

유한변형과 굽힘효과가 고려된 3차원 보-기둥요소에 의한 공간구조물의 분기좌굴해석

A Bifurcation Analysis of Space Structures by Using 3D Beam-Column Element Considering Finite Deformations and Bowing Effect

이 경 수† 한 상 을*

Lee, Kyung-Soo Han, Sang-Eul

(논문접수일 : 2009년 5월 24일 ; 심사종료일 : 2009년 8월 10일)

요 지

본 논문은 기하학적 비선형성을 가진 보존적 단일 하중 매개변수의 탄성 상태 공간구조의 탄성 분기 좌굴해석을 위한 공간프레임의 정식화, 분기경로 추적을 위한 pin-pointing 및 분기경로 전환알고리즘을 기술하고 있다. 복잡한 좌굴 후 거동특성을 파악하기 위한 본 연구의 공간프레임요소는 오일러리안 좌표계에 의한 유한회전이론으로 강체변형을 계산하였고, 굽힘효과가 고려된 보-기둥식을 적용하여 적은 개수의 요소의 사용으로도 정해를 얻을 수 있도록 하였으며, 후좌굴해석과 같은 고도의 비선형해석을 수행하기 위해 기하강성행렬의 모멘트에 대한 영향을 고려하였다. 분기좌굴에 의한 좌굴 후 평형상태인 주경로와 분기경로의 pin-pointing 알고리즘으로 특이점을 계산하였으며, 고유치 및 고유모드를 이용한 본 연구의 수치알고리즘에 의해 분기경로를 추적하였다. 분기좌굴 해석예제로 평면프레임, 평면아치 및 공간돔에 대한 분기좌굴 해석을 수행하여 본문에서 제시한 수치해석법의 정확성 및 적용성을 검증한다.

핵심용어 : 탄성안정, 분기좌굴, 공간프레임, 오일러리안, 유한변형

Abstract

The present paper briefly describes the space frame element and the fundamental strategies in computational elastic bifurcation theory of geometrically nonlinear, single load parameter conservative elastic spatial structures. A method for large deformation(rotation) analysis of space frame is based on an eulerian formulation, which takes into consideration the effects of large joint translations and rotations with finite deformation(rotation). The local member force-deformation relationships are based on the beam-column approach, and the change in member chord lengths caused by axial strain and flexural bowing are taken into account. and the derived geometric stiffness matrix is unsymmetric because of the fact that finite rotations are not commutative under addition. To detect the singular point such as bifurcation point, an iterative pin-pointing algorithm is proposed. And the path switching mode for bifurcation path is based on the non-negative eigen-value and it's corresponding eigen-vector. Some numerical examples for bifurcation analysis are carried out for a plane frame, plane circular arch and space dome structures are described.

Keywords : *elastic stability, bifurcation, space frame, eulerian, finite deformation*

1. 서 론

구조물의 탄성좌굴은 뒹좌굴, Snap-Back좌굴, 분기좌굴로 나눌 수 있으며, 이중 분기좌굴을 일반적으로 구조물의 좌굴이라 한다. 탄성안정이론에 의하면 불안정상태는 극한점과 분기점으로 분류될 수 있는데, 극한점의 특성을 갖는 좌

굴은 뒹좌굴과 Snap-Back좌굴이며, 분기점의 특성을 갖는 좌굴은 분기좌굴이다. 일반적으로 뒹좌굴과 Snap-Back좌굴과 같은 극한점 좌굴은 돔, 셸과 같은 공간구조물이 상부 정점부근에 집중하중이 작용할 때 주로 발생하며, 평형경로상의 평형점의 계산 및 평형경로상의 특이점을 찾기 위한 pin-pointing 반복계산을 수행하는 일반적인 비선형 수치해석법

† 책임저자, 정회원 · 인하대학교 건축공학과 박사과정

Tel: 032-874-3626 ; Fax: 032-873-5724

E-mail: lks1838@naver.com

* 종신회원 · 인하대학교 건축학부 교수

• 이 논문에 대한 토론을 2009년 10월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2009년 12월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

으로 극한점을 계산할 수 있다.

이에 비해서 분기좌굴은 등분포하중 상태의 공간구조물이나 압축력을 받는 구조물에서 주로 발생하는데, 분기좌굴해석을 위해서는 좌굴 후 분기경로의 추적을 위한 분기경로 전환 및 분기점 탐색 알고리즘이 추가적으로 필요하게 된다. 또한 좌굴 이후의 주경로 및 분기경로와 같은 복잡한 평형경로 파악을 위한 공간프레임 요소는 유한회전(finite rotation)에 의한 대변형 특성을 고려할 수 있어야 한다. 따라서 본 연구에서는 오일러리안 좌표계(Euler, 1775; Goldstein, 1980; Cheng 등, 1989)에 의한 유한회전으로 강제변형을 계산하였고, 굽힘효과(bowing effect)가 고려된 보-기둥식(Kassimali, 1983; Kassimali 등, 1991, 이경수 등, 2009)을 적용하여 적은 개수의 요소의 사용으로도 정해를 얻을 수 있도록 하였으며, 분기좌굴해석과 같은 고도의 비선형해석을 수행하기 위해 기하강성행렬의 모멘트에 대한 영향을 고려하였다.

