직교이방성 복합적층구조의 거동: 포아송비의 임의성에 의한 영향

Behavior of Orthotropic Composite Plate Due to Random Poisson's Ratio

노 혁 천†
Noh, Hyuk-Chun
(논문접수일 : 2009년 9월 30일 ; 심사종료일 : 2009년 11월 11일)

요 지

복합재료는 재료적, 역학적으로 뛰어난 특성을 가진 재료로서 엔지니어링분야의 많은 부분에 적용되고 있다. 특히 무게대비 강성비가 높은 특성을 가지고 있으며 다양한 형상에 대한 성형성도 뛰어나다. 그러나 재료의 특성상 두 가지 재료를 조합하여 제작하는 복잡한 과정은 재료상수에 높은 임의성을 야기할 가능성이 있다. 본 연구에서는 재료상수 중 포아송비의 공간적 임의성을 고려한 추계론적 유한요소해석 정식화를 제시한다. 직교이방성 복합적층구조의 두 재료축에 대한 상호관계를 적용하여 두 재료축방향의 포아송비를 하나의 대표값으로 나타내었고, 이를 합력-변형률관계에 적용하였다. 이를 통하여 합력-변형률관계를 포아송비의 변동항의 수학적 표현인 추계장함수의 차수에 따라 분해된 형태로 유도하였고, 이를 정식화에 적용하여 응답분산계수를 제시하였다. 제시한 응답분산계수는 몬테카를로 해석의 결과와 비교하였다.

핵심용어 : 복합재료, 복합적층구조, 임의성, 응답분산계수, 추계장함수

Abstract

Composite materials have been employed in the various engineering applications due to high mechanical performances including high strength-weight ratio and high degree of free formability. Due to complex manufacturing process, however, it can have intrinsic randomness in the material constants which affect the deterministic behavior of the composite structures. In this study, we suggest a formulation for stochastic finite element analysis considering the spatial randomness of Poisson's ratio. Considering the reciprocal relation between elastic moduli and Poisson's ratios in the two mutually orthogonal axes, one of two values of Poisson's ratio can be expressed in terms of the other. Using this, the relation between stress resultants and strains is derived in the ascending order of power of the stochastic field function, which can be directly used in the formulation to obtain the coefficient of variation of responses. The adequacy of the proposed scheme is demonstrated by comparison with the results of Monte Carlo analysis.

Keywords : *composite material, laminated composite, randomness, coefficient of variation, stochastic field function*

1. 서 론

복합재료는 재료적인 특성이 우수하여 공학의 다양한 분야에서 적용되고 있는 재료로서, 강도가 높고, 강도 대비 무게가 적으며, 성형성(formability)이 좋은 특성을 가지고 있다. 특히 무게대비 강도 또는 강성이 높은 부분에 탁월한 성능을 보이며(Pavlovic, 2005), 항공, 차량, 해양 등 다양한 구조분야에 사용되고 있다. 그러나 복잡한 제작 과정에 의하여 복합재료의 재료적 임의성(randomness)은 일반재료에 비하여 높게 나타나고 있다(Vinckenroy, 1995). 구조계의 임의성은 재료 뿐만 아니라 작용하중은 물론, 구조의 기하학적 형상에서도 나타나므로 구조계의 모든 인수가 임의성을 가지고 있다고 보아도 큰 무리는 없을 것이며, 따라서 추계론적 해석의 중요성은 매우 높게 된다.

† 책임저자, 정회원 · 세종대학교 토목환경공학과 조교수
Tel: 02-3408-3292 ; Fax: 02-3408-4332
E-mail: cpebach@sejong.ac.kr

• 이 논문에 대한 토론을 2010년 2월 28일까지 본 학회에 보내주시면 2010년 4월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

추계론적 해석과 유한요소법을 결합한 추계론적 유한요소해석(Stochastic FEM)은 유한요소법을 이용한 확률론적 해석법으로서 80년대부터 현재까지 활발하게 연구가 진행되고 있는 분야이다(Liu 등, 1986; Vanmarcke, 1983). 추계론적 유한요소해석의 역사는 초기에는 통계학적 방법인 몬테카를로 해석(Monte Carlo techniques; Shinozuka, 1972)에 기초하였고, 그 후 간접적이며 이론적인 방법인 비통계학적 해석법들이 개발되어 왔다(최창근, 1995; Deodatis 등, 2003; Falsone 등, 2002; Singh, 2009). 최근에는 컴퓨터의 역량이 크게 증대되면서 다시 몬테카를로 해석법에 치중하는 방향으로 진행되고 있으며, 추계장의 생성 등 이를 위한 기본 연구들이 진행되고 있다(Fenton 등, 1990; Grigoriu, 2004). 그러나 몬테카를로 방법은 해석에 많은 시간이 소요됨은 물론 그 근간이 되는 난수의 발생에 큰 어려움이 있으므로 이 또한 많은 제한이 따르게 된다.

본 연구에서는 구조재료의 인수 중 하나인 포아송비(Poisson's ratio)의 공간적 임의성이 구조거동에 미치는 영향을 판단하기 위한 유한요소해석 정식화를 제시한다. 특히 복합재료구조에서 포아송비의 임의성 영향 평가를 위한 정식화에 그 초점을 맞추고자 한다. 복합재료는 재료구성에서의 특성에 따라 직교이방성을 나타내며, 두 방향으로의 재료상수는 복합재료를 이루는 두 재료의 부피비에 따라 결정되고, 일반적으로 두 재료축방향에 대한 탄성계수는 큰 차이를 보이게 된다. 포아송비의 경우, 두 재료축에 대하여 각기 다른 값이 결정되지만, 이들은 두 방향의 탄성계수와 상호 연관되어 있으며, 결과적으로 하나의 독립된 값으로 표현할 수 있다(Reddy, 1997). 본 연구에서는 이러한 사실에 기초하여 합력과 변형률의 관계식을 재구성하여 임의성을 나타내는 추계장함수(stochastic field function)의 차수별로 정리된 합력-변형률관계를 구성하고 이를 정식화에 이용하였다. 포아송비는 정규분포 추계장으로 추계론적 등방성(stochastic homogeneity)을 가지는 확률변수로 가정하였다. 재료상수에 대한 정규분포 가정은 변동계수(coefficient of variation)가 적은 경우 여러 분야에서 채택되고 있다(Schuëller, 2007). 제안된 정식화는 몬테카를로 해석법에 의한 결과와 비교하여 그 타당성을 검증하였다.

2. 임의성 모델링

2.1 재료인수의 공간적 임의성

구조의 거동을 지배하는 모든 인수들은 어떤 형태로든 공간적 혹은 시간적 임의성(randomness)을 가진다. 여기서는 재료인수의 공간적 임의성에 의한 구조거동의 변동에 대하여 논하며, 재료인수의 임의성에 대한 물리적 특성은 n차 모멘트로 일컬어지는 통계적 특성치로 모사한다.

일반적으로 어떤 인수의 공간적 임의성은 그 확률분포의 형태와 관계없이 평균항과 이에 추가되는 변동항의 합으로 나타낼 수 있다. 따라서 평균항을 중심으로 본다면 변동항이 그 인수의 확률분포를 결정하게 된다. 정규분포 등 일부 확률밀도함수는 우함수 형태의 확률밀도함수를 가지나, 그렇지 않은 경우에 대해서도 평균항과 변동항의 합으로 나타내는 것은 가능하다.

