

경계요소법을 이용한 접촉해석의 효율적인 접촉면 검출기법

An Efficient Contact Detection Algorithm for Contact Problems with the Boundary Element Method

김 문 겸†

윤 익 중*

Kim, Moon-Kyum

Yun, Ikjung

(논문접수일 : 2009년 6월 8일 ; 심사종료일 : 2009년 7월 8일)

요 지

본 논문에서는 경계요소법의 평면 접촉해석에 사용될 수 있는 효율적인 접촉면 검출 알고리즘을 제시하였다. 접촉면 검출 알고리즘을 경계요소법에 적용하기 위하여, 경계요소법이 가지는 자료구조를 분석하였다. 경계요소법의 특징 중 하나인 모퉁이 문제를 고려하여 전역검색, 지역검색, 접촉관계식 설정의 3단계로 접촉면 검출기법을 구현하였다. 전역검색은 접촉주요소, 부요소 개념을 도입하였으며, 지역검색에 있어서는 공간분할기법인 사지트리를 이용하였다. 접촉관계식의 설정을 위하여 요소수준에서 절점의 접촉여부를 검토하고 최종계의 방정식에 구속조건을 할당하도록 하였다. 제시된 알고리즘을 이용한 프로그램의 정확성과 효율성을 입증하기 위하여 수치해석을 실시하여 결과를 비교하였다.

핵심용어 : 경계요소법, 접촉면 검출, 공간분할 알고리즘, 사지트리

Abstract

This paper presents an efficient contact detection algorithm for the plane elastostatic contact problem of the boundary element method(BEM). The data structures of the boundary element method are dissected to develop an efficient contact detection algorithm. This algorithm consists of three parts as global searching, local searching and contact relation setting to reflect the corner node problem. Contact master and slave type elements are used in global searching step and quad-tree is selected as the spatial decomposition method in local searching step. To set up contact relation equations, global contact searching is conducted at node level and local searching is performed at element level. To verify the efficiency of the proposed contact detection algorithm of BEM, numerical example is presented.

Keywords : boundary element method, contact detection, spatial decomposition method, quad tree

1. 서 론

접촉문제는 1896년에 Hertz가 두개의 탄성물체간의 접촉 문제를 해석적으로 풀어낸 이후로 활발한 연구가 이루어지고 있다. 현재까지 개발된 이론해는 매우 이상화된 문제에만 적용이 가능하므로 이론해를 통한 접촉문제 해석은 매우 제한적인 경우에만 가능한 것으로 알려져 있다(Karami, 1989).

최근에는 컴퓨터 계산 능력의 비약적인 향상에 힘입어 기존의 이론해로는 풀기 어려웠던, 접촉문제와 같이 복잡한 비선형 문제에 수치해석기법을 도입하고자 하는 연구가 시도되

고 있다. 특히 현재 수치해석분야를 선도하고 있는 패러다임인 유한요소법의 경우 다양한 연구가 진행되고 있다. 반면에 접촉문제가 본질적으로 경계영역에서 발생하는 현상임을 주목하여 경계요소법을 이용한 접촉문제 해석을 하고자 하는 시도도 계속되어 왔다. 특히, 경계요소법의 경우 해석영역의 요소망이 내부영역을 모형화할 필요가 없고, 표면력을 직접적으로 해석에 사용함으로써 접촉력의 산정이 보다 정확한 장점이 있다.

경계요소법을 이용한 접촉문제의 해석은 Andersson 등(1980)이 등변형 요소를 이용하여 2차원 문제를 해석한 것

† 책임저자, 종신회원 · 연세대학교 사회환경시스템공학부 교수
Tel: 02-2123-2803 ; Fax: 02-364-5300
E-mail: applymkk@yonsei.ac.kr

* 연세대학교 사회환경시스템공학부 박사과정

• 이 논문에 대한 토론을 2009년 12월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2010년 2월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

