한국지능시스템학회 논문지 2009, Vol. 19, No. 3, pp. 337-342

비선형 시스템의 시간 지연 간격에 종속적인 안정도 분석 및 제어기 설계: TS 퍼지 모델 적용

Delay-range-dependent Stability Analysis and Stabilization for Nonlinear Systems : T-S Fuzzy Model Approach

송민국* · 박진배* · 김진규** · 주영훈***+
MIn Kook Song*, Jin Bae Park*, Jin Kyu Kim** and Young Hoon Joo***+

* 연세대학교 전기전자공학과
**군산대학교 전자정보공학부

요 약

본 논문은 비선형 시스템의 퍼지 모델을 적용한 시간 지연 간격에 종속적인 안정도 분석 및 제어기 설계에 대해서 논의한다. 먼저, 시간 지연을 포함하는 비선형 시스템을 T-S 퍼지 시스템으로 모델링한다. 시간 지연을 포함하는 전체 폐루프 비선형 시스템은 다중 시간 지연을 갖는 T-S 퍼지 시스템이 된다. 전체 폐루프 퍼지 시스템의 안정도를 분석하고, 안정화 시키는 퍼지 제어기 설계를 위한 필요충분 조건을 유도한다. 유도된 안정도 및 제어기 설계 조건이 시간 지연 간격에 종속적임을 확인하다. 기존의 시간 지연에 종속적인 안정도 및 제어기 설계 조건 보다 넓은 범위를 나타냄을 확인한다. 제안된 필요충분 조건을 선형 행렬 부등식의 형태로 나타내고, 기존의 다양한 프로그래밍 기법을 이용하여 제어기 이득값을 구한다. 예제를 통하여 제안된 이론의 타당성을 확인한다.

키워드 : 퍼지 제어기, 선형 행렬 부등식(LMI). 퍼지 시스템. 시간지연, T-S 퍼지 모델

Abstract

This paper concerns delay-range-dependent robust stability and stabilization for time-delay nonliner system via T-S fuzzy model approach. The time delay is assumed to be a time-varying continuous function belonging to a given range. On the basis of a novel Lyapunov - Krasovskii functional, which includes the information of the range, delay-range-dependent stability criteria are established in terms of linear matrix inequality. It is shown that the new criteria can provide less conservative results than some existing ones. Moreover, the stability criteria are also used to design the stabilizing state-feedback controllers. Numerical examples are given to demonstrate the applicability of the proposed approach.

Key Words : Fuzzy controller, Linear Matrix Inequalities. Time-delay, T-S fuzzy model

1. 서 론

산업 현장에서 널리 쓰이는 대부분의 시스템은 강한 비선형성과 불확실성을 가지고 있으며, 이를 제어할 때에 어느 정도의 시간 지연이 발생 하게 된다. 비선형 시스템에서는 시스템의 특징상 시간 지연 현상이 발견된다. 이러한 시간 지연을 포함한 비선형 시스템은 시간지연에 의해 시스템 전체의 성능이 떨어지고, 심지어는 시스템 자체가 불안정해 질수도 있다. 따라서 이러한 시간 지연현상이 반드시 포함되는 비선형 시스템의 안정도 해석에 관한 연구가 주요 관심사가 되어 왔으며, 활발한 연구가 진행되어 왔다 [1-4].

그 중 퍼지 제어는 복잡하고 불확실한 비선형 시스템을 제어하는데 성공적인결과를 거두었다. 특히, 시스템의 모델이 불확실하면 할수록 더 복잡할수록 퍼지 제어는 더욱 그 가치를 발휘한다. 시간 지연을 갖는 선형 시스템에 대한 강인 제어기 설계 논문은 많이 있다.