본 연구에서는 극한점과 분기점을 구분하는 임계점의 특성을 파악하기 위해 평형방정식의 고차항은 고려하지 않은 상태에서 최소고유치에 의해 결정되는 매개변수의 계산을 통해 임계점을 탐색하는 간접법(Riks, 1979; 1984; Fujii 등, 1993)을 사용하였으며, 단순분기의 경우에 대해서만 최소고유치를 이용하였던 이전연구와 달리, 고유치에 대한 보정을 통한 재 정렬을 수행하여 특해모드의 계산 없이도 다분기나 복합분기의 분기경로를 탐색할 수 있는 수치해석법을 제안하였다. 또한 고유치해석을 수행하여 얻은 최소고유모드를 분기모드로 이용하는 Fujii 등(1993, 1997)의 방법을 이용하여 분기경로를 추적하였다.

분기좌굴과 관련된 대표적인 해석예제의 수행 및 결과 분석을 통하여 대변형 해석이 가능한 공간프레임요소와 제안된 분기좌굴 해석법의 정확성을 검증하였다.

2. 절점방향행렬(Joint rotation matrix)

절점회전이 미소하다는 가정에 의하면, 이전 스텝까지의 절점변형에 현재 스텝의 증분변형을 단순 증가시켜 현재까지의 절점변형을 계산할 수 있다. 따라서 현재의 변형상태에 대한 절점방향(joint orientation)을 결정하는 것은 단순 증분식으로 표현된다. 이러한 특성을 수학용어로 가환(可換, commutative)성을 가진다고 정의한다. 그러나 절점변형이 유한(finite)할 경우에는 미소변형의 경우 적용할 수 있었던 가환성을 유지할 수 없다. 따라서 현재의 변형상태에 대한 절점의 회전에 대한 방향을 결정하기 위해서는 오일러의 유한회전이론(Euler, 1775; Goldstein, 1980; Cheng 등, 1989)으로 절점방향을 결정해야 한다. 오일러이론에 의하면

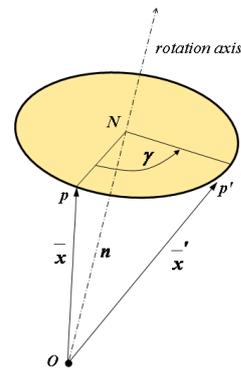


그림 1 오일러 유한 회전 정식화를 위한 방향벡터

강체의 변형은 그림 1과 같이 임의의 축에 대한 회전으로 나타낼 수 있다. 벡터 \bar{x} 로 표현되는 강체의 점 p 는 기준점 O 에 대한 방향벡터 n 에 의한 기준축을 중심으로 회전각 γ 만큼 변형했을 때, 변형 후 p' 를 나타내는 벡터 \bar{x}' 는 n 과 γ 에 의해 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \bar{x}' &= \bar{x} \cos \gamma + (n \times \bar{x}) \sin \gamma + n(n \cdot \bar{x})(1 - \cos \gamma) \\ &= \bar{x} + (n \times \bar{x}) \sin \gamma + [n \times (n \times \bar{x})](1 - \cos \gamma) \end{aligned} \quad (1)$$

강체변환에 대한 벡터형식의 위식은 행렬의 형태로 아래와 같이 다시 나타낼 수 있다.

$$\bar{x}' = W \bar{x} \quad (2)$$

$$W = \begin{bmatrix} \cos \gamma + \mu n_1^2 & -n_3 \sin \gamma + \mu n_1 n_2 & n_2 \sin \gamma + \mu n_1 n_3 \\ n_3 \sin \gamma + \mu n_1 n_2 & \cos \gamma + \mu n_2^2 & -n_1 \sin \gamma + \mu n_2 n_3 \\ -n_2 \sin \gamma + \mu n_1 n_3 & n_1 \sin \gamma + \mu n_2 n_3 & \cos \gamma + \mu n_3^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{with } \mu = 1 - \cos \gamma \quad (3)$$

위 식 (3)의 행렬은 임의의 절점의 대변형에 대해 유효한 회전행렬이며, 오일러에 의해 최초로 유도되었다.

변형 후의 절점 방향에 대한 표현은 서로 직교하는 3개의 기준축에 대한 방향벡터 성분들로 나타낼 수 있으며, 편의상 변형전 절점의 기준축이 전체좌표계에 대해서 평행한 상태이고, 또한 각 축에 대한 방향벡터 성분들이 서로 직교한다고 가정하여, 식 (3)의 행렬을 절점방향행렬(joint orientation matrix; Oran, 1973; Kassimali 등, 1991)이라 정의한다.

$$w = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \end{bmatrix} \quad (4)$$

외부하중에 대한 구조물의 증분해석을 수행할 때, 구조물이 외부하중에 의해 변형하면 공간프레임의 임의의 절점도

변형에 대해서 절점의 위치 및 방향이 변화하게 된다. 절점이 임의의 n_1, n_2, n_3 의 방향벡터 성분을 가진 축에 대하여 회전각, γ 만큼 회전하였을 때, 변형 후 새로운 절점방향행렬은 \bar{w} 은 변형 전 절점방향행렬 w 와 회전변환행렬(rotation matrix), W 에 의해 식 (4)의 형태로 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\bar{w} = W(\gamma, n_i) w \tag{5}$$