이 시발점으로 알려지고 있으며, 이를 시작으로 하여 경계요소법에 적용할 수 있는 다양한 접촉요소가 개발되었다(Karami, 1989; Olukoko 등, 1993; Paris 등, 1995; Bangyong 등, 2005). 접촉문제에서 나타나는 비선형성은 경계비선형으로 불리는데, 이는 접촉면의 면적이 가해지는 하중에 따라 지속적으로 변하는 현상을 의미한다. 즉, 접촉면의 면적이 접촉면에서 발생하는 상호 작용력의 형태와 크기에 따라 하중 단계별로 지속적으로 변하는 경계비선형문제를 유발함으로, 접촉해석을 위해서는 접촉면이 발생하는 위치와 크기 및 접촉면에서 발생하는 상호작용력 산정이 선행되어야 함을 의미한다(Zhong 등, 1996; Greco 등, 2004). 특히 접촉면의 요소망은 고밀도의 요소망이 요구되고, 비선형 해석의 모든 과정에서 접촉면의 검출이 필요하므로 접촉해석 과정의 40% 이상의 시간이 접촉면 검출에 소요되는 것으로 알려져 있다(Zhong 등, 1996). 국내에서는 이기수 등(2000)과 김용연 등(2007)에 의하여 유한요소법에 적용할 수 있는 접촉면 검출기법이 연구된바 있다.

이와 같이 접촉면 검출이 접촉문제의 주요한 문제임에도 불구하고, 경계요소법에서는 아직까지 효과적인 접촉면 검출을 위한 연구가 독자적으로 수행된 바가 없다. 따라서, 본 논문에서는 경계요소법의 특징을 고려하여 효과적으로 2차원 접촉문제의 접촉면을 검출할 수 있는 알고리즘을 제안하고자 한다.

본 논문의 구성순서는 2장에서 경계요소법의 정식화 과정과 특성에 대하여 간략히 언급하고, 이를 바탕으로 3장에서 접촉면 검출 알고리즘을 제안하였다. 4장에서는 수치해석을 수행하여 제시된 알고리즘의 정확성과 효율성을 검증하였다. 5장에서는 개발된 알고리즘의 핵심내용과 성능을 기술하였다.

2. 경계요소법의 접촉문제

2.1 경계요소법의 정식화

언급하였듯이 접촉문제는 해석영역 내부의 영역간 접촉면(interface)에서 발생하는 상호작용력과 접촉면적이 해석의 주요 인자로서, 이에 대한 경계요소법의 일반화된 접근 방법은 자기 접촉문제(self contact problem)를 제외한 경우 해석영역을 다수의 부영역(sub region)으로 분할하는 것이다. 이렇게 분할된 영역은 하나의 독립된 계로서 다루어지고 이는 일반적인 경계요소법의 적분방정식을 따라 구성된다. 이를 식으로 나타내면 식 (1)과 같이 나타낼 수 있다.

$$C_{ij}^{R_k}(x)u_j^{R_k} + \int_{\partial D_{nc}^{R_k}} T_{ij}^{R_k}(x, y)u_j^{R_k} \partial D^{R_k} + \int_{\partial D_c^{R_k}} T_{ij}^{R_k}(x, y)u_j^{R_k} \partial D^{R_k} = \int_{\partial D_{nc}^{R_k}} U_{ij}^{R_k}(x, y)t_j^{R_k} \partial D^{R_k} + \int_{\partial D_c^{R_k}} U_{ij}^{R_k}(x, y)t_j^{R_k} \partial D^{R_k} \quad (1)$$

여기서, 적분영역 R_k 는 k 번째 부영역을 나타내며, 적분영역 ∂D^{R_k} 는 해당 부영역의 경계를 나타낸다. 부영역의 경계는 접촉상태에 따라 접촉면은 적분영역 c 로 나타내고 접촉하지 않은 면은 nc 로 나타내었다.