Han [3] 에 의해서 단일 시간 지연을 가지는 퍼지 시스템에 대한 연구가 진행되어 왔다. 이를 토대로 Jia [4]은 비선형 플랜트를 가지는 퍼지 시스템의 모델링 및 안정화에 관한 연구를 수행하였다. 지금까지 연구 되어온 시간 지연을 포함하는 비선형 시스템에 관한 다양한 결과를 비선형 플랜트에 맞게 적용시켰다. 이러한 시간 지연을 가지는 비선형 시스템의 제어기 설계를 위하여 본 논문에서는 퍼지이론을 도입한다. T-S 퍼지이론은 복잡한 비선형 시스템을 수학적으로 모델링할 경우 고차의 모델을 이용하거나 모델 근사화를 이용하여 낮은 차수로 표현하지만 결과는 만족하지 않다고 알려져 있다. T-S 퍼지 시스템 [5-6] 은 수학적으로 해석이 어려운 비선형 시스템의 모델링에 유용하며,

접수일자 : 2009년 4월 6일
완료일자 : 2009년 6월 6일
+ 책임저자
본 논문은 본 학회 2009년도 춘계학술대회에서 선정된 우수논문임.
본 연구는 2008년 교육과학기술부의 재원으로 한국과학재단의 지원을 받아 수행된 연구임(R01-2008-000-20844-0)

동시에 선형 제어 이론의 도입에 유리하다.

본 논문에서는 시간 지연을 가지는 퍼지 시스템의 퍼지 제어기를 설계하고자 한다. 먼저 비선형 퍼지 시스템을 T-S 퍼지 모델로 모델링한다. 모델링된 시스템과 멤버십 함수를 공유하는 퍼지 제어기를 설계한다. 제안된 퍼지 제어기와 비선형 시스템을 합친 폐루프 시스템을 안정화 시키는 제어기를 설계한다. 선형 행렬 부등식을 이용하여 제어기 설계의 조건과 제어기 이득 값을 설계한다. 설계된 제어기의 이득값은 시간 지연 간격에 종속적임을 확인한다.

2. 퍼지 모델

본 논문에서는 다음과 같은 이산 비선형 시스템을 고려한다.

$$x(k+1)=f(x(k))+g(u(k)) \tag{1}$$

여기서 $x(k)\in R^n$는 상태변수, $u(k)\in R^m$는 제어 입력이다. 비선형 함수 $f(k)$와 $g(k)$는 공간 $D\in R^n$에서 원할함수라고 가정한다. 이산 비선형 시스템의 초기값은 $x(k_0)=x_0$이며, 각각의 시변 시간 지연 $\tau(k)\geq 0$ 는 랜덤 시간 지연을, $d(k)\geq 0$ 는 랜덤 시간 지연을 의미하며, 제어기는 우리가 설계해야 하는 부분이다.

본 논문에서는 각각의 시변 시간지연 $\tau(k)$와 $d(k)$는 다음과 같은 상한과 하한을 가진다고 가정을 가진다. 이러한 가정은 일반적인 것이며, 지금까지의 연구결과에서도 사용되어 온 가정이다.

$$\tau_1\leq\tau(k)\leq\tau_2,\quad d_1\leq d(k)\leq d_2$$

Takagi-Sugeno(T-S) 퍼지 모델은 다음과 같은 퍼지 IF-THEN 규칙을 사용하여 비선형 시스템을 나타낸다.

$$\begin{aligned}&Rule\ i:\\&IF\ z_1\ is\ \Gamma_1^i,\ \cdots,\ \text{and}\ \ z_n\ is\ \Gamma_n^i,\\&THEN\ \ x(k+1)=A_ix(k)+B_iu(k)\\&\qquad\qquad+A_{0i}x(k-\tau(k))+A_{1i}x(j-d(k)),\end{aligned}\tag{2}$$

여기서 $\Gamma_h^i\ (h=1,2,\cdots c)$는 i번째 규칙에서 h번째 전건부 변수의 퍼지 집합이며, $A_{i,}B_{i,}A_{0i},A_{1i}$는 알려진 차원의 행렬이며 각각 타당한 차원의 행렬이며, $z_h(k)$는 h번째 전건부 변수의 퍼지집합이며, r는 퍼지 규칙수를 나타낸다.