그러므로 어떤 인수 p에 대한 공간적 임의성은 인수의 평균 p_μ와 함께 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$p(x) = p_\mu + \delta p(x) \tag{1}$$

식이 나타내는 바와 같이 평균항은 하나의 상수이며, 변동항은 공간좌표 x의 함수로 주어진다. 임의인수의 분산은 인수의 평균을 중심으로 한 변동항의 제곱에 대한 평균으로 정의되므로 다음과 같다.

$$\sigma_p^2 = \varepsilon\left[\left(p-\bar{p}\right)^2\right] = \varepsilon\left[\delta p^2\right] \tag{2}$$

여기서, 변동항 δp를 어떤 함수와 연계하여 인수의 평균과 함께 $\delta p(x) = \varphi_p(x) p_\mu$로 가정할 수 있다. 여기서 나타난 새로운 함수 $\varphi_p(x)$를 추계장함수(stochastic field function)라고 한다. 즉, 추계장함수는 인수의 변동항을 평균항으로 표현하기 위한 가중함수라고 할 수 있다. 이 경우 인수의 분산은 다음과 같다.

$$\sigma_p^2 = \varepsilon\left[\delta p^2\right] = p_\mu^2 \varepsilon\left[\varphi_p^2(x)\right] \tag{3}$$

따라서 평균에 대한 표준편차의 비율을 나타내는 변동계수(coefficient of variation) α_p는 다음과 같이 추계장함수로 표현되며, 이는 추계장함수의 표준편차와 동일하게 됨을 알 수 있다.

$$\alpha_p = \frac{\sigma_p}{\left|p_\mu\right|} = \sqrt{\varphi_p^2(x)} = \sigma_\varphi \tag{4}$$

즉, 임의인수의 분산계수는 그 인수의 변동항을 표현하기 위한 가중함수인 추계장의 표준편차와 같다.

변동항에 대한 가정식을 식 (1)에 대입하면, 임의인수를 평

균항과 추계장함수로 표현하는 것이 가능하며 식 (5)와 같다.

$$p(x) = p_\mu + \delta p(x) = p_\mu \left[1 + \varphi_p(x)\right] \tag{5}$$

아래첨자 μ는 평균을 의미하여, 앞으로도 동일한 표기법을 사용한다.

2.2 임의포아송비의 모델링

식 (5)를 따르면 공간적 임의성을 가지는 포아송비는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\nu(x) = \nu_\mu \left[1 + \varphi_\nu(x)\right], \quad x \in D_s \tag{6}$$

추계장함수는 재료인수가 음의 값을 가지는 경우를 배제하기 위하여 $-1+\varepsilon_\varphi \le \varphi_\nu(x) \le 1-\varepsilon_\varphi$의 범위에 있는 것이 타당하며, 이 경우 $0 < \varepsilon_\varphi < 1$의 값을 가진다. 여기서, D_s는 구조의 영역을 나타낸다. 식 (6)에서 알 수 있듯이 ν의 평균이 ν_μ이므로, 추계장함수 φ_ν의 평균은 0이다. 즉, $\varepsilon[\varphi_\nu] = 0.0$. 여기서 $\varepsilon[\bullet]$는 평균연산자를 나타낸다.

3. 복합적층구조의 응력-변형률 관계

3.1 임의포아송비를 고려한 응력-변형률관계 유도

복합적층구조 분야에서 일반적으로 사용되고 있는 표기법을 적용하면, k번째의 단일층에서의 응력-변형률 관계는 식 (7)과 같이 면내부분과 전단부분으로 나누어 나타낼 수 있다. 면에 연직한 방향의 응력은 무시한다.

$$\sigma_p^{(k)} = Q_p^{(k)} \varepsilon_p^{(k)}, \quad \sigma_s^{(k)} = Q_s^{(k)} \varepsilon_s^{(k)} \tag{7}$$

식 (7)의 각 벡터 및 행렬의 형태는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\sigma_p^{(k)} &= \langle \sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_6 \rangle^T \\
\varepsilon_p^{(k)} &= \langle \varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \varepsilon_6 \rangle^T \\
\sigma_s^{(k)} &= \langle \sigma_4 \quad \sigma_5 \rangle^T \\
\varepsilon_s^{(k)} &= \langle \varepsilon_4 \quad \varepsilon_5 \rangle^T \\
Q_p^{(k)} &= \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}^{(k)}, \quad Q_s^{(k)} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix}^{(k)}
\end{aligned} \tag{8}$$

행렬 $Q_p^{(k)}$, $Q_s^{(k)}$ 각 요소의 구체적인 형태는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
&Q_{11} = \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \\
&Q_{44} = G_{23}, \quad Q_{55} = G_{13}, \quad Q_{66} = G_{12}
\end{aligned} \tag{9}$$

평면에 존재하는 복합적층구조의 경우 평면응력을 가정할 수 있으므로, 식 (9)에 나타난 6개의 인수는 독립적인 인수가 된다. 즉, 일반적인 3차원 관계에서 나타나는 상호관계 $\nu_{ij}/E_i = \nu_{ji}/E_j$를 적용한다면, ν_{21}은 ν_{12}로 표현이 가능하다: $\nu_{21} = \nu_{12}E_2/E_1$. 따라서 식 (9)의 첫 세 항은 포아송비의 대표적인 값인 ν_{12}만의 함수로 나타낼 수 있다. 즉,

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1-r_E^2\nu_{12}^2}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1-r_E^2\nu_{12}^2}, \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1-r_E^2\nu_{12}^2} \tag{10}$$

여기서, r_E는 복합재료의 두 방향에 대한 탄성계수에 대한 비로서 $r_E = \sqrt{E_2/E_1}$이다. 식 (10)의 형태는 급수전개를 통하여 무한합으로 표현이 가능한 $1/(1-x)$의 형태로서 이에 대한 Taylor전개를 수행할 경우 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} x^i \tag{11}$$

그러므로 식 (10)의 각 식들도 이들 무한합의 형태로 표현이 가능하다. 식 (6)에 따라 $\nu_{12}(x) = \nu_{12\mu}\left[1+\varphi_\nu(x)\right]$를 식 (10)에 대입하여 이를 전개하면, 무한합은 탄성계수비 r_E와 평균포아송비 $\nu_{12\mu}$, 그리고 추계장함수 $\varphi_\nu(x)$로 표현된다. 이 경우 전개된 식은 동차의 추계장함수에 대하여 정리가 가능하며, 다음의 식 (12)와 같이 유도 전개할 수 있다.

$$\begin{aligned}
Q_{11}/E_1, Q_{22}/E_2 &= a_0 + a_1\varphi_\nu + a_2\varphi_\nu^2 + a_3\varphi_\nu^3 + \cdots = a_i\varphi_\nu^i \\
Q_{12}/E_2 &= b_0 + b_1\varphi_\nu + b_2\varphi_\nu^2 + b_3\varphi_\nu^3 + \cdots = b_i\varphi_\nu^i
\end{aligned} \tag{12}$$

무한전개식에 나타난 상수들은 다음과 같이 조합(combination)연산을 포함하는 식으로 나타나며, 추계장함수의 차수에 따라 규칙적인 특성을 나타낸다.

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(r_E\nu_{12\mu}\right)^{2k} \binom{2k}{0}, \\
a_i &= \sum_{k=1,(2k\ge i)}^{\infty} \left(r_E\nu_{12\mu}\right)^{2k} \binom{2k}{i}, \quad (i = 1, 2, \cdots)
\end{aligned}$$

$$b_i = \sum_{k=1,(2k-1\geq i)}^{\infty} r_E^{2(k-1)} \nu_{12\mu}^{2k-1} \binom{2k-1}{i}, \ (i = 0,1,\cdots) \tag{13}$$

여기서, 괄호안의 연산 $\binom{n}{r}$은 조합연산 ${}_nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$을 나타낸다.

3.2 전체좌표계에서의 응력-변형률 관계

복합재료적층구조의 각 층은 전체좌표계와 임의의 각도를 가지고 적층되며 이들은 전체 강성에 기여하게 된다. 따라서 재료의 주축에 대해서 얻은 3.1의 응력-변형률관계는 전체좌표계로 변환되어야 한다. 변환된 요소들을 윗줄 바를 사용하여 나타내면 식 (14)와 같다.