이 경계 적분식은 켈빈문제의 일반해를 이용하여 아래의 식 (2)와 (3)을 사용하여 구체화할 수 있다.

$$U_{ji}(x, y) = \frac{1 + \nu'^{R_k}}{4\pi E'^{R_k}(1 - \nu'^{R_k})} [(3 - 4\nu'^{R_k})\delta_{ij} \ln \frac{1}{r} + r_{,i}r_{,j}] \quad (2)$$

$$T_{ji}(x, y) = -\frac{1}{4\pi(1 - \nu'^{R_k})r} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} [(1 - 2\nu'^{R_k})\delta_{ij} + 2r_{,i}r_{,j}] + (1 - 2\nu'^{R_k})(n_j r_{,i} - n_i r_{,j}) \right\} \quad (3)$$

이 경계 적분식을 풀기 위하여 접촉문제의 경계조건을 적용하는 방식은 다양한 방법이 개발되어 있으나, 본 논문에서는 Gao 등(2000)이 제시한 방법을 따랐다.

2.2 경계요소법의 모퉁이 문제

자기 접촉문제를 포함한 모든 접촉문제의 접촉면 검출은 본질적으로 독립된 계의 공간점유형태에 따라 수행된다. 유한요소법의 경우 한 절점에서 변위와 하중조건이 모두 결정되므로 절점의 위치만으로 구조계의 평형방정식을 구성할 수 있지만 경계요소법은 이와는 다른 특징을 갖는다.

경계요소법으로 구성되는 계의 외부절점이 평평(flat)한 경계위의 점이 아니면, 흔히 모퉁이 문제(corner node problem)으로 불리는 문제점이 발생한다(Brebbia 등, 1992). 이는 표면력이 경계의 법선벡터에 의하여 결정되므로 그림 1과 같

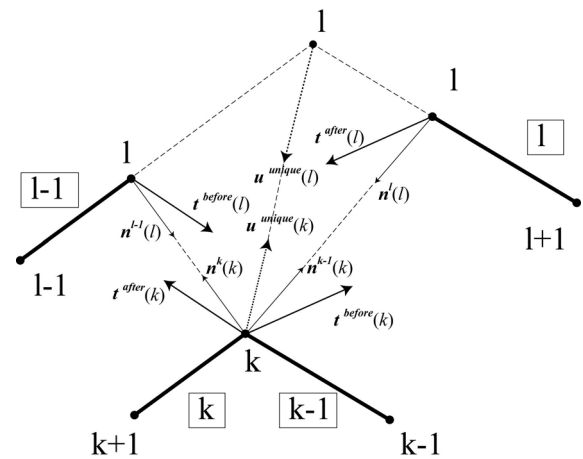


그림 1 경계절점위의 표면력과 변위분포

이 서로 다른 법선벡터를 갖는 요소의 경계절점 위에서는 하나의 동일한 변위와 서로 다른 표면력(multi-valued traction) 값이 발생하는 것을 의미한다.

따라서 경계요소법에서 접촉면 검출은 절점의 위치만을 판단하여 접촉면이 결정되는 유한요소법과는 달리, 절점과 요소의 접촉상태를 동시에 고려하여야 한다. 이는 요소와 절점의 접촉상태에 따라 계의 접촉조건이 상호독립적으로 생성됨을 의미한다. 즉, 변위제약조건은 절점의 접촉상태에 따라 결정되고, 표면력의 제약조건은 요소간의 접촉상태에 따라 접촉요소에 일대일 대응으로 부여된다. 이를 고려하여 본 논문에서는 모든 절점과 절점의 공간분포를 검사하여 접촉여부를 판단하고, 계산된 절점의 접촉상태를 요소수준에서 검사하여 요소의 접촉여부를 결정하였다. 접촉검사가 요소와 절점에 대하여 모두 수행되었을 경우 접촉상태는 아래에 열거된 것과 같이 5가지의 상태로 구분할 수 있으며, 각 경우에 따라 식 (4)와 (5)를 이용하여 접촉하는 계의 구속조건을 설정할 수 있다.