3. 부재방향행렬과 상대변형

공간프레임 각 부재의 상대변형과 강체변형(rigid body rotation)을 분리하기 위해서 오일러리안(Eulerian) 부재좌표계가 사용된다. 부재가 외부하중에 의해 변형을 하게 되고, 부재가 상대변형을 나타내기 때문에 \bar{x}_2, \bar{x}_3 축은 양단 절점 방향의 평균값을 사용한다. 부재좌표계는 부재방향행렬, r 로 나타낼 수 있으며, 부재방향행렬의 각 열벡터는 전체좌표계의 각축에 대한 부재좌표계의 방향벡터로 표현된다. 부재 양단의 변형 후 절점 위치와 절점방향이 계산되면, 부재의 상대변형과 변형 후 부재방향행렬은 다음과 같이 나타낼 수 있다(Kassimali 등, 1991).

양단에서의 \bar{x}_1 축에 수직한 축에 대한 단면방향행렬은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$e^{(i)} = W(\theta_i, n_i)^{(i)} p^{(i)} \quad i=1,2 \tag{6}$$

식 (6)에서 $p^{(i)}$ 는 양단의 단면방향행렬이고, $p^{(i)}$ 를 식 (3)의 회전변환행렬을 이용해서 주축의 방향벡터 n_i 에 대해 절점 회전각 θ_i 만큼 회전시켜 계산한다. \bar{x}_2, \bar{x}_3 축방향에 대한 부재방향벡터, r_2, r_3 는 아래 식과 같이 근사행렬의 2, 3번째 행렬로 계산되며, 정규화되어 부재방향행렬, r 을 구성한다.

$$r \cong \frac{1}{2} [e^{(1)} + e^{(2)}] \tag{7}$$

부재의 상대변형(relative deformation)이 미소하다는 가정에 의해 양단의 상대변형은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\theta_{ij} = -\theta_i (n_i \cdot r_j) \quad (i=1,2 ; j=2,3) \tag{8}$$

$$\sin\phi_t = e_3^{(1)T} e_2^{(2)} \tag{9}$$

4. 부재변형-부재력 관계식

강접합 3차원 공간프레임의 부재력은 보-기둥이론에 의해 아래식과 같이 나타낼 수 있다(Oran, 1973; Kassimali 등, 1991).

$$M_{1j} = \frac{EI_j}{l} (c_{ij}\theta_{1j} + c_{2j}\theta_{2j}) \quad (j=2,3) \tag{10}$$

$$M_{2j} = \frac{EI_j}{l} (c_{2j}\theta_{1j} + c_{1j}\theta_{2j}) \quad (j=2,3) \tag{11}$$

$$M_t = \frac{c_t}{l} \psi_t \tag{12}$$

$$Q = EA \left(\frac{u}{L} - \sum_{j=2}^3 c_{bj} \right) \tag{13}$$

$$c_{bj} = b_{1j} (\theta_{1j} + \theta_{2j})^2 + b_{2j} (\theta_{1j} - \theta_{2j})^2 \tag{14}$$

위 식에서 A 는 단면적, E 는 탄성계수, I_j 는 X_j 축에 대한 단면2차모멘트이고, c_{1j}, c_{2j}, c_t 는 각각 부재축력에 의한 X_j 축 휨모멘트의 안정함수, 비틀림 안정함수이며, c_{bj} 는 X_j 축 굽힘 효과에 의한 축변형계수이다. 위 식에서 안정함수 c_{1j}, c_{2j} 와 축변형계수, c_{bj} 는 부재축력의 무차원화 계수, q 에 관한 함수로서 q 는 부재축력 Q 에 의해 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$q_j = \frac{Q}{Q_{Euler}} = Q \frac{L^2}{\pi^2 EI_j} \tag{15}$$

식 (10)~식 (13)의 부재력, 부재변형의 관계를 식으로 표현하면 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$s^T = \{M_{13}, M_{23}, M_{12}, M_{22}, M_t, QL\} \tag{16}$$

$$\bar{u}^T = \left\{ \theta_{13}, \theta_{23}, \theta_{12}, \theta_{22}, \psi_t, \frac{u}{L} \right\} \tag{17}$$

$$\bar{u} = \bar{B}^T \bar{d} \tag{18}$$

$$F = R \bar{f} = R \bar{B} s = R \bar{B} t u \tag{19}$$

식 (18)에서 \bar{B} 는 부재좌표계(오일러좌표계)에서 절점력에 대한 부재력의 변환행렬이다. 식 (19)의 부재력에 의한 절점력의 식은 구조물의 평형관계식으로 볼 수 있으며, 따라서 식 (19)의 미소증분변위에 대한 미분형태로 아래와 같이 접선강성행렬을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} \Delta F &= R \bar{B} (\Delta s) + R (\Delta \bar{B}) s + (\Delta R) \bar{B} s \\ &= (K_E + K_G) \delta d \end{aligned} \tag{20}$$

식 (20)의 오른쪽 첫 번째항은 탄성강성행렬이고, 두 번째, 세 번째항은 기하강성행렬이 된다. 미소변형 이론을 적용할 경우, 식 (20)의 오른쪽 세 번째항은 상수가 되어 소거된다. 본 논문에서는 대변형에 의한 유한변형을 고려하였기 때문에 식 (20)의 오른쪽 세 번째항은 소거되지 않게 된다. 유한회전에 의한 기하강성행의 자세한 유도과정은 참고문헌 (Spiller, 1990; Argyris 등, 1979; 이경수 등, 2009)에 기술되었다.