중심값-평균 비퍼지화, 곱셈추론, 싱글톤 퍼지화를 사용하면 퍼지 IF-THEN 규칙 (2)의 전역 동특성은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}&x(k+1)=\sum_{i=1}^{c}\mu_i(x(k))[A_ix(k)+Bu(k)],\\&y(k)=\sum_{i=1}^{c}\mu_i(x(k))C_ix(t)\\&x(t)=\phi(t),\qquad t\in\{-\tau-d,\cdots,0\}.\end{aligned}\tag{3}$$

여기서 $w_i(x(k))=\prod_{h=1}^{n}\Gamma_h^i(z_h(k))$, $\mu_i(x(k))=\dfrac{w_i(x(k))}{\sum_{i=1}^{c}w_i(x(k))}$, 그리고 $\Gamma_h^i(x_h(k))$는 h번째 전건부 변수 $z_h(t)$의 퍼지 집합 Γ_j^i에 대한 소속도이다.

본 논문에서는 다음과 같은 퍼지 제어기를 설계한다. r개의 퍼지 규칙과 함께 (2)에서 사용된 퍼지 모델을 바탕으로 퍼지 제어기의 퍼지 규칙은 다음과 같다. 퍼지 제어기의 멤버쉽 함수는 플랜트의 멤버쉽 함수와 같다는 PDC 개념을 도입한다.

$$\begin{aligned}&Rule\ i:\\&IF\ z_1(k)\ is\ \Gamma_1^i,\ \cdots,\ \text{and}\ \ z_n(k)\ is\ \Gamma_n^i,\\&THEN\ \ u(k)=K_ix(k).\end{aligned}\tag{4}$$

여기서 $\Gamma_h^i(h=1,2,\cdots c)$는 i번째 규칙에서 h번째 전건부 변수의 퍼지 집합이며, K_i는 i번째규칙의 퍼지 제어기 이득값이며, 본 논문에서 설계하여야 하는 값이다. 비선형 플랜트와 마찬가지로 중심값-평균 비퍼지화, 곱셈추, 싱글톤 퍼지화를 사용하면 퍼지 제어기 IF-THEN 규칙 (4)의 전역 동특성은 다음과 같다.

$$u(k)=\sum_{i=1}^{c}\mu_i(x(k))K_ix(k),\tag{5}$$

따라서 주어진 플랜트와 제어기의 전역 동특성 (3)과 (5)를 이용하면, 폐루프 퍼지 시스템은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}&x(k+1)=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\mu_i(x(k))\mu_j(x(k))[A_ix(k)\\&+B_iK_jx(k)+A_{0i}x(k-\tau(k))+A_{1i}x(k-d(k))]\\&x(t)=\phi(t),\qquad t\in\{-\tau-\max\{d,\tau\},\cdots,0\}.\end{aligned}\tag{6}$$

정의 1. 시스템(6)은 초기값 $x(0)=x_0$이고, 다음의 조건을 만족하는 $\alpha>0$, $\beta>0$이 존재할 경우 지수적으로 안정하다고 정의 한다.

$$\|x(k)\|\leq\alpha\sup_{k_0-\eta\leq s\leq k_0}\|\phi(s)\|e^{-\beta(k-k_0)}\tag{7}$$

이때, $k\geq k_0$이다.

본 논문에서는 지금까지 연구되어지지 않았던 시간 지연을 가지는 퍼지 비선형 시스템의 지수적인안정도 판별 및 제어기 설계를 목적으로 한다. 설계된 제어기 이득값 K_i는 폐루프 시스템 (6)을 지수적으로 안정화 시키는 값으로 설계한다. 안정도 조건과 제어기 설계 조건은 지금까지의 연구결과에서 사용 되지 않은 시간 지연 간격에 종석 적이며, 이러한 연구 결과는 기존의 이론에 비해 보다 확장된 것임을 확인한다. 다음 장에서 제어기 설계 및 안정도 분석에서 이용하고자 한다.