- 접촉이 발생하지 않은 경우 : 독립된 계로서 해석
- 절점만 접촉한 경우 : 절점의 변위는 식 (4)에 의해 한정됨
- 절점과 진입요소가 접촉한 경우 : 절점의 변위는 식 (4)를 따르며, 상응하는 진입요소의 절점의 표면력은 식 (5)를 따름
- 절점과 진출요소가 접촉한 경우 : 절점의 변위는 식 (4)을 따르며, 상응하는 진출요소의 절점의 표면력은 식 (5)를 따름
- 진출요소와 진입요소가 접촉한 경우 : 식 (4)와 (5)가 절점의 변위와 표면력 제약조건이 됨

$$u_n^{R_a} = u_n^{R_b} = 0, \quad u_t^{R_a} = u_t^{R_b} \quad (4)$$

$$t_n^{R_a} + t_n^{R_b} = 0, \quad t_t^{R_a} + t_t^{R_b} = 0 \quad (5)$$

3. 경계요소법의 접촉 검색알고리즘

경계요소법의 요소망은 해석대상 차원보다 한차원 낮은 수준에서 구성되지만, 접촉면의 검출은 각각의 독립된 영역이 공간상에 분포하고 있는 위상을 검토해야 함으로 해석대상 영역과 같은 차원으로 수행된다. 비록 본 논문에서 제시되는 알고리즘이 사지트리의 확장인 팔지트리를 이용하여 3차원까지 확장할 수 있으나, 알고리즘의 완결성을 위하여 2차원 영역의 검출 알고리즘으로 한정하였다.

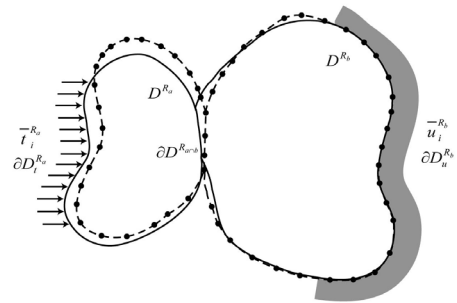


그림 2 접촉문제 해석을 위한 경계요소법의 요소망 예시

3.1 전역검색

효율적인 접촉면 검출 알고리즘 구축은 해석 영역이 접촉할 수 있는 부분을 한정짓는 것으로 시작할 수 있다. 즉, 접촉면이 발생하지 않거나, 해석 시작전에 결정된 접촉면이 해석이 끝난 후에도 동일한 접촉상태를 유지하는 경우에는 접촉면 검출에 소요되는 시간은 없으므로 가장 효율적인 접촉알고리즘이라 할 수 있다. 비록, 완전접촉문제(stick condition)을 제외한 대부분의 문제가 위의 조건을 만족시키지는 못하지만, 접촉영역을 접촉이 발생할 수 있는 영역과 발생할 수 없는 영역으로 한정하는 것은 가능하다. 일례로 그림 2에 나타난 접촉문제는 2개의 부영역이 접촉하는 영역 $\partial D^{R_a \cap b}$ 의 크기를 해석 전에 결정할 수는 없으나, 접촉영역의 크기를 사각영역안으로 한정짓는 것은 쉬운 일이다.

본 논문에서는 이를 이용하여 예상되는 접촉지역의 요소망을 사전에 접촉 주요소(contact master element)와 접촉 부요소(contact slave element)를 이용하여 구분하였다. 이는 유한요소법이 접촉 주절점(contact master node)과 접촉 부절점(contact slave node)를 이용하는 것과 상이한데, 이러한 차이가 발생하는 것은 경계요소법이 가지는 모퉁이 문제 때문이다. 모퉁이 문제로 인하여 경계절점에 접촉 조건을 부과할 경우 접촉요소와 비접촉요소의 경계점에서 추가적인 가상절점(dummy node)이 필요하게 되어, 이를 처리하는 불필요한 비용이 발생한다. 따라서, 본 논문에서는 모든 절점이 동일한 자료구조를 갖도록 설계하고, 요소가 접촉 상태를 검사하도록 하였다. 제시된 접촉요소의 주된 역할은 2가지로, 첫 번째는 접촉영역을 한정하여 검사영역을 줄이는 것이며, 두 번째는 최종계의 방정식에 영역간의 관계 방정식을 기술하기 위하여 사용된다.