6. 보-기둥요소의 비선형해석

보-기둥요소의 경우 굽힘효과에 의해 축력과 휨모멘트가 비선형이 되기 때문에 반복계산과정을 통해 변형된 상태에서 정확한 부재축력을 계산해야 한다. 이를 위해 식 (13)을 무차원 축력계수 q 에 의해 아래와 같이 다시 표현한다 (Kassimali 등, 1991).

$$K(q) = \frac{\pi^2}{\lambda^2} q + \sum_{j=2}^3 c_{bj} - \frac{u}{L} = 0 \tag{21}$$

$$K'(q) = \frac{\pi^2}{\lambda^2} + \sum_{j=2}^3 c_{bj}' \tag{22}$$

위 식으로부터 무차원 증분 축력계수 Δq 는 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\Delta q = - \frac{K(q_i)}{K'(q_i)} \tag{23}$$

따라서 $i+1$ 반복단계에서의 $q_{i+1} = q_i + \Delta q_i$ 이고, $|\Delta q_i|$ 가 수렴할 때까지 반복계산을 수행하여 축력을 계산한다.

7. 평형경로의 탐색

비선형 평형경로를 계산하는 가장 효율적인 해석법은 호장법이라 할 수 있다. Newton-Raphson법을 이용한 일반적인 증분형 해석법(변위, 하중 증분법)은 하중 혹은 변위를 매개변수를 이용하여 해석을 수행하기 때문에, 비선형 평형경로 상에서 발행하는 극한점과 같은 변곡점 이후의 거동을 정확하게 계산할 수 없다. 이에 반해 호장법은 미리 정의된 호장 매개변수 a 를 적용한 호장제약식을 통해 기본경로상의 변위와 하중매개변수 $[d, \lambda]$ 를 동시에 계산할 수 있어 극한점, 분기점과 같이 평형경로 상에 발생하는 복잡한 변곡점 이후의 거동을 매우 정확하게 계산할 수 있다. 호장법에서는 예측

(predictor)단계에서는 호장제약식을 이용하여 아래의 두 식을 연립하여 변위 하중매개변수 $[\Delta d, \Delta \lambda]$ 를 계산한다.

$$K_i \Delta d - \Delta \lambda p = 0 \tag{24}$$

$$\Delta d^T \Delta d + b \Delta \lambda^2 p^T p = \Delta l^2 \tag{25}$$

b : 비례상수, Δl : 호장길이

식 (25)에서 비례상수 b 의 값에 따라 구형 호장제약식, 원통형 호장제약식으로 구분되며, 본 논문에서는 $b=1$ 로 하여 Riks의 구형호장법(細野秀, 1974; Riks, 1979; 1984; Fujii 등, 1993)을 적용하였다.

예측단계에 대한 수직방향의 수정(corrector)단계의 반복 계산에서는 식 (24), 식 (25)를 선형화하여 아래 식을 연립하여 $[\delta d, \delta \lambda]$ 를 계산한다.

$$K_i \delta d - \delta \lambda p = g(d_i, \lambda_i) \tag{26}$$

$$\Delta d^T \delta d + b \Delta \lambda \delta \lambda^2 p^T p = 0 \tag{27}$$

기본경로에 대한 평형점은 예측단계의 매개변수인 호장길이 Δl 에 의해 반복 수렴과정을 통해 결정되며, 증분 변위, 증분 하중매개변수는 아래의 식으로 수정된다.

$$\lambda_{i+1} = \lambda_0 + \Delta d \lambda_{i+1} = \lambda_i + \delta \lambda_i \tag{28}$$

$$d_{i+1} = d_0 + \Delta d_{i+1} = d_i + \eta_i \delta d_i \tag{29}$$

$$\Delta d_{i+1} = \Delta d_i + \eta_i \delta d_i \tag{30}$$

$$\eta_i = \rho \Delta l_i \tag{31}$$

식 (29)에서 η_i 는 평형경로의 접선기울기에 비례하는 계수이며, ρ 는 호장길이에 대한 비례상수로 $0 < \rho \leq 1$ 의 값을 사용한다.

8. 좌굴판정기준(Pin-pointing 알고리즘)

일반적으로 비선형 좌굴해석을 위한 수치계산에 있어서 구조물의 접선강성행렬의 행렬식의 값이 0 또는 최소고유치가 0이 되는 위치를 좌굴점으로 간주한다.

본 논문에서는 기본경로에 대한 매개변수로 호장길이 Δl 를 사용하였으며, $\Delta l \cong 0$ 일 때 극한점이나 분기점 같은 임계점에 도달하였다고 판단한다. 이와 같이 어떤 매개변수의 값을 통해 간접적으로 좌굴상태를 파악하는 방법을 좌굴판정에 대한 간접법이라 하고, 직접법은 임계조건을 나타내는 확장시스템을 이용해 임계점과 관련된 고유모드를 얻는데 사용되며, 이를 위해 추가식이 비선형 평형방정식에 추가된다.