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_{11} &= Q_{11}\cos^4\theta + Q_{22}\sin^4\theta + 2(Q_{12}+2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta \\
\bar{Q}_{22} &= Q_{11}\sin^4\theta + Q_{22}\cos^4\theta + 2(Q_{12}+2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta \\
\bar{Q}_{66} &= Q_{66}(\sin^4\theta+\cos^4\theta) + (Q_{11}+Q_{22}-2Q_{12}-2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta \\
\bar{Q}_{12} &= Q_{12}(\sin^4\theta+\cos^4\theta) + (Q_{11}+Q_{22}-4Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta \\
\bar{Q}_{16} &= (Q_{11}-Q_{12}-2Q_{66})\sin\theta\cos^3\theta + (Q_{12}-Q_{22}+2Q_{66})\sin^3\theta\cos\theta \\
\bar{Q}_{26} &= (Q_{11}-Q_{12}-2Q_{66})\sin^3\theta\cos\theta + (Q_{12}-Q_{22}+2Q_{66})\sin\theta\cos^3\theta
\end{aligned} \tag{14}$$

여기서, 회전각 θ는 전체좌표계로부터 재료주축까지의 각으로 반시계방향을 양의 값으로 하여 결정된다.

식 (14)의 관계에 식 (12)에서 얻어진 결과를 직접 대입하면, 변환된 응력-변형률관계는 등차인 추계장함수 $\varphi_\nu^{(k)}$의 항으로 $\bar{Q}_{ij} = \bar{q}_{ij(k)}\varphi_\nu^k$로 쓸 수 있으며, 이를 행렬의 형태로 다시 나타내면 다음의 결과식를 얻을 수 있다.

$$\bar{\mathbf{Q}} = \bar{\mathbf{Q}}_{(0)} + \bar{\mathbf{Q}}_{(1)}\varphi + \bar{\mathbf{Q}}_{(2)}\varphi^2 + \cdots = \bar{\mathbf{Q}}_{(l)}\varphi^l, \ (l = 0,1,2,\cdots) \tag{15}$$

$$\bar{\mathbf{Q}}_{(l)} = \left[\bar{q}_{ij(l)}\right], \ (i,j = 1,2,6) \tag{16}$$

여기서, $\bar{q}_{ij(k)}$는 $E_1, E_2, a_i, b_i, \theta$의 함수이다.

3.3 적층의 효과를 고려한 응력-변형률관계

적층복합구조의 각 층은 면내 신축거동(extensional behavior)과 면외 휨거동(flexural behavior) 그리고 이들 두 거동 사이의 연성거동(coupling behavior) 등을 나타낸다. 이를 모두 모사할 경우 유한요소의 각 절점은 5개의 자유도를 가진다. 세 개의 개별적인 거동에 대한 합력-변형률관계는 각 층에서의 기여도를 고려하여 두께방향으로의 적분을 통하여 얻게 되며 식 (17)과 같이 구성할 수 있다. 여기서 합력은 신축방향의 연직력과 휨방향의 모멘트, 그리고 이들 사이의 연성작용을 나타내는 항 등을 말한다.

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij}(1, y, y^2)dy = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{N_L} \bar{Q}_{ij}^{(k)}(y_{k+1}^m - y_k^m) \tag{17}$$

A, B, D는 각각 신축거동, 연성거동, 그리고 휨거동에 대한 강성을 나타내며, 각 경우에 대하여 m은 1, 2, 3의 값이 해당된다. N_L은 적층의 총 수이며, h는 복합적층판의 두께를 나타낸다. 중립축으로부터 각 층까지의 거리는 y_k이다. 식 (15)에 보여진 바와 같이 각 층의 응력-변위관계는 추계장함수의 차수별로 분해된 부분행렬로 나타나므로 A, B, D 세 행렬도 분해된 형태로 나타낼 수 있으며, 이들 행렬의 구체적인 형태는 식 (18)과 같다.

$$(A_{ij}^{(l)}, B_{ij}^{(l)}, D_{ij}^{(l)}) = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{N_L} \bar{q}_{ij(l)}^{(k)}(y_{k+1}^m - y_k^m) \tag{18}$$

따라서 임의포아송비를 포함하는 합력-변형률관계는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{(l)}\varphi^l & \mathbf{B}^{(l)}\varphi^l \\ \mathbf{B}^{(l)}\varphi^l & \mathbf{D}^{(l)}\varphi^l \end{bmatrix} = \mathbf{E}^{(l)}\varphi^l(x), \ (l = 1,2,\cdots) \tag{19}$$

4. 임의성을 포함하는 요소강성행렬의 구성

4.1 평균강성행렬과 변동강성행렬

공간적 임의성을 가지는 포아송비에 의하여 구성행렬이 추계장함수의 함수로 표현되었으므로 요소강성행렬은 추계장함수를 포함하지 않는 부분과 포함하는 부분으로 나뉘게 된다. 즉,

$$\mathbf{k} = \int_v \mathbf{B}^T\mathbf{E}\mathbf{B}\,dv = \mathbf{k}_{\mathrm{d}} + \Delta\mathbf{k} \tag{20}$$

추계장함수를 포함하지 않는 부분인 $\mathbf{k}_{\mathrm{d}}$는 확정론적 유한요소해석에서 얻게 되는 강성행렬과 동일한 것으로서,

$\mathbf{k}_d = \int_v \mathbf{B}^T \mathbf{E}^{(0)} \mathbf{B}\, dv$ 이다. 반면, 변동항에 해당하는 $\Delta\mathbf{k}$ 는 아래와 같다.

$$\Delta\mathbf{k} = \int_v \mathbf{B}^T \left(\mathbf{E}^{(l)} \varphi^l\right) \mathbf{B}\, dv \tag{21}$$

확정론적 강성행렬은 일반적인 경우 평균강성행렬과 같은 형태를 가지나, 임의포아송비에 의한 평균강성행렬은 확정론적 강성행렬과는 다른 형태를 가지게 된다. 강성행렬에 대한 평균연산은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_\mu &= \int_v \mathbf{B}^T \varepsilon[\mathbf{E}] \mathbf{B}\, dv = \int_v \mathbf{B}^T \mathbf{E}^{(0)} \mathbf{B}\, dv + \\ &\int_v \mathbf{B}^T \mathbf{E}^{(1)} \varepsilon[\varphi] \mathbf{B}\, dv + \int_v \mathbf{B}^T \mathbf{E}^{(2)} \varepsilon\left[\varphi^2\right] \mathbf{B}\, dv + \cdots\end{aligned} \tag{22}$$

여기서, 무한급수로 전개된 식 (22)에서 짝수멱 추계장함수의 평균이 0이 아니므로(홀수멱함수에 대한 평균연산 결과는 0) 평균강성행렬은 확정론적 강성행렬에 추가적인 항을 가지게 된다. 짝수멱 추계장에 대한 평균이 0이 아니라는 성질은 정규분포로 가정된 확률변수에서 나타나게 되며, 그 일반적 특징은 확률변수의 n-차 곱에 대한 평균의 일반식으로 표현된다(Lin 1967). 그러므로 식 (22)는 다음과 같은 결과를 나타낸다.

$$\mathbf{k}_\mu = \mathbf{k}_d + \mathbf{k}_\mu^{(2)} + \mathbf{k}_\mu^{(4)} + \cdots \tag{23}$$

식 (23)에서 추계장함수에 대한 짝수멱을 포함하는 강성행렬에 대한 적분식은 식 (24)와 같으며, 이는 유한요소내의 개별적 적분으로 산정된다.

$$\mathbf{k}_\mu^{(l)} = \int_v \varepsilon\left[\varphi^l\right] \mathbf{B}^T \mathbf{E}^{(l)} \mathbf{B}\, dv \tag{24}$$

그러므로 식 (20)~(23)으로부터 평균강성에 대한 변동강성행렬 $\delta\mathbf{k} = \mathbf{k} - \mathbf{k}_\mu$ 은 식 (25)와 같음을 알 수 있다.