3.2 지역검색

접촉 주요소와 부요소를 통하여 접촉면을 해석영역의 일부분으로 한정지을 수 있지만, 최종적인 접촉여부는 지역검색

을 통하여 이루어진다. 지역검색에서는 해석영역의 공간분포를 검토하기 위해 영역과 관계없이 주요소와 부요소에 속한 모든 절점을 공간상에 분포시키고 2점이 동일한 위치에 놓여 있는지를 확인한다. 2차원에서 해석 영역이 접촉하였을 때는 주요소와 부요소의 절점이 요소의 형상 함수에 따라 구성되는 1차원 공간에 위치하지만, 1차원 공간상에서는 절점의 공간적 분포를 확인할 수 없다. 그러므로 대상이 되는 모든 절점을 탐색해야 한다. 이는 계산기하학(Forrest, 1971)의 공간복잡도 개념을 따를 때 $O(N^2)$ 으로 매우 비효율적인 알고리즘이 된다. 따라서 본 논문에서는 $O(\text{Mog}(N))$ 의 공간복잡도를 갖는 사지트리를 이용하여 2차원 공간에 분포한 경계 요소의 절점을 검사하여 접촉절점을 검출하였다. 진술하였듯이, 경계요소법의 접촉면은 변위와 표면력 조건이 따로 결정되기 때문에 절점이 동일한 공간을 점유하고 있다면 변위 구속조건이 최종계의 방정식에 추가되어야 하고, 요소가 동일한 공간에 놓여 있다면 표면력구속조건이 추가되어야 한다. 본 연구에서는 이를 분리하여 지역검색에서는 절점의 접촉만을 판단하고 요소의 접촉은 최종계의 방정식을 요소내 절점의 접촉상태를 이용하여 판단하였다.

그림 2의 접촉문제에 사지트리를 적용하여 지역검색을 수행하였을 경우 그림 3과 같은 결과를 얻을 수 있다. 사지트리 구성은 주요소와 부요소를 둘러싸는 사각영역을 구성하는 것으로 시작한다. 이 사각영역은 다시 내부를 4등분하는 4분체(quadrant)로 분할되며, 절점이 사분체 내부에 위치할 경우 재귀적으로 사분체를 분할하여 절점의 공간적 위치를 확인한다. 이 재귀분할알고리즘은 모든 절점의 위치가 확인되거나 더 이상 공간을 분할할 수 없을 경우 종료된다.

그림 3의 중앙에 위치한 밝은 음영으로 표시된 사각형은 전역검색의 결과로 한정된 접촉영역을 나타내며, 내부의 어두운 음영으로 표시된 사각형은 해당 사분면에 절점이 들어

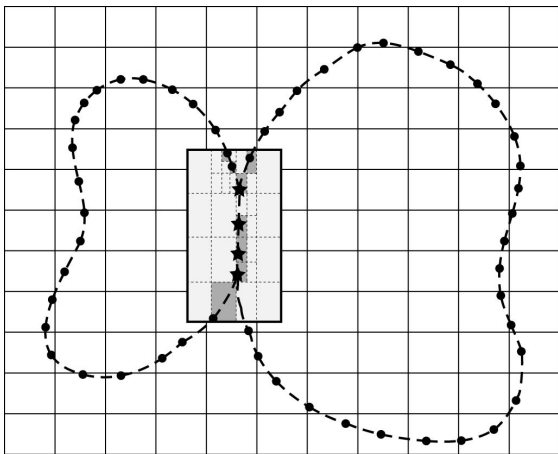


그림 3 사지트리를 이용한 지역검색

있는 경우를 나타낸 것이다. 절점의 접촉은 어두운 음영으로 표시된 사분체 내에 주요소와 부요소의 절점이 각각 1개 이상 존재하는 경우만 검토하면 된다. 검색이 필요한 사분체의 절점은 별표로 표시하였다. 절점간 접촉은 식 (6)과 같이 1차원 노름(norm)을 이용하였다.

$$L^1\text{-norm } |\vec{A} - \vec{B}| = 0 \tag{6}$$

3.3 관계방정식의 설정

지역검색을 통하여 절점의 접촉여부가 결정되면, 표면력 제약 조건을 검토하기 위하여 요소간의 접촉여부를 검사하여야 한다. 요소의 접촉여부는 요소내의 절점의 접촉상태를 검사하여 실행할 수 있다. 이 과정은 절점에 경계요소를 부여하는 과정에서 수행되기 때문에 프로그램 수행에 대한 추가적인 비용이 발생하지 않는다.