간접법은 분기점을 찾는 방법 중 가장 일반적인 방법으로, 임계주적 매개변수인 호장 Δl 를 계산하는데, 최소고유치나 강성행렬의 행렬식을 사용한다. 행렬식을 이용하는 방법은 행렬식의 부호를 통해 임계상태를 파악하는 단계에는 적용가능하지만(Crisfield, 1997; Fujii 등, 1993), 호장길이를 결정하는 단계에서는 부정확한 결과를 나타내었다. 그 이유는 호장길이가 0에 매우 근접하였을 때, 행렬식이 해석오차가 발생하여 비정상적인 값을 나타내었기 때문이다. 이에 반해 최소고유치를 이용하면(한상을 등, 2000; 細野秀, 1974; Riks, 1979; 1984; Fujii 등, 1997), 계산과정은 보다 더 요구되지만, 행렬식을 이용하는 경우에 비해 보다 더 정확한 임계상태 및 호장길이의 계산이 가능하였다.

임의의 k -단계까지의 평형경로의 호장을 l_k 라하고, 임계점 l^* 에서의 고유치 $w(l^*)$ 를 테일러급수 전개하면 아래식과 같이 나타낼 수 있다.

$$w(l^*) = w(l_k) + \dot{w}(l_k)\Delta l_k + \frac{1}{2}\ddot{w}(l_k)\Delta l_k^2 + \dots \quad (32)$$

단순 분기의 경우에 대해서만 식 (32)를 고려하였던 이전 연구(한상을 등, 2000; 細野秀, 1974; Crisfield, 1997; Riks, 1979; 1984)에서는, 다분기나 복합분기를 위해서는 특해모드의 계산을 위해서 종속행렬을 소거한 강성행렬의 축약과정이 필요하였고, 이 과정이 복잡한 분기해석을 저해하는 수치 해석적 단점을 야기하였다(한상을 등, 2000; Choong 등, 1993).

고유한 임계점에서의 최소고유치는 항상 $w_1(l^*) \cong 0$ 이어야 하는 조건에 의해 본 연구에서는 고유치해석 후 각각의 고유치에 대한 보정(shift; Crisfield, 1997)을 통한 재정렬을 수행하여 평형경로에서 발생하는 여러 개의 임계점에서 각각의 최소고유치 $w_1(l^*) \cong 0$ 되도록 하였으며, 분기경로의 계산을 위해서 이때의 최소고유치에 대한 최소고유벡터를 사용함으로써, 특해모드의 계산 없이도 다분기나 복합분기의 분기경로를 탐색할 수 있다.

식 (32)에서 고차항은 소거한 상태에서 Δl_k 에 대해 다시 정리하면 다음이 나타낼 수 있다.

$$\Delta l_k = -\frac{w_1(l_k)}{\dot{w}_1(l_k)} \cong -\frac{w_1(l_k) \Delta l_{k-1}}{w_1(l_k) - w_1(l_{k-1})} \quad (33)$$

임계점에 접근할수록 $\Delta l_k \rightarrow 0$ 이 되므로 다음 식으로 임계점을 판단한다.

$$\Delta l_k < \epsilon \Delta l_1 \quad (34)$$

9. 분기경로 전환 알고리즘

평형경로에서 정해벡터 d_i 가 분기점(a^*) 근방에 도달하였을 때, 분기 후 경로에 대한 초기 근사해는 분기점에 적당한 크기를 가진 근사 분기모드 \tilde{d}_i 를 더함으로써 다음식의 형태로 나타낼 수 있다.

$$d_i = d_{i-1} + \eta_i \tilde{d}_i \quad (35)$$

Crisfield(1997), Wriggers 등(1988)은 근사 분기모드를 구하는데 고차항도 고려하였지만, 본 논문에서는 근사 분기모드를 구하는데, 고차항은 고려하지 않은 상태에서 고유벡터만 사용하여 단순분기 및 다중분기모드를 예측하였으며, 식 (35)의 근사 분기모드에 대한 일반적인 형태로 Fujii 등(1993, 1997)가 제안한 다음 식을 사용하였다.

$$\tilde{d} = \sum_{m=1}^n \alpha_m \phi_m \quad (36)$$

(n : number of zero eigenvalue at critical point)