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{k} &= \mathbf{k}^{(1)} + \left(\mathbf{k}^{(2)} - \mathbf{k}_\mu^{(2)}\right) + \mathbf{k}^{(3)} + \left(\mathbf{k}^{(4)} - \mathbf{k}_\mu^{(4)}\right) + \cdots \\ &= \delta\tilde{\mathbf{k}} - \delta\tilde{\mathbf{k}}_\mu\end{aligned} \tag{25}$$

여기서, $\delta\tilde{\mathbf{k}} = \sum_{l=1}^{\infty} \mathbf{k}^{(l)}$, $\delta\tilde{\mathbf{k}}_\mu = \sum_{l=1}^{\infty} \mathbf{k}_\mu^{(2l)}$ 이며, $\mathbf{k}^{(l)} = \int_v \varphi^l \mathbf{B}^T \mathbf{E}^{(l)} \mathbf{B}\, dv$ 이다.

4.2 확률변수의 정의

식 (25)에 순차적으로 나타나고 있는 강성행렬 $\mathbf{k}^{(l)}$ $(l = 1, 2, \cdots)$ 는 변위-변형률행렬 $\mathbf{B}$ 를 $\mathbf{B} = \mathbf{B}_i p_i$ $\left(i = 1, 2, \cdots, n_p\right)$ 로 가정하면 다음과 같이 쓸 수 있다(여기서, n_p 는 행렬 $\mathbf{B}$ 에 존재하는 독립인 다항식의 수를 나타낸다.).

$$\mathbf{k}^{(l)} = \mathbf{B}_i^T \mathbf{E}^{(l)} \mathbf{B}_j \alpha_{ij}^{(l)} \tag{26}$$

여기서, $\alpha_{ij}^{(l)}$ 는 유한요소에 내재하는 확률변수로서 다음의 추계론적 적분으로 정의된다.

$$\alpha_{ij}^{(l)} = \int_v \varphi^l p_i p_j dv \tag{27}$$

그러므로 식 (25)의 변동강성행렬은 상수행렬인 $k_{ij}^{(l)} = \mathbf{B}_i^T \mathbf{E}^{(l)} \mathbf{B}_j$ 와 확률변수 $\alpha_{ij}^{(l)}$ 의 곱의 합이 되어, 변동강성행렬이 확률변수 $\alpha_{ij}^{(l)}$ 의 함수가 됨을 알 수 있다. 따라서 요소강성행렬은 물론 전체강성행렬과 변위행렬은 모두 확률변수 $\alpha_{ij}^{(l)}$ 의 함수가 된다.

확률변수는 식 (27)에서 보는 바와 같이 추계장의 차수에 따라 무한개의 종류가 설정되나 각 종류별로 보면 $n_r = 1/2\, n_p \left(n_p + 1\right)$ 개가 있게 된다. 식 (25)에서 변동강성행렬의 전개를 k번째까지로 제한할 경우 전체 확률변수의 수는 $n_{rv} = kn_r = k/2\, n_p \left(n_p + 1\right)$ 이다. 즉, 각 유한요소별로 n_{rv} 개의 확률변수가 존재하며, 이는 개념적으로 $n_{rv} = n_r^{(1)} + n_r^{(2)} + \cdots + n_r^{(k)}$ 로 쓸 수 있다. 그러므로 확률변수벡터 $\boldsymbol{\alpha}$ 는 $\boldsymbol{\alpha} = \left\{\alpha_{i=1,2,\cdots,n_{rv}}\right\} = \left\langle \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n_{rv}} \right\rangle^T$ 로 쓰거나, 또는 $\boldsymbol{\alpha} = \left\langle \boldsymbol{\alpha}_{n_r^{(1)}}^T, \boldsymbol{\alpha}_{n_r^{(2)}}^T, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n_r^{(k)}}^T \right\rangle^T$ 와 같이 확률변수의 종류별로 표기할 수 있다. 여기서, 종류라고 함은 식 (27)의 정의에서 보는 바와 같이 추계장함수 $\varphi(x)$ 의 차수 l 에 따른 분류이다. 본 연구에서는 식 (11)의 전개에서 고차항의 기여가 저차항에 비하여 미미하고, 전개식인 (12), (13)에서 보는 바와 같이 고차항은 추계장함수 $\varphi(x)$ 에 대한 차수의 증가를 의미하며, 따라서 그 기여도가 기하급수적으로 감소하므로 전개차수를 4차까지로 제한하며, 추후 이에 준하여 정식화를 수행한다.

5. 변위벡터의 1차 및 2차모멘트 산정

5.1 변위벡터에 대한 선형근사식

변위벡터가 확률변수 α 의 함수이므로, 변위벡터를 확률변

수의 평균을 중심으로 1차 Taylor전개하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{U} \cong \mathbf{U}\left(\boldsymbol{\alpha}_{\mu}\right) - \bar{\mathbf{K}}^{-1}\delta\alpha_r^e \left.\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \alpha_r^e}\right|_{\boldsymbol{\alpha}_{\mu}} \mathbf{U}\left(\boldsymbol{\alpha}_{\mu}\right) \tag{28}$$

식 (28)에서 확률변수에 대한 변위의 편미분은 평형방정식에 대한 미분을 통하여 얻을 수 있는 강성행렬에 대한 편미분으로 대치되었다. 반복되는 첨자 e, r 은 합을 의미하며, $e = 1, \cdots, n_e$ 로 n_e 는 구조모델리에 사용된 전체 유한요소의 수를 나타내며, $r = 1, \cdots, n_{rv}$ 이다. 확률변수벡터의 평균은 $\boldsymbol{\alpha}_{\mu}$ 로 나타내었고, 기호 $\bullet|_{\bar{\boldsymbol{\alpha}}}$ 은 평균확률변수에서의 연산을 의미한다. 확률변수의 평균을 중심으로 한 거리는 $\delta\alpha_r^e = \alpha_r^e - \alpha_{\mu r}^e$ 이다.

변위의 평균인 $\mathbf{U}\left(\boldsymbol{\alpha}_{\mu}\right)$는 평균강성행렬에 의하여 구해지는 것으로 요소강성행렬의 합으로 얻어지는 전체강성행렬을 $\mathbf{K}_{\mu}$ 라 하면 $\mathbf{K}_{\mu}^{-1}\mathbf{F}$ 로부터 얻을 수 있다. 4.1에서 언급한 바와 같이 평균강성행렬이 확정론적 강성행렬에 비하여 크게 되므로 평균변위는 확정론적 유한요소해석에서 얻어지는 변위보다 작은 값을 나타낸다.

식 (28)의 선형전개식은 개별유한요소 e 의 확률변수 α_r^e 가 $r = 1, \cdots, n_{rv}$ 까지 범위에 있는 모든 종류(여기서는 네 종류)의 확률변수에 대한 편미분을 포함하고 있음을 알 수 있다. 그런데 $\delta\alpha_r^e = \alpha_r^e - \alpha_{\mu r}^e$ 에서 평균확률변수 $\alpha_{\mu r}^e$ 는 확률변수를 정의하는 식 (27)과 추계장함수 $\varphi(x)$ 의 특징에 따라 첫번째와 세번째 종류의 평균확률변수는 0이 됨을 알 수 있다. 그러므로 식 (28)을 확률변수의 종류대로 분류하고 특정 확률변수의 평균이 0이 됨을 고려하여 다시 쓰면 식 (29)와 같다.