절점과 요소의 접촉상태가 결정된 후에는 최종 방정식을 구성하기 위하여, 접촉영역에 추가적인 관계방정식을 설정하여야 한다. 변위에 대한 관계방정식은 접촉하는 모든 절점에 대하여 일괄적으로 식 (4)를 이용하여 생성할 수 있다. 표면력 제약 조건의 경우 요소의 법선벡터에 의하여 결정되므로 요소와 절점의 관계를 고려해야 한다. 한 영역이 다른 영역과 접촉할 경우 반드시 그림 4와 같이 접촉면의 법선벡터는 서로 180°만큼의 위상차이를 갖게 되므로 항상 서로 접촉하는 절점의 진입요소와 진출요소가 접촉상태를 이루게 된다. 따라서 접촉하는 모든 요소의 절점에 작용하는 표면력은 진입요소위의 절점일 경우, 후행요소의 법선에 따른 표면력 값을 가지며 반대로 진출요소 위의 절점일 경우 선행요소의 법선에 따른 표면력 값을 가지게 된다. 이를 이용하여 표면력의 추가 방정식은 식 (5)를 적용하여 생성할 수 있다.

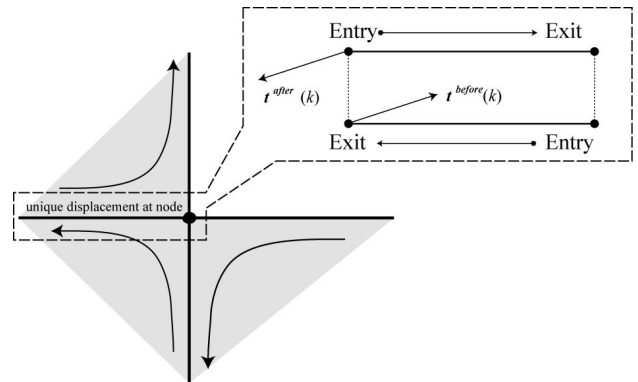


그림 4 접촉요소와 절점의 관계도

4. 평면 내 펀치 문제

제시된 알고리즘의 실효성을 증명하기 위하여 전통적인 접촉문제인 평면 내 펀치문제를 해석하였다. 해석에 사용된 요소망은 그림 5에서 확인할 수 있다. 요소망은 298개의 절점과 190개의 접촉 주요소, 190개의 접촉 부요소로 구성된다. 그 외의 요소는 모두 선형요소를 사용하였다. 해석결과의 신뢰성을 타진하기 위하여 유한요소법의 해석결과와 비교하였다. 유한요소해석은 범용프로그램인 ABAQUS를 사용하였으며, 접촉해석 알고리즘은 라그랑지 계수법을 적용하였다. 경계요소법은 유한요소법과 달리 경계면만 이산화되기 때문에 등가의 요소망을 구축하는 것은 매우 피상적인 작업이 되므로, 접촉면의 요소망의 형태가 비슷해지도록 유한요소망을 구성하였다.

개발된 프로그램에 의한 접촉응력과 유한요소법에 의하여 얻어진 결과를 그림 6에 도시하였다. 접촉응력의 최대값은 접촉면이 끝나는 지점에서 발생하며, 이때 경계요소법에 의하여 구해진 결과는 유한요소법에 비하여 매우 크게 발생한다. 이 문제에 대한 접촉해석의 일반화가 알려져 있지는 않지만, 유사한 문제인 강성편치가 평면위에 작용하였을 때의 접촉응력이 접촉면 끝단에서 무한대로 수렴하는 것(Johnson, 1985)을 고려하면 경계요소해석에 의한 결과가 보다 좋은 것으로 사료된다.