10. 검증예제의 수행

10.1 평면아치의 분기좌굴해석

Sabir 등(1973)은 유한요소법과 변위증분법에 의해 분기경로를 제시하였고, 細野秀(1974)는 2차원 빔요소와 호장법

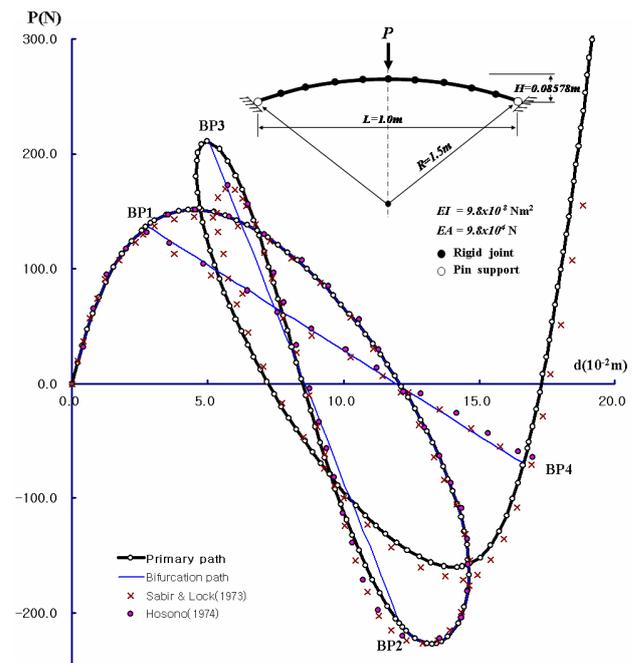


그림 2 평면아치 정점의 수직방향 하중-변위 그래프

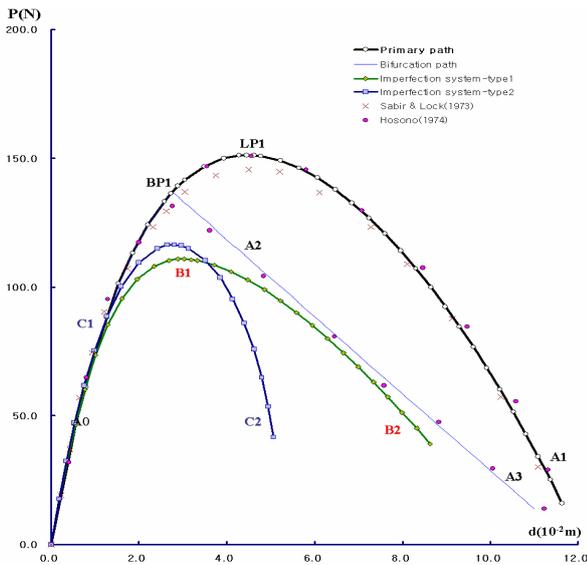


그림 3 불완전형상에 따른 정점의 하중-변위 그래프

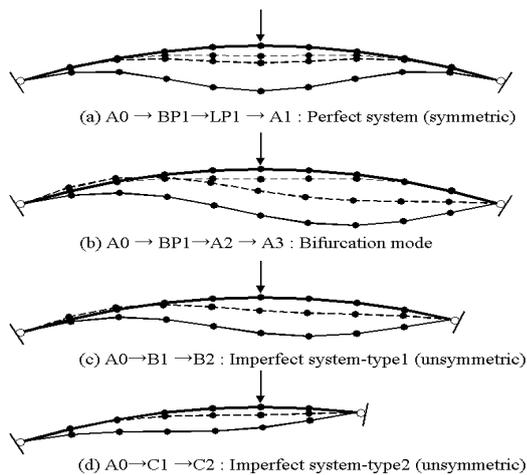


그림 4 불완전형상에 따른 평면아치의 거동 형상

를 이용하여 해석을 수행하였다. 해석모델은 細野秀(1974)의 방법에 따라 그림 2와 같이 평면아치를 10개의 공간프레임 요소로 모델링하였고, 이에 대한 좌굴해석결과 평형경로 상에서 4개의 분기점이 발생함을 성공적으로 해석할 수 있었다. 특히 이전 연구(Sabir 등, 1973; 細野秀, 1974)에서는 BP1-BP4를 연결하는 분기경로만 보고되었던 것과 달리, 본 연구에서는 BP2-BP3을 연결하는 분기경로가 추가로 발견되었다. 그림 3은 그림 4와 같이 기하학적 형상불완전이 도입되었을 때의 하중-변위곡선이다. 형상불완전은 완전한 아치 형상에서 오른쪽의 지지점 위치를 중심방향으로 옮김으로써 구조물에 비대칭성을 도입하였다. 해석결과 그림 4에서와 같이 주경로 상에서는 완전성(대칭)을 나타내고, 분기경로나 형상불완전에 대해서는 비대칭임을 알 수 있다.

