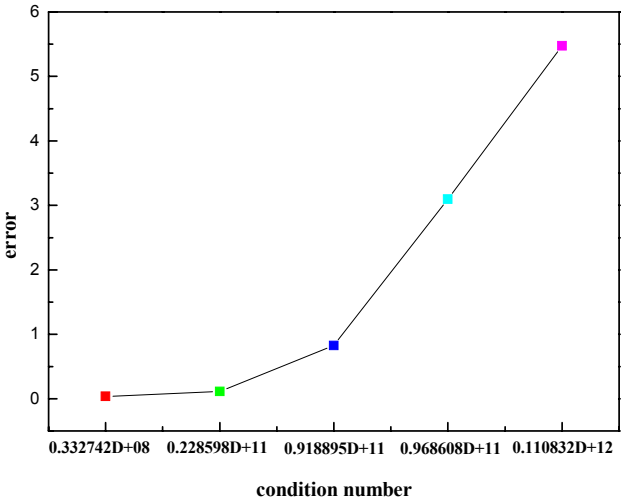


그림 6 Condition 수와 오차

을 얻기 위한 일반적인 구조해석 모델이다. 측정 위치의 영향을 알아보기 위하여 그림 3과 같이 측정 A~E를 적용하였고, 트랙션을 구하고자 하는 면에서 점차로 멀어지게 된다.

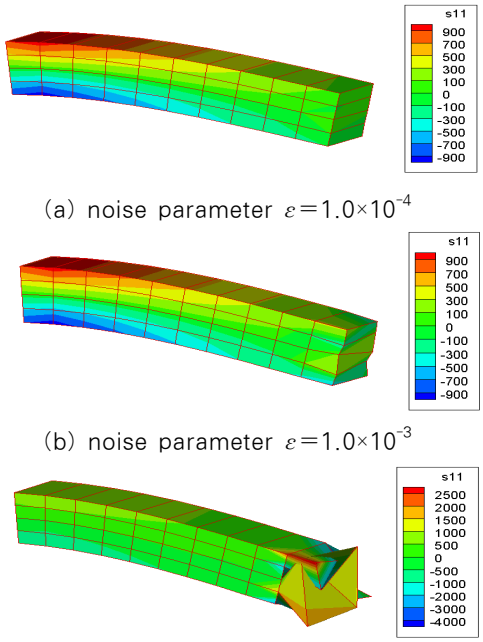
그림 4는 역시스템에서 측정 위치에 따른 응력 σ_{11}을 보여주고 있고, 여기에 해당하는 condition수를 그림 5에 나타내었다. 해석에서 역시스템의 condition수는 Frobenius 놈을 사용하였다. 그림 6은 실제 모델의 이론해와 역시스템의 변위값의 오차를 condition수에 따라 나타내었다. 변위 값의 비교를 위해 Γ_c부분의 처짐 변위를 비교하였다. 해석 결과 측정 위치가 A에서 E로 변하면서 역시스템의 condition수가 증가하는 것을 볼 수 있다. 즉, 구하고자 하는 하중에서 측정 위치가 멀어질수록 역시스템의 불안정이 증대되는 결과를 얻었다. 또한 A에서 E로 갈수록 오차가 점점 증가하는 것을 확인할 수 있다.

4.2 측정 노이즈(noise)에 따른 역시스템의 영향

실제 구조물의 경계에서 변위를 측정하는데 필연적으로 노이즈가 발생하게 되고 역시스템의 안정성에 큰 영향을 줄 수 있게 된다. 측정 변위에 포함된 측정 노이즈의 영향을 알아보기 위하여 다음과 같은 노이즈를 적용하였다.

$$\hat{u}^m = u^m(1+\varepsilon\xi) \tag{28}$$

여기서, ξ는 평균 0, 표준편차 1인 정규분포 random변수이고, ε은 노이즈 수준을 나타내는 상수이다. 해석 모델의 크기는 H=2.0mm, W=2.0mm이고, 길이 L=10.0mm, P=10.0kgf/mm^{2}이다. 재료상수는 앞의 예제와 동일하며 해석 모델의 왼쪽 면을 구속하였으며 구하고자 하는 트랙션 면은 오른쪽 면이다. 변위 측정 위치는 앞에서 보여주었고, 그림 4(a)와 같이 오차가 적고 안정된 값을 보이는 A위치이다.