그림 7은 제시된 알고리즘의 효율성을 확인하기 위하여 개발된 프로그램을 프로파일링 한 결과이다. 프로파일링은

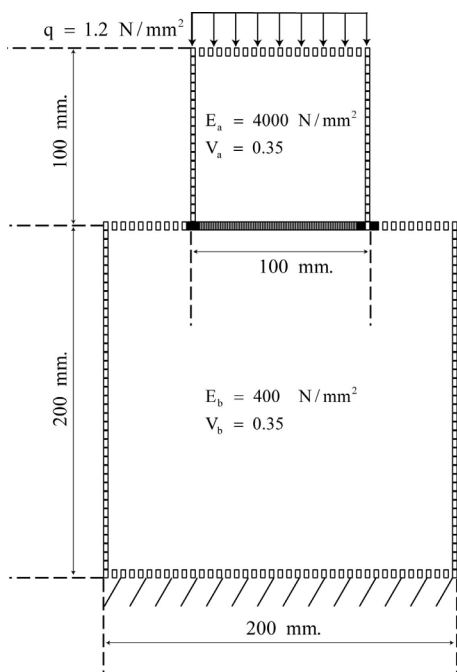


그림 5 수치해석예제의 요소망

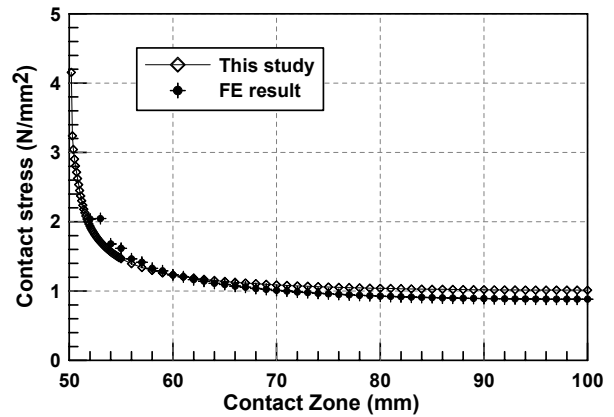


그림 6 접촉면에서의 접촉응력 값

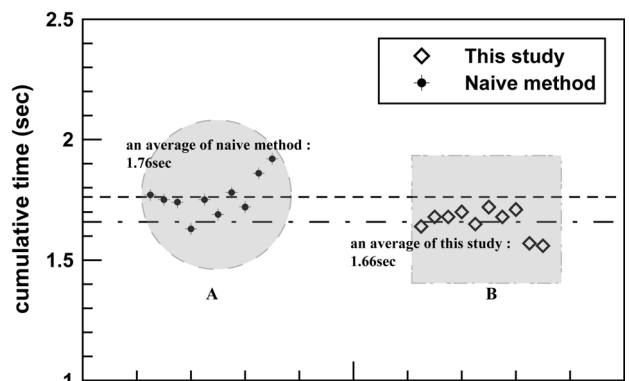


그림 7 프로그램 수행 시간

Linux기반의 PC에서 Gprof를 사용하였다. 그림 좌측의 A 원은 원초적인 접촉문제로 예제문제를 해석하였을 때 소요된 시간이며, 우측의 사각영역 B는 개발된 알고리즘을 적용하였을 때 소요된 시간이다. 각 10회씩 수행하여 얻은 결과의 평균 시간은 원초적인 방법의 경우 1.76초이고, 개발된 알고리즘에 의한 것은 1.66초 소요되었다. 이와 같이 제시된 알고리즘을 통하여 전체 해석 프로그램이 약 6% 가량 수행능력이 향상되었음을 알 수 있다.

5. 결 론

본 논문에서는 효율적인 접촉면 검출을 위하여 경계요소법의 접촉문제를 위하여 필요한 자료구조를 분석하였다. 분석된 자료구조를 바탕으로 접촉면 검출을 전역검색, 지역검색, 관계방정식 성립의 3단계로 구분하여 해당 단계에 적용할 수 있는 알고리즘을 제시하였다.