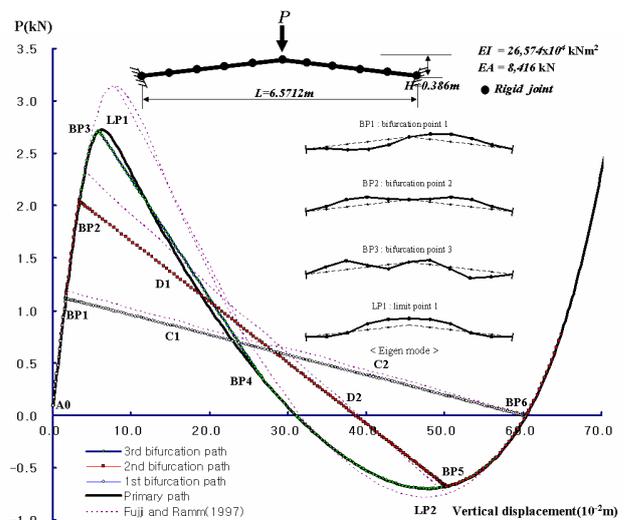


그림 5 평면프레임 정점의 수직방향 하중-변위 그래프

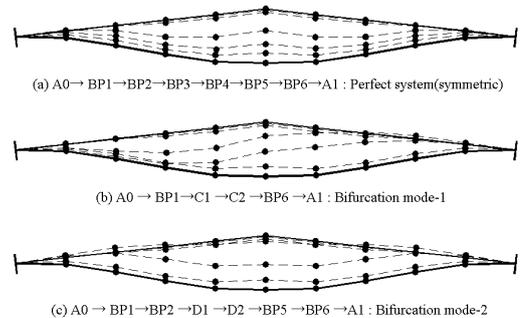


그림 6 평면프레임의 변형형상

10.2 평면프레임의 분기좌굴해석

평면프레임에 대한 분기좌굴해석을 수행하여 Fujii 등(1997)의 결과와 비교하여 그림 5에 나타내었다. 그림 6은 주경로와 분기경로에 대한 변형형상이며, 해석결과 평형경로 상에서 3개의 분기경로와 6개의 분기점을 찾을 수 있었다.

전체적인 해석결과 및 거동특성은 Fujii 등(1997)의 결과와 일치하였으나 좌굴하중의 크기는 차이를 보였는데, 이는 각각의 연구에서 사용된 요소의 차이에서 발생한 것으로 판단된다. 해석과정 중에 발생하는 3개의 분기경로 중에서 두 번째, 세 번째 분기경로는 각각 BP4, BP5에서 주경로로 다시 복귀하는데, 이는 본 연구의 공간프레임요소가 대변형에 의한 강체변형을 정확히 계산하고 있기 때문이며, 부정확한 강체변형의 계산은 분기 후 주경로로의 복귀 시 오차를 보이게 된다(이경수 등, 2009).

10.3 공간프레임의 좌굴해석

Chu 등(1972), Kassimali 등(1991)은 등분포 절점하중

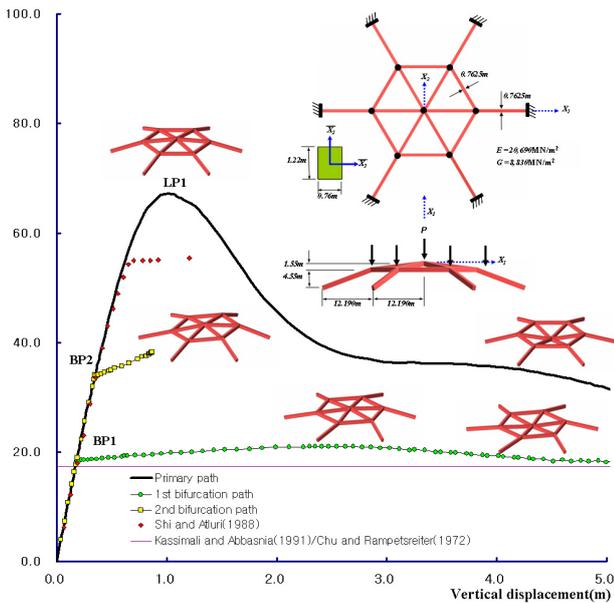


그림 7 공간프레임 정점의 수직방향 하중-변위 그래프

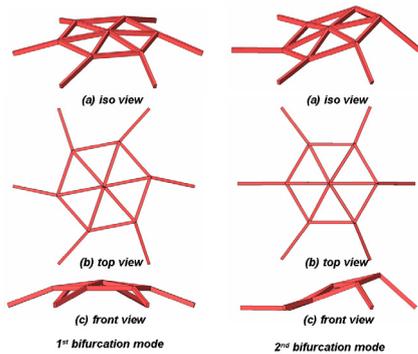


그림 8 분기좌굴모드

이 작용하는 본 예제에 대한 좌굴하중으로 각각 17.355MN, 17.413MN 을 제시하였으며, 해석결과 첫번째 분기점에서의 좌굴하중이 17.400MN 으로 계산되어 이전 연구의 좌굴하중과 거의 일치하는 결과를 얻을 수 있었다. 저자의 조사에 의하면 아직까지 본 예제에 대한 분기경로를 제시한 이전의 연구는 없는 것으로 판단되어 첫 번째 분기점의 좌굴하중의 비교만으로 본 예제에 대한 정확성을 검토하였다. 그림 7과 그림 8에 각각 주경로 및 분기경로에 대한 하중-변위곡선과 분기점에서의 분기모드를 나타내었다. 그림 7로 부터 극한점 이전에 발생하는 2개의 분기점까지 하중-변위관계가 선형으로 거동하다가 구조물에 갑자기 분기좌굴이 발생하고 있음을 알 수 있는데, 분기경로의 변형형상은 그림 8의 분기모드에 중속적임을 알 수 있다. 따라서 비대칭 접선강성행렬을 나타내는 본 연구의 공간프레임요소와 분기좌굴해석법은 공간프레임에 대해서도 정확한 분기모드 및 분기경로를 해석할 수 있음을 확인할 수 있었다.

11. 결 론

본 논문에서는 대변형 공간프레임요소를 이용하여 공간구조의 분기좌굴해석을 위한 평형경로 탐색, 좌굴판정기준, 분기경로 전환 등의 수치해석알고리즘을 제시하였다.