$$\begin{aligned}\mathbf{U} \cong \mathbf{U}\left(\boldsymbol{\alpha}_{\mu}\right) - \mathbf{K}_{\mu}^{-1} \Bigg\{ & \left(\alpha_r^e \left.\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \alpha_r^e}\right|_{\boldsymbol{\alpha}_{\mu}} \right)_{r=1,\cdots,n_{rv}} \\ & - \left(\delta\alpha_{u\mu}^e \left.\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \alpha_u^e}\right|_{\boldsymbol{\alpha}_{\mu}} \right)_{u=1,\cdots,n_r^{(2)}} - \left(\delta\alpha_{v\mu}^e \left.\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \alpha_v^e}\right|_{\boldsymbol{\alpha}_{\mu}} \right)_{v=1,\cdots,n_r^{(4)}} \Bigg\} \mathbf{U}\left(\boldsymbol{\alpha}_{\mu}\right)\end{aligned} \tag{29}$$

5.2 변위에 대한 1차 및 2차모멘트의 산정식

변위에 대한 1차모멘트(평균)와 2차모멘트(공분산)의 산정은 식 (29)로 나타낸 변위벡터에 대하여 평균 및 공분산연산을 통하여 얻을 수 있다. 먼저, 평균의 경우 식 (29)에서 $\mathbf{U}\left(\boldsymbol{\alpha}_{\mu}\right)$ 이후의 항은 사라지게 되므로 식 (30)과 같이 간단히 얻을 수 있다.

$$\varepsilon\left[\mathbf{U}\right] = \mathbf{U}\left(\boldsymbol{\alpha}_{\mu}\right) \tag{30}$$

변위의 공분산은 그 정의에 따라 식 (31)과 같다.

$$Cov\left[\mathbf{U}\right] = \varepsilon\left[\delta\mathbf{U}\delta\mathbf{U}^T\right] \tag{31}$$

여기서, 평균을 중심으로 한 변위벡터의 변동량은 $\delta\mathbf{U} = \mathbf{U} - \mathbf{U}\left(\boldsymbol{\alpha}_{\mu}\right)$가 되며, 이는 식 (29)로부터 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\delta\mathbf{U} = -\mathbf{U}_r + \mathbf{U}_{u\mu} + \mathbf{U}_{v\mu} \tag{32}$$

그러므로 식 (31)의 공분산은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}&Cov\left[\mathbf{U}\right] = \\ &\varepsilon\left[\mathbf{U}_r\mathbf{U}_r^T\right] - \varepsilon\left[\mathbf{U}_{u\mu}\mathbf{U}_{u\mu}^T\right] - \varepsilon\left[\mathbf{U}_{v\mu}\mathbf{U}_{v\mu}^T\right] - 2\varepsilon\left[\mathbf{U}_{u\mu}\mathbf{U}_{v\mu}^T\right]\end{aligned} \tag{33}$$

식 (33) 우변의 뒤 세 항은 개별 유한요소별 적분으로 얻을 수 있으나, 첫 항은 다음 식 (34)와 같이 정리할 수 있다.

$$\varepsilon\left[\mathbf{U}_r\mathbf{U}_r^T\right] = \mathbf{K}_{\mu}^{-1}\sum_{i,j}^{n_e} Cov\left[\mathbf{f}_{ij}\right]\mathbf{K}_{\mu}^{-T} \tag{34}$$

여기서, $Cov\left[\mathbf{f}_{ij}\right]$는 개별 유한요소 i, j 에 대한 식으로서 식 (29)에서 알 수 있듯이 모든 종류의 확률변수에 대한 연산을 포함하며, 식 (25)의 $\delta\tilde{\mathbf{k}}$ 를 포함함을 알 수 있다. 그러므로 이를 확률변수의 종류에 따른 합으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}&Cov\left[\mathbf{f}_{ij}\right] = \varepsilon\left[\delta\tilde{\mathbf{k}}_i\mathbf{U}_{\bar{\boldsymbol{\alpha}}}\mathbf{U}_{\bar{\boldsymbol{\alpha}}}^T\delta\tilde{\mathbf{k}}_j\right] \\ &= \varepsilon\left[\left(\sum_{k=1}^{4}\mathbf{k}_i^{(k)}\right)\mathbf{U}_{\bar{\boldsymbol{\alpha}}}\mathbf{U}_{\bar{\boldsymbol{\alpha}}}^T\left(\sum_{l=1}^{4}\mathbf{k}_j^{(l)}\right)\right] \\ &= \int_{v_i}\int_{v_j}\sum_{k=1}^{4}\sum_{l=1}^{4}\left\{\varepsilon\left[\varphi^{(k)}(x_i)\varphi^{(l)}(x_j)\right]\breve{\mathbf{k}}_i^{(k)}\mathbf{U}_{\bar{\boldsymbol{\alpha}}}\mathbf{U}_{\bar{\boldsymbol{\alpha}}}^T\breve{\mathbf{k}}_j^{(l)}\right\}dv_j dv_i\end{aligned} \tag{35}$$

식 (35)의 마지막 줄의 강성행렬 표시는 $\breve{\mathbf{k}}_i^{(k)} = \mathbf{B}^T\mathbf{E}^{(k)}\mathbf{B}$ 를 나타낸다. 식 (33) 우변의 뒤 세 항은 다음과 같이 개별 유한요소에 대한 적분으로 얻을 수 있다. 식 (35)에 대한 수

치적분시 식 (35)의 추계장 곱에 대한 평균연산은 자기상관함수(auto-correlation function)으로 대치된다.

$$\begin{aligned}
&\varepsilon\left[\mathbf{U}_{(i)\mu}\mathbf{U}_{(j)\mu}^{T}\right] \\
&=\left(\sum_{e=1}^{n_e}\sum_{s}^{n_s^{(i)}}\mathbf{K}_{\mu}^{-1}\alpha_{s\mu}^{e}\left.\frac{\partial\mathbf{K}}{\alpha_s^e}\right|_{\bar{\boldsymbol{\alpha}}}\mathbf{U}\left(\boldsymbol{\alpha}_{\mu}\right)\right)\left(\sum_{e=1}^{n_e}\sum_{t}^{n_t^{(j)}}\mathbf{K}_{\mu}^{-1}\alpha_{t\mu}^{e}\left.\frac{\partial\mathbf{K}}{\alpha_t^e}\right|_{\bar{\boldsymbol{\alpha}}}\mathbf{U}\left(\boldsymbol{\alpha}_{\mu}\right)\right)^{T} \\
&=\mathbf{K}_{\mu}^{-1}\left(\sum_{e=1}^{n_e}\int_{v_e}R_{\varphi}^{(i)}\left(\xi_e\right)\mathbf{k}_e^{(i)}dv_e\mathbf{U}\left(\boldsymbol{\alpha}_{\mu}\right)\right) \\
&\qquad\left(\sum_{e=1}^{n_e}\int_{v_e}R_{\varphi}^{(j)}\left(\xi_e\right)\mathbf{k}_e^{(j)}dv_e\mathbf{U}\left(\boldsymbol{\alpha}_{\mu}\right)\right)^{T}\mathbf{K}_{\mu}^{-T}
\end{aligned} \tag{36}$$

여기서, $\mathbf{k}_e^{(i)}=\mathbf{B}^T\mathbf{E}^{(i)}\mathbf{B}$, $\xi_e=x_2-x_1;\,x_2,x_1\in v_e$ 이며, $R_{\varphi}^{(i)}\left(\xi_e\right)$는 자기상관함수를 나타낸다.

5.3 자기상관함수

식 (35)의 추계장곱함수의 평균연산 $\varepsilon\left[\varphi^{(k)}\left(x_i\right)\varphi^{(l)}\left(x_j\right)\right]$은 정의에 따라 자기상관함수로 변환된다. 즉,

$$R_{\varphi}\left(\xi_{ij}=\mathbf{x}_j-\mathbf{x}_i\right)=\varepsilon\left[\varphi\left(x_i\right)\varphi\left(x_j\right)\right] \tag{37}$$

본 연구에서는 상대거리벡터 $\boldsymbol{\xi}=\langle\xi\quad\eta\rangle^T$ 에 따라 지수함수적으로 감소하는 식 (38)의 자기상관함수를 사용한다.

$$R_{\varphi}\left(\boldsymbol{\xi}\right)=\sigma_{\varphi}^{2}\exp\left\{-\frac{|\xi|}{d_1}-\frac{|\eta|}{d_2}\right\} \tag{38}$$

σ_{φ}^{2}는 추계장의 분산계수로 상대거리벡터 $\boldsymbol{\xi}=0$ 에서의 값으로 추계장의 분산임을 알 수 있다. 상관관계거리의 방향에 따른 성분 d_{ξ},d_{η}는 양방향에 대하여 동일한 것으로 가정하였으며 본 연구에서는 $d=d_{\xi}=d_{\eta}$ 인 상태에 대하여 고찰하였다.