첫 번째 알고리즘은 해석영역을 접촉이 발생할 수 있는 부분과 그렇지 않은 부분으로 한정짓는 것으로, 이를 위하여 접촉 주요소와 접촉 부요소 개념을 도입하였다. 두 번째 단계에서는 한정된 접촉영역에 존재하는 절점간의 공간분포관

계를 계측하기 위하여 공간분할알고리즘인 사지트리를 이용하여 절점간의 공간분포를 확인하도록 하였다. 최종적으로 요소에 속한 절점의 접촉상태를 검사함으로써, 계의 최종 방정식을 풀기위한 추가관계식을 작성하도록 하였다.

공간분할 알고리즘은 요소와 절점의 공간분포와 자료의 정렬에 따라 다른 수행능력을 보일 수 있으므로 모든 경우에 대하여 항상 일정한 수행능력향상을 보장할 수 없으나, 동해석과 같이 넓은 공간에서 움직이는 물체나 하중단계가 급격히 변하고 보다 많은 절점을 가진 경우에 사지트리를 적용하면 공간 복잡도를 $O(M \log N)$ 수준으로 낮추어 보다 효율적인 접촉면 검출이 가능하다.

개발된 알고리즘의 실효성을 검증하기 위하여 대표적인 평면접촉문제인 평면위의 편치문제를 해석하고, 이를 범용 유한요소프로그램의 결과와 비교하였다. 또한, 원초적인 방법과 제시된 접촉면 검출 알고리즘을 토대로 개발된 프로그램을 프로그래밍 하여 본 논문의 방법이 약 6% 가량 빠른 해석을 수행하고 있음을 확인하였다.

참 고 문 헌

김용언, 류한열, 신의섭 (2007) 영역/경계 분할 정식화에 의한 삼차원 접촉 해석의 효율성 검토, 한국전산구조공학회 논문집, 20(4), pp.469~476.

이기수, 김방원 (2000) 접촉 오차 벡터를 이용한 비선형 변형체의 마찰접촉 해석, 한국전산구조공학회 논문집, 13(3), pp.305~319.

Andersson, T., Frederiksson, B., Persson, B.G.A. (1980) The boundary element method applied to two-dimensional contact problems, in : C. A. Brebbia(Ed.), *Proceedings of the 2nd International Seminar on Recent Advances in BEM*, Southampton : CML Publications, pp.247~263.

Brebbia, C.A., Dominguez, J. (1992) Boundary elements, an introductory course. 2nd ed, New York : McGraw-Hill.

Dassault systems simulia corp. (2007), Abaqus

6.7 User' manual.

Forrest, A. (1971) Computational geometry, series 4, Royal Society London.

Gao, X.W., Davies, T.G. (2000) 3D multi-region BEM with corners and edges, *International journal of Solids and Structures*, 37, pp.1549~1560.

Graham, S.L., Kessler, P.B., Mckusick, M.K. (1982) Gprof : A call graph execution profiler, in : SIGPLAN '2 : *Proceedings of the 1982 SIGPLAN symposium on Compiler construction*, ACM, New York, NY, USA.

Greco, M., Coda H. B., Venturini, W.S. (2004) An alternative contact/impact identification algorithm for 2d structural problems, *Computational Mechanics*, 34, pp.410~422.

Hertz, H. (1896) Miscellaneous papers on the contact of elastic solids, Trans-lated by D.E. Jones, MacMillan : London.

Johnson, K.L. (1985) Contact mechanics, Cambridge University Press.

Karami, G. (1989) A boundary element method for two-dimensional contact problems, Springer-Verlag.

KEUM, B., LIU, Y. (2005) Analysis of 3-D frictional contact mechanics problems by a boundary element method, *Tsinghua Science and Technology*, 10, pp.16~29.

Olukoko, O.A., Becker, A.A. (1993) A new boundary element approach for con-tact problems with friction, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36, pp.2625~2642.

Paris, F., Blazquez, A., Canas J. (1995) Contact problems with nonconforming discretization using boundary element method, *Computers & Structures*, 57, pp.829~839.

Zhong, Z.H., Nilsson, L. (1996) A unified contact algorithm based on the territory concept, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 130, pp.1~6.