평형경로 탐색은 호장법을 사용하였고, 좌굴판정기준을 위해서 특해모드의 계산이 필요없는 간접법을 제안하였으며, 이를 Fujii 등(1993, 1997)의 다분기해석 알고리즘에 적용하였다.

본 연구의 공간프레임요소는 유한변형과 굽힘효과를 고려한 보-기둥식에 의해 유도되었으며, 본 연구의 분기좌굴이론에 적용하여, 다양한 검증예제에 대한 정확한 분기좌굴해석을 수행할 수 있었다. 검증예제의 해석결과는 기존의 연구문헌에서 보고되었던 좌굴특성 및 분기경로 등의 결과와 일치하거나 근접하였으며, 예제 2, 예제 3의 경우에는 추가적인 분기경로를 탐색할 수 있었다.

따라서 분기좌굴해석을 위한 본 논문의 해석알고리즘은 공간구조 및 일반구조의 좌굴해석에 효율적으로 적용가능 할 것으로 사료된다.

감사의 글

본 논문은 2005년 한국건설교통기술평가원(과제번호:05 건설핵심C02)의 연구비 지원으로 이루어진 것으로, 이에 감사드립니다.

참 고 문 헌

이경수, 한상을 (2009) 공간프레임의 대변형 해석을 위한 오일러리안 정식화, 대한건축학회 구조계, 25(1), pp.73~80.
 한상을, 윤한흠 (2000) 래티스 돔의 다분기 해석을 위한 알고리즘. 대한건축학회. 16(9), pp.3~9.
 한상을, 이경수 (2007) 공간구조의 후좌굴 해석에 관한 연구, 대한건축학회 구조계, 23(7), pp.53~60.
 한상을, 이경수 (2007) 공간구조의 비선형 탄소성 후좌굴해석에 관한 연구, 대한건축학회 구조계, 23(12), pp.59~68.
 細野秀 (1974) 弧長法たよる彈性挫屈問題の解析, 博士學位論文, 東京大學.
 Argyris, J.H., Balmer, H., Doltsinis, I. St., Dunne, P.C., Haase, M., Kleiber, M., Malejannakis, G.A., Mlejnek, H.P., Muller, M., Scharpf, D.W. (1979) Finite element method-The natural approach, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 17/18, pp.1~106.
 Cheng, H., Gupta, K.C. (1989) An historical note

- on finite rotations, *J. Applied Mechanics*, 56, pp.139~145.
- Chu, K.H., Rampetsreiter, R.H.** (1972) Large deflection buckling of space frames, *J. Struct. Div., ASCE*, 98(12), pp.2701~2722.
- Choong, K.K., Hangai, Y.** (1993) Review on methods of bilurcation analysis for geometrically nonlinear structures, *Int. Assoc. Shells Spatial Structures*(issue dedicated to SEIKEN-IASS Symposium on Nonlinear Analysis and Design for Shell and Spatial Structures), 34(2), pp.133~149.
- Crisfield, M.A.** (1997) *Nonlinear finite element analysis of solids and structures*, 2, Advanced Topics, John Wiley & Sons.
- Euler, L.** (1775) Formulae Generales pro Translacione Quacunqve Corporum Rigiddrum, *Novi Commentari Acad. Imp. Petrop.*, 20, pp.189~207.
- Fujii, F., Asada, K.** (1993) Branch-switching in simple spatial bifurcation models, *SEIKEN-IASS Svmp. on Nonlinear Analysis and Design for Shells and Spatial Structures, Tokyo*, pp.515~522.
- Fujii, F., Ramm, E.** (1997) Computational bifurcation theory-path-tracing, pinpointing and path-switching, *Engineering Structures*, 19, pp.385~392.
- Godstein, H.** (1980) *Classical Mechanics*, Addison-Wesley.
- Kassimali, A.** (1983) Large deflection analysis of elastic-plastic frames., *J. Struct. Eng., ASCE*, 109(8), pp.1869~1886.
- Kassimali, A., Abbasnia, R.** (1991) Large deformation analysis of elastic space frames, *J. Struc. Eng., ASCE*, 117(7), pp.2067~2087.
- Oran., C.** (1973) Tangent stiffnes in space frame, *J. Struct. Div., ASCE*, pp.987~1001.
- Riks, E.** (1979) An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems, *Int., J. Solids Structures*, 15, pp.529~551.
- Riks, E.** (1984) Some computational aspects of the stability analysis of nonlinear structures, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 47, pp.219~259.
- Sabir, A.B., Lock, A.C.** (1973) Large deflection, geometrically nonlinear finite element analysis of circular arches, *Int. J. Mech. Sci.*, 15, pp.37.
- Shi, G., Atluri, S.N.** (1988) Elasto-plastic large deformation analysis of space-frames : a plastic-hinge and stress-based explicit derivation of tagent stiffness, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 26, pp.589~615.
- Spiller, W.R.** (1990) Geometric stiffness matrix for space frames, *Computers & Structures*, 36(1), pp.29~37.
- Wriggers, P., Wagner, W., Mische, C.** (1988) A quadratically convergent procedure for the calculation of stability points in finite element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 70, pp.329~347.