3. 안정도 판별 및 제어기 설계

이 장에서는 시간 지연을 갖는 폐루프 퍼지 시스템 (6)의 안정도에 대해서 논의한다. 시간 지연을 갖는 폐루프 퍼지 시스템 (6)의 안정도를 판별하기 위한 시간 지연 간격에 종속적인 충분조건을 제시한다. 정의 1을 바탕으로 시간 지연

을 갖는 폐루프 퍼지 시스템 (6)의 지수적 안정도를 판별하면 다음의 정리 1을 얻을 수 있다.

정리 1. 시간 지연을 갖는 폐루프 퍼지 시스템 (6)은 다음의 행렬 부등식이 만족하는 행렬 $P=P^T>0$, $Q_i=Q_i^T>0(i=1,2,3)$, $Z_i=Z_i^T>0,(i=1,2,3)$, $M_i, S_i, N_i(i=1,2,3)$, $T_i(i=1,2,3), K_j(j=1,2,\cdots,r)$, ϵ_{ij}^{-1}가 존재한다면, 지수적으로 안정하다.

$$\begin{bmatrix}\Phi_{11}^{ii} & * \\ \Phi_{12}^{ii} & -I\end{bmatrix}<0, i=1,2,\cdots,r \tag{8}$$

$$\begin{bmatrix}\Phi_{11}^{ij} & * \\ \Phi_{21}^{ij} & -I\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\Phi_{11}^{ji} & * \\ \Phi_{21}^{ji} & -I\end{bmatrix}<0, i<j, i=1,2,\cdots,r \tag{9}$$

$$Z_1+Z_2-M_3\ge 0 \tag{10}$$

$$Z_3-Z_1-N_3\ge 0, \tag{11}$$

$$Z_2+Z_3-S_3\ge 0, \tag{12}$$

$$\begin{bmatrix}M_1 & M_2 \\ M_2^T & M_3\end{bmatrix}\ge 0,\ \begin{bmatrix}N_1 & N_2 \\ N_2^T & N_3\end{bmatrix}\ge 0,\ \begin{bmatrix}S_1 & S_2 \\ S_2^T & S_3\end{bmatrix}\ge 0, \tag{13}$$

여기서,

$$\Phi_{11}^{ij}=\begin{bmatrix}\Theta_{11} & \Theta_{12} & \Theta_{13} & \Theta_{14} & \Theta_{15} \\ * & \Theta_{22} & \Theta_{23} & \Theta_{24} & \Theta_{25} \\ * & * & \Theta_{33} & \Theta_{34} & \Theta_{35} \\ * & * & * & \Theta_{44} & \Theta_{45} \\ * & * & * & * & \Theta_{55}\end{bmatrix}+\tau_2 M_1+(\tau_2-\tau_1)N_1+(\tau_2-\tau_1)S_1$$
$$+M_1+(d_2-d_1)N_1+(d_2-d_1)S_1,$$
$$\Phi_{12}^{ij}=\left[D^T T_1^T\ D^T T_2^T\ D^T T_3^T\ D^T T_4^T\ D^T T_5^T\right],$$