(a) noise parameter ε=1.0×10^{-4}

(b) noise parameter ε=1.0×10^{-3}

(c) noise parameter ε=1.0×10^{-2}

그림 7 노이즈의 영향

측정 위치 노이즈에 따른 영향을 알아보기 위하여 그림 3의 오른쪽 면에 하중을 부여하고 경계요소 해석을 통하여 얻은 변위를 역시스템에 부여하여 해석하였다. 해석에 사용된 노이즈는 그림 7에 (a) ε=1.0×10^{-4}, (b) ε=1.0×10^{-3}, (c) ε=1.0×10^{-2}이고, 역시스템 해석시 condition수는 3.44×10^{4}이다. 결과로 오차범위가 적을수록 기본해와 같은 안정적인 결과를 얻었다. 측정 변위에 노이즈 수준을 ε=1.0×10^{-2}로 한 경우에는 변형 모습이 상당히 일그러진 모습을 나타내는데, 측정 변위에 포함된 노이즈의 수준에 대한 중요성을 보여주고 있다. 구하고자 하는 트랙션을 정확히 평가하기 위해서는 측정 변위에 포함된 노이즈의 수준도 작게 하는 것이 절대적으로 요구되고 있다.

5. 결 론

본 연구에서는 경계요소법을 사용하여 역문제를 수식화하였으며 측정 변위로 표면 트렉션을 구하는 문제에 적용하였다. 측정 위치 선정에 대해서 알고자 하는 트랙션 값을 얻기 위한 역문제의 변위 측정위치는 가능하면 트랙션 면에 가까운 영역을 설정해야 역문제 시스템의 condition을 좋게 할 수 있다. 이것은 변위 측정위치가 트랙션 면에서 멀어질수록 역시스템이 불안정해지고 오차값도 커지는 결과로 보여주었다. 또한 측정 노이즈 수준이 커질수록 큰 오차값을 가지는 것을 보였으며 상당히 불안정하였다. 따라서 구하고자 하는 하중을 정확하게 평가하기 위해서는 측정위치의 선정과 실제

변위 측정의 정확도가 필요하다는 것을 보여주었다. 본 연구의 결과는 역유한요소법의 경향과 유사한 결과를 얻었는데 보다 안정적인 역문제 해석기법을 개발하는 연구에 기반이 될 것이다.

참 고 문 헌

강우종, 김기훈 (2006) 변동하중을 받는 Lower Control Arm의 잔류응력 변화, 대한기계학회 논문집, 30(5), pp.602~608.

김철, 양원호, 석창석, 허성필 (2001) 구멍뚫기법을 이용한잔류응력 측정시 경사구멍의 영향, 한국자동차공학회 논문집, 9(6), pp.201~206.

김현규, 이경우 (2008) 역문제 해석을 통한 탄성체 내부의 잔류응력 평가, 2008년도 대한기계학회 춘계학술대회 논문집, pp.11~12.

양경택 (1999) 구조시스템의 동적응답을 이용한 역해석에서의 악조건 특성 규명, 한국전산구조공학회 논문집, 12(1), pp.83~94.

Aster, R.C., Borchers, B., Thurber, C.H. (2004) Parameter Estimation and Inverse Problems, Elsevier Academic Press.

Burke, B.C.P., Kim, S.O., Kim, K.S. (2007) Partial polar decomposition inverse method applied to determination of internal stresses in an elastic complex structure, *International Journal of Solids and Structures*, 44, pp.2010~2020.

Cao Y.P, Hu N., Fukunaga Z.H. (2002) An inverse approach for constructing the residual stress field induced by welding, *Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 37, pp.345~359.

Gao, Z., Mura, T. (1989) On the inversion of residual stresses from surface measurement, *ASME Journal of Applied Mechanics*, 56, pp.508~513.

Maniatty, A, Zabaras, N., Stelson, K. (1989) Finite element analysis of some inverse elasticity problems, *Journal of Engineering Mechanics*, 115, pp.1302~1316.

Qian, X., Yao, Z., Cao Y., Lu J. (2004) An inverse approach for constructing residual stress using BEM, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 28, pp.205~211.

Schnur, D.S., Zabaras, N. (1990) Finite element solution of two-dimensional inverse elastic problems using spatial smoothing, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 30, pp.57~75.

Zhang, F., Kassab, A.J., Nicholson, D.W. (1997) A boundary element solution of an inverse elasticity problems and applications to determinining residual stress and contact stress, *International Journal of Solids and Structures*, pp.2073~2086.