6. 수치예제를 통한 검증

6.1 구조모델링

본 연구에서는 그림 1과 같이 가로, 세로가 6.0m인 정방형의 고정지지 및 단순지지 복합적층판과 가로 12.0m, 세로 6.0m인 단순지지 직사각복합적층판에 대한 해석을 수행하였다. 직사각 형태인 복합적층판의 경우 길이방향 양변은 자유단이다. 두 구조 모두 두께는 10mm로 가정하였다. 재료상수로는 Kant 등(1998)이 사용한 재료 물성치를 적용하였으며, 다음과 같다: $E_1/E_2=25$, $E_2=2.1\,GPa$, $\nu_{12}=0.25$, $G_{12}=G_{13}=G_{23}=0.5E_2$.

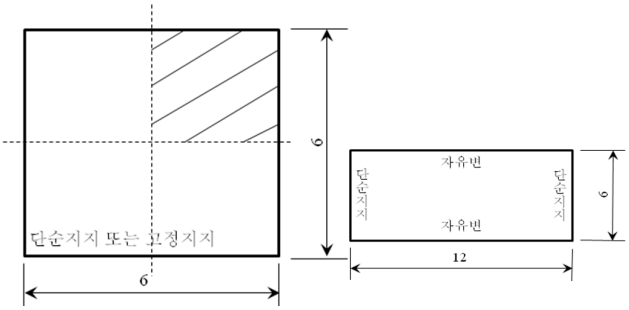


그림 1 해석 대상 복합적층판

적층의 배열순서는 $\left(\theta_1/\theta_2\right)_n$ 로서, $\theta_1=0^{\circ},\theta_2=90^{\circ}$ 인 경우는 정상겹침(cross-ply)으로, 임의각인 경우에는 각겹침(angle-ply)으로 부르기로 한다. 적층의 수는 모두 여덟개로서 $\left(\theta_1/\theta_2\right)_4$ 으로 표기할 수 있다. 적층의 방식에 따라 이들의 배열이 중립면에 대하여 대칭(asymmetric)인 경우와 반대칭(anti-symmetric)인 경우로 나누었다. 즉, $\left(\theta_1/\theta_2/\theta_1/\theta_2\right)$는 반대칭적층이며, $\left(\theta_1/\theta_2/\theta_2/\theta_1\right)$은 대칭적층이다. 작용하중은 판의 상부에 0.1kN/m^{2}의 등분포하중이 작용하는 경우와 판의 중심위치에 1.0kN의 집중하중이 작용하는 경우를 택하였다. 해석결과 그래프의 표기는 다음과 같다: rt-직사각판, sq-정방형판, ag-각겹침, cr-정상겹침, asm-반대칭적층, sm-대칭적층.

몬테카를로 해석(MCS)의 경우 통계학적 전처리과정을 통하여 생성한 정규분포 표본을 사용하였다. 사용된 표본의 수는 $4\times NF\times NE$ 로서 NF,NE 는 각각 표본생성과정에서 사용되는 삼각함수와 구조 모델링에 사용된 유한요소의 수를 의미한다. 본 연구에서는 정방형판의 경우 $NE=6\times6$의 요소망을 사용하였고, $NF=5$로 설정하였다. 따라서 전체 표본의 수는 720이 되나, 개별 유한요소 내에 16개의 표본점을 설정하여 국부평균법을 적용하였고, 따라서 모두 11,520개의 표본에 대한 해석을 수행하고 이를 제안정식화에 의한 결과와 비교하였다. 직사각판의 경우는 4×6의 요소망을 사용하였다. 임의 포아송비 추계장의 분산계수는 0.1로 택하였다.

6.2 해석결과: 몬테카를로 해석과의 비교

제안한 해석법과 몬테카를로 해석과의 비교는 대칭적층 각겹침 직사각판(rt/ag/sm)과 반대칭적층 정상겹침 직사각판(rt/cr/asm), 그리고 반대칭적층 각겹침 정방형판(sq/ag/

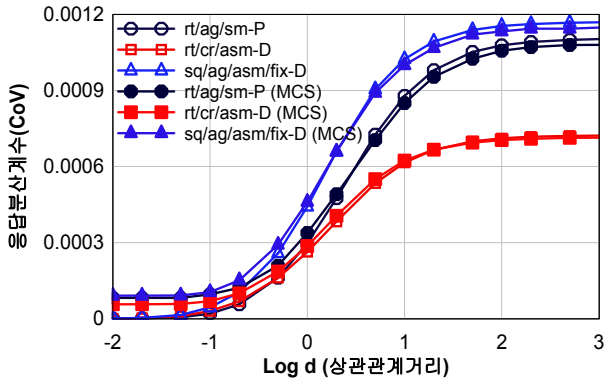


그림 2 제안해석법과 몬테카를로 해석의 비교

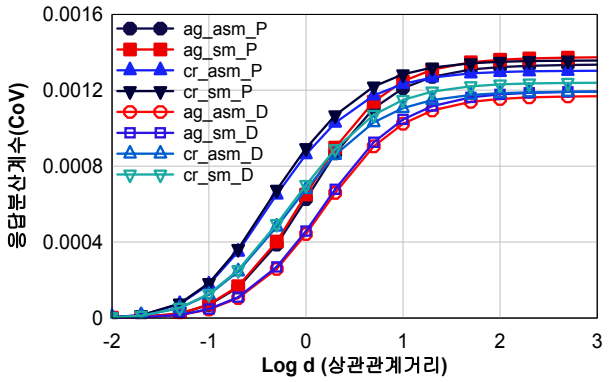


그림 3 고정지지 정방형 적층판의 응답분산계수

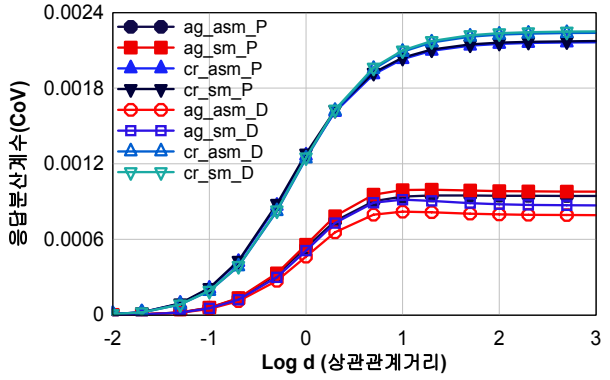


그림 4 단순지지 정방형 적층판의 응답분산계수

asm) 등 대표적인 세 형태에 대하여 비교하였다.

그림 2에 나타낸 바와 같이 제안된 해석법은 몬테카를로 해석에 비하여 응답분산계수를 다소간 과대평가하는 경향은 있으나, 지점 조건, 작용하중(D: 등분포, P: 중앙점 집중하중), 구조의 기하형태(rt-직사각, sq-정방형), 적층방식(sm-대칭, asm-반대칭) 및 겹침각(ag-각겹침, cr-정상겹침)과 무관하게 몬테카를로 해석과 잘 일치하는 결과를 보이고 있다. 상관관계거리가 적은 경우는 추계장 표본의 공간적 주파수가 매우 높은 상태로서, 6×6 또는 4×6의 조악한 유한요소망에 의한 표현에 한계가 있기 때문에 몬테카를로해석이 제안한 해석법과 다른 결과를 보이고 있다. 이 부분에 대한 이론해는 0으로서, 제안한 해석법은 식 (35)와 같이 추계장의 특성을 간접적으로 나타내는 자기상관함수에 대한 수치적분에 의하므로 이론값을 잘 나타내고 있다.