$$\begin{aligned}
\Theta_{11}&=Q_1+Q_3+M_{211}^T+M_{211}+T_1(A_i+B_iK_j)\\
&\quad+(A_i+B_iK_j)^T T_1^T,\\
\Theta_{12}&=M_{221}^T-M_{221}-N_{211}+S_{211}+T_1A_{0i}+T_1A_{1i}\\
&\quad+(A_i+B_iK_j)^T T_2^T,\\
\Theta_{13}&=M_{231}^T+N_{211}+(A_i+B_iK_j)^T T_3^T,\\
\Theta_{14}&=M_{241}^T-S_{211}+(A_i+B_iK_j)^T T_4^T,\\
\Theta_{15}&=P+M_{251}^T-T_1+(A_i+B_iK_j)^T T_5^T,\\
\Theta_{22}&=-Q_2-M_{221}^T-M_{221}-N_{221}-N_{221}^T+S_{221}+S_{221}^T\\
&\quad+T_2A_{0i}+T_2A_{1i}+T_2A_{0i}^T+T_2A_{1i}^T,\\
\Theta_{23}&=-M_{231}^T-N_{231}^T+N_{221}+S_{231}^T+A_{0i}^TT_3^T+A_{1i}^TT_3^T,\\
\Theta_{24}&=-M_{241}^T-N_{241}^T+S_{241}^T-S_{221}+A_{0i}^TT_4^T+A_{1i}^TT_4^T,\\
\Theta_{25}&=-M_{251}^T-N_{251}^T+S_{251}^T-T_2+A_{0i}^TT_5^T+A_{1i}^TT_5^T,\\
\Theta_{33}&=-Q_1+Q_2+N_{231}^T+N_{231},\\
\Theta_{34}&=N_{241}^T-S_{231}\\
\Theta_{35}&=N_{251}-T_3,\\
\Theta_{44}&=-Q_3-S_{241}^T-S_{241},\\
\Theta_{45}&=-S_{251}^T-T_4,\\
\Theta_{55}&=\tau_2Z_1+\tau_2Z_2+(\tau_2-\tau_1)Z_3-T_5-T_5^T\\
&\quad+d_2Z_1+d_2Z_2+(d_2-d_1)Z_3
\end{aligned}$$

증명) 시간 지연을 갖는 폐루프 퍼지 시스템(6)의 안정도 해석을 위해서 본 논문에서는 지금까지의 연구결과와 마찬가지로 Lyapunov-Krasovskii의 방법을 적용한다. 이 논문에서 주어진 비선형 시스템의 안정도 해석을 위해서 디스크립터 모델 변환을 이용한다. 이때의 모델 변환을 이용하면 시간 지연을 갖는 폐루프 퍼지 시스템(6)은 다음과 같은 형태로 변환할 수 있다.

$$\begin{aligned}
E\bar{x}(k+1)&=\begin{bmatrix}x(k+1)\\0\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}y(k)\\-y(k)+De(k+1-g(t))+(A_0+A_d)e(k)\end{bmatrix}\\
&\quad-\begin{bmatrix}0\\A_d\end{bmatrix}\sum_{o=k-\tau(k)}^{k}y(o)
\end{aligned}$$

여기서 $\bar{x}(k)=$ 이며, $E=diag\{I,0\}$이다.

다음으로 안정도 해석을 위하여 다음의 리아프노프 함수를 고려한다.

$$\begin{aligned}
V=&\ \overline{X^T}E P\bar{x}+\sum_{h=-\theta}^{0}\sum_{s=k+\theta}^{k}y^k(s)Ry(k)\\
&+\sum_{o=k-\tau(t)}^{k}x^T(o)Sx(o)\\
&+\sum_{o=k-g(k)}^{k}y^T(o)Qy(o)\\
&+\sum_{o=k-\rho}^{k}(s-t+\rho)x^T(o)Tx(o).
\end{aligned}$$

여기서 각각의 행렬 $P=\begin{bmatrix}P_1 & 0\\P_2 & P_3\end{bmatrix}, P_1, R, S, Q>0$이다.

제안된 리아프노프 함수의 각각의 항을 시간 k에 관하여 차이를 구하면 다음과 같다.

$$E(\overline{x^T}EP\bar{x})=2x^T(k+1)P_1x(k)=2\overline{x^T}P^T\begin{bmatrix}x(k+1)\\0\end{bmatrix}.$$

식 (10)은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
&-\sum_{i=1}^{k}h_ih_j(\rho)2x^TP\overline{B}_iK_j\sum_{o=k-\tau}^{k}x(o)\le\\
&\sum_{i=1}^{k}h_ih_j(\tau)\begin{bmatrix}x\\\sum_{o=k-\tau}^{k}x(o)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{X_{i1}} & \overline{Y_{i1}}-P\overline{B}_iK_j\\ * & \overline{Z_{i1}}\end{bmatrix}\\
&\times\begin{bmatrix}x\\\sum_{o=k-\tau}^{k}x(o)\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