6.3 제안한 해석법에 의한 결과

6.2절에서 제시한 바와 같이 제안한 해석법이 몬테카를로 해석과 잘 일치하는 결과를 보였으므로, 본 절에서는 제안된 해석법에 의한 결과만을 제시하고, 이를 토대로 복합적층판의 추계론적 거동에 대하여 논한다. 해석결과는 작용하중으로 분류하여 나타내었으며(집중하중 P: 중실기호, 등분호하중 D: 중공기호), 각겹침(ag)과 정상겹침(cr), 반대칭(asm)과 대칭적층(sm)으로 구분하여 제시하였다.

6.3.1 정방형 적층판의 해석

고정지지 정방형 적층판에 대한 해석결과는 그림 3에 나타내었다. 고정지지 적층판의 경우 작용하중의 종류에 따라 응답분산계수의 값에 다소간의 차이를 보이고 있으며, 집중하중에 의한 변동계수가 등분포하중에 의한 것보다 크게 나타나고 있다. 상관관계거리 $d=1000.0$에서 나타나는 응답분산계수의 최대값은 추계장 분산계수 대비 1.0~1.5%정도의 값을 나타내었다.

그림 4에 나타낸 바와 같이 단순지지 정상겹침(cr) 적층판의 경우 다른 형태의 겹침방식이나 고정지지된 적층판에 비하여 큰 응답분산계수를 보이고 있으며, 추계장 분산계수 대비 약 2.0%정도의 값을 나타내고 있다. 동일 하중상태에서 정상겹침이 각겹침에 비하여 큰 응답분산계수를 나타내는 것은 직교하는 방향으로의 포아송효과가 각 층이 접하는 면에서 제약되는 효과가 반영된 것으로 볼 수 있으며, 이러한 거동양상은 그림 2의 고정지지판에서도 유사하게 나타나고 있다. 각겹침(ag) 평판의 경우에는 상관관계거리가 10이상인 상태에서 응답분산계수가 감소하는 결과를 나타내어 여타의 판들과는 다른 양상을 나타내고 있다.

6.3.2 양단고정 직사각형 적층판의 해석

길이방향 변이 자유변인 직사각형태의 적층판에 대한 해석결과는 그림 5와 같다. 응답분산계수는 추계장 분산계수 대비 1% 내외의 값을 나타내고 있으며, 중앙점 집중하중(P)에 의한 경우가 등분포하중(D)에 의한 거동보다 높은 응답분산계수를 보이고 있다.

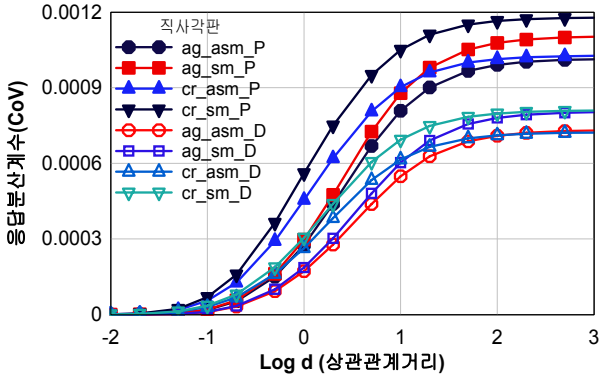
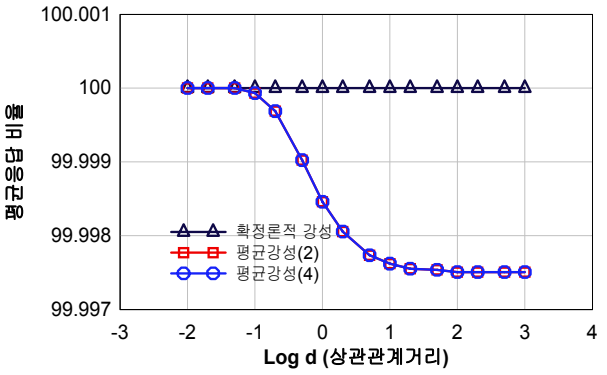


그림 5 직사각형 적층판의 의한 응답분산계수

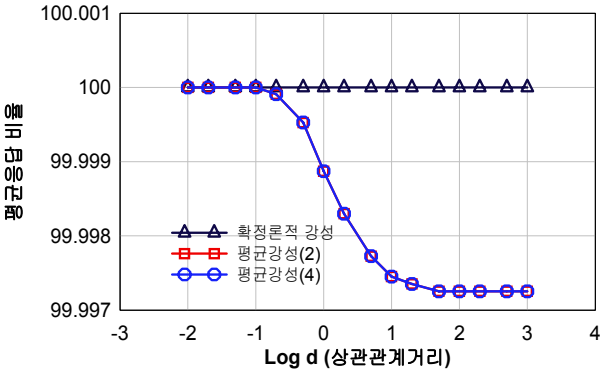
6.3.3 평균강성 고려에 따른 영향

식 (23)의 평균강성 $\mathbf{k}_{\mu}$에서 확정론적 강성 $\mathbf{k}_{d}$에 추가되는 항인 $\mathbf{k}_{\mu}^{(2)}$, $\mathbf{k}_{\mu}^{(4)}$의 기여도를 파악하기 위하여 이들을 순차적으로 고려한 해석을 수행하였다. 해석결과는 단순지지된 정방형판에 대하여 제시하며, 정상겹침 및 각겹침에 대하여 나타내었다.

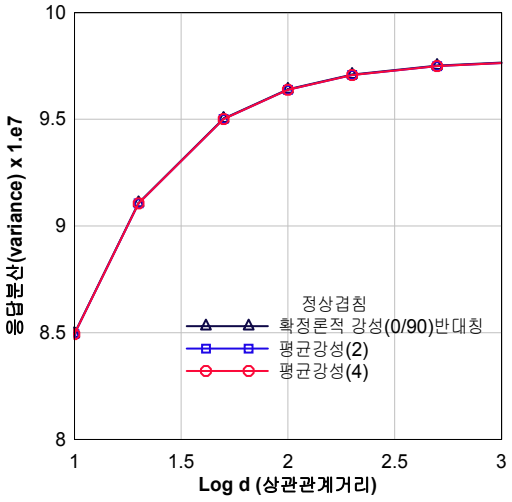
고차 추계장의 영향에 의하여 평균강성은 확정론적 강성보다 증가되므로 그림 6에서 보는 바와 같이 평균변위는 추계장의 상관관계거리가 커짐에 따라 감소한다. 해석에 고려한 추계장의 차수 측면에서 보면, 평균강성의 계산에서 2차항까지(평균강성(2))만 고려하여도 만족할 만한 결과를 얻을 수 있음을 알 수 있다. 즉, 4차항의 추가에 의한 결과의 개선은 2차항을 추가 할 때에 비하여 상대적으로 적은 것으로 산정되었다. 응답분산(variance)의 경우에도 고차항의 고려에 따라 결과의 개선을 볼 수 있다(그림 6-c). 집중하중을 받는 각겹침된 단순지지 정방형판의 경우 그림 4에 제시된 바와 같이 응답분산계수(CoV)는 물론 분산(variance)자체도 상관관계거리 $d=20.0$ 이후에는 감소하는 결과를 나타내고 있다. 그림 6에 제시된 평균변위와 분산의 양상에 따라 응답분산계수가 산정되며, 그 결과는 MCS와 동일한 경향을 나타낸다.

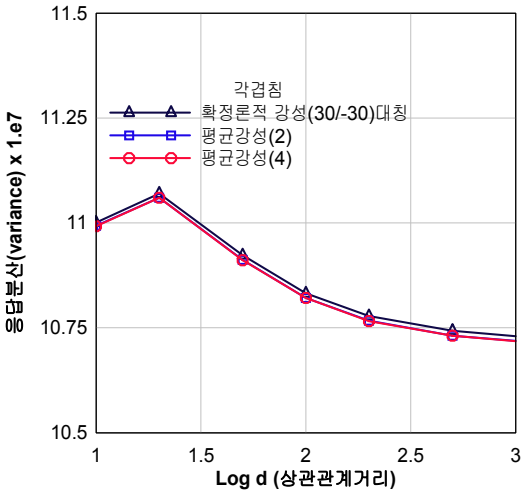


(a) 평균강성에 따른 평균변위의 변화(정상겹침, 등분포하중)



(b) 평균강성에 따른 평균변위의 변화(각겹침, 집중하중)





(c) 평균강성에 따른 응답분산의 변화

그림 6

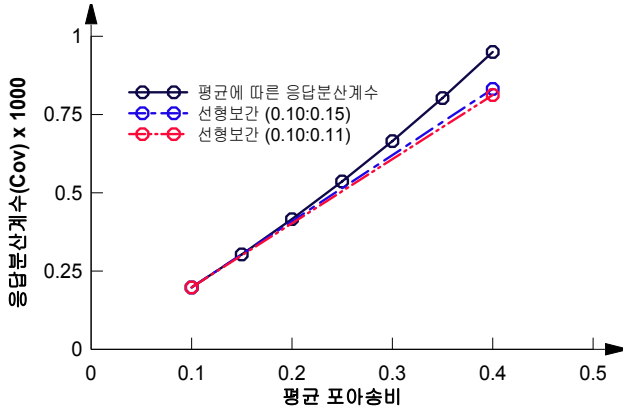


그림 7 평균포아송비에 따른 응답분산계수 추이

6.3.4 평균 포아송비의 값에 따른 응답변화도 관찰

기존의 연구결과(최창근 1995, Deodatis 2003)에서 보는 바와 같이 선형계수인 탄성계수의 임의성에 의한 응답분산계수는 그 평균치에 영향 받지 않으며 확률변수의 평균과는 무관하게 동일한 결과를 나타낸다. 이에 따라 적용 단위(units)에서의 일관성만 유지된다면 어떤 평균치에 대하여도 동일한 응답분산계수가 나타난다. 그러나 포아송비는 응력-변형률관계에 비선형 인수로 개입되는 재료상수(식 9)이며, 따라서 그 평균값이 구조의 응답분산계수에 영향을 미치게 된다.

그림 7은 중앙점 집중하중을 받는 각겹침, 반대칭 적층된 단순지지 정방형판에서 평균포아송비의 변화에 따른 응답분산계수를 나타낸 것으로, 상관관계거리 $d=1.0$에서의 결과이다. 그림에서 보는 바와 같이 응답분산계수는 평균포아송비에 대하여 정비례관계에 있지 않으며, 평균값 증가에 따라 응답분산계수의 증가율이 커지는 양상을 보여주었다. 선형보간된 두 그래프는 각각 평균포아송비 0.10과 0.15 그리고 0.10과 0.11사이에서 얻은 결과에 대한 기울기의 선형연장선이다.

7. 결 론

본 논문에서는 복합적층구조에서 포아송비가 공간적인 임의성을 가질 경우 이에 의한 응답분산계수 산정을 위한 추계론적 유한요소해석 정식화를 제시하였다. 이를 위하여 복합적층재료의 응력-변형률관계를 추계장함수의 차수에 따른 함수로 재구성하였고, 이를 적용하여 정식화를 수행하였다. 제시한 정식화의 타당성을 보이기 위하여 정방형 및 직사각 적층판에 대한 해석을 수행하였고, 이를 몬테카를로 해석결과와 비교하였다.

해석에서는 경계조건과 하중조건을 달리한 모델을 사용하였으며, 이를 통하여 경계조건에 의한 변형제한이 포아송효과에 영향을 미치고, 이에 따라 응답분산계수가 영향 받게 됨을 알 수 있었다. 하중의 형태 역시 경계조건과 마찬가지로 포아송거동에 영향을 미치는 것으로 관찰되었다. 포아송비의 공간적 임의성에 의한 복합적층평판의 응답분산정도는, 본 논문에서 고찰한 평판의 경우, 추계장 분산계수대비 1.0~2.5%의 범위에 있는 것으로 나타났으며 적층의 형태, 경계조건 및 하중형태 등에 따른 변동범위가 큼을 알 수 있었다.

포아송비의 평균치에 따른 응답분산계수의 고찰을 통하여 재료 포아송비 평균치 자체가 응답분산계수에 영향을 미치며, 그 경향은 선형비례관계에 있지 않고, 평균 포아송비가 커짐에 따라 응답분산계수의 증가가 가속화됨을 관찰하였다.

본 논문에서 제시한 정식화는 복합적층판의 양방향 재료탄성계수, 그리고 전단탄성계수 등 재료의 역학적 주요상수에서의 임의성 고려 및 이들 상수와의 상관관계를 고려한 추계론적 유한요소해석법 개발의 기초가 될 수 있을 것으로 판단된다.

참 고 문 헌

최창근, 노혁천 (1995) 평판구조의 추계론적 유한요소해석, 한국전산구조공학회 논문집, 8(1), pp.127~136.

Deodatis, G., Graham-Brady L., Micaletti, R. (2003) A Hierarchy of Upper Bounds on the Response of Stochastic Systems with Large Variation of Their Properties: Random Variable Case, *Probabilistic Engineering Mechanics*, 18, pp.349~363.

Falsone, G. Impollonia, N. (2002) A New Approach for the Stochastic Analysis of Finite Element Modeled Structures with Uncertain Parameters, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 191(44), pp.5067~5085.

Fenton, G.A., Vanmarck, E.H. (1990) Simulation of Random Field via Local Average Subdivision, *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 116(8), pp.1733~1749.

Grigoriu, M. (2004) Spectral Representation for a Class of Non-Gaussian Processes, *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 130(5), pp.541~ 546.

Kant, T, Varaiya, J.H., Arora, C.P. (1990) Finite Element Transient Analysis of Composite and Sandwich Plates Based on a Refined Theory and Implicit Time Integration Schemes, *Computers and Structures*, 36(3), pp.401~420.

Lin, Y.K. (1967) Probabilistic Theory of Structural

Dynamics. McGraw-Hill book company.

Liu, W.K., Belytschko, T., Mani, A. (1986) Random Field Finite Element, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 23, pp.1831~1845.

Pavlovic, R., Pavlovic, I. (2005) Influence of Rotator Inertia and Transverse Shear on Stochastic Instability of the Cross-ply Laminated Beam, *International Journal of Solid and Structures*, 42, pp.4913~4926.

Reddy, J.N. (1997) Mechanics of Laminated Composite Plates, Theory and Analysis, CRC Press, Inc.

Schuëller, G.I. (2007) On the Treatment of Uncertainties in Structural Mechanics and Analysis, *Computers and Structures*, 85(5-6), pp.235~243.

Shinozuka, M. (1972) Monte Carlo Solution of Structural Dynamics, *Computers and Structures*, 2, pp.855~874.

Singh, B.N., Bisht, A.K.S., Pandit, M.K., Shukla, K.K. (2009) Nonlinear Free Vibration Analysis of Composite Plates with Material Uncertainties: A Monte Carlo Simulation Approach, *Journal of Sound and Vibration*, 324, pp.126~138.

Vanmarcke, E. (1983) Stochastic Finite Element Analysis of Simple Beams, *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 109(5), pp.1203~1214.

Vinckenroy, G.V., Wilde W.P. (1995) The use of Monte Carlo Techniques in Statistical Finite Element Methods for the Determination of the Structural Behavior of Composite Materials Structural Components, *Composite Structures*, 32, pp.247~253.