리아프노프 함수의 다른 나머지 항들의 차이를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
&E\left\{\sum_{\theta=-ho=k+\theta}^{0}\sum^{k}y^T(o)Ry(o)\right\}\\
&=\tau(t)y^T(k)Ry(k)-\sum_{o=k-\tau(k)}^{k}y(o)Ry(o)\\
&E\left\{\sum_{o=k-\tau(k)}^{k}x^T(o)Sx(o)\right\}\\
&=x^T(k)Sx(k)-x^T(k-\tau(k))Sx(k-\tau(k))
\end{aligned}$$

$$E\left\{\sum_{o=k-g(k)}^{k} y^T(o)Qy(o)\right\}$$
$$= y^T(k)Qy(k) - y^T(k-g(k))Qx(k-g(k))$$
$$E\left\{\sum_{o=k-\rho}^{k} (s-k+\rho)x^T(o)Tx(o).\right\}$$
$$= \rho x^T Tx - \sum_{o=k-\rho}^{k} x^T Tx$$
$$\leq \rho x^T Tx - \sum_{o=k-\tau}^{k} x^T(o)Tx(o)$$
$$\leq \rho x^T(o)Tx(o) - \frac{1}{\rho}\left[\sum_{o=k-\tau}^{k} x(o)\right]T\left[\sum_{o=k-\tau}^{k} x(o)\right]$$

여기서, $T>0$, 그리고 $0 \leq \tau(k) \leq \rho$이다.

따라서 위의 식들을 이용하여, 전체 리아프노프 함수의 시간 k에 관한 차이를 구해보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\Delta V \leq\ & \overline{x^T}\Phi\overline{x}(t) + \sum_{o=k-h}^{k} y^T(o)Ry(o)\\ & - x^T(k-\tau(k))Sx(k-\tau(k))\\ & - \eta(k) - y^T(k-g(k))Qy(k-g(k))\\ & + \sum_{i=1}^{k} h_i h_j(\tau)2x^T\left[P\overline{Y_{i1}} - \overline{B}_i K_j\right]\sum_{o=k-\tau}^{k} x + \rho x^T Tx\\ & + \sum_{i=1}^{k} h_i\left[\sum_{o=k-\tau}^{k} x(o)\right](\overline{Z_{i1}} - \frac{1}{\rho}T)\left[\sum_{o=k-\tau}^{k} x(o)\right]\end{aligned}$$

여기서

$$\eta(k) = -2\sum_{o=k-\tau(k)}^{k} \overline{x^T}P^T\begin{bmatrix}0\\ A_d\end{bmatrix}y(o) \text{ 이다.}$$

보조정리 1을 이용하여 $\eta(k)$를 정리하면 다음과 같다. 보조정리 1을 이용하기 위해서

$$N = P^T\begin{bmatrix}0\\ A_d\end{bmatrix}, a = y(S), b = \overline{x}(t) \text{ 로 대입한다.}$$

다음의 식이 항등을 증명에 사용하기 위해 사용한다.

$$\begin{aligned}0 &= 2x^T P_1 x - 2x^T P_1 x\\ &= 2\sum_{i=1}^{k} h_i h_j(\tau)\left[(\overline{A_i} + \overline{B}_i K_j)x - \overline{B}_i K_j \sum_{o=k-\tau}^{k} x(s)(o)\right]P_1 x\\ &\quad - 2x^T P_1 x\\ &= \sum_{i=1}^{k} h_i h_j(\tau)2x^T(\overline{A_i} + \overline{B}_i K_j)^T P_1 x - 2x^T P_1 x\\ &\quad - \sum_{i=1}^{k} h_i h_j(\tau)2x^T P_1\overline{B}_i K_j\sum_{o=k-\tau}^{k} x(o)\end{aligned}$$

위와 비슷하게, 보조정리 1을 이용하여 다음을 증명할 수 있다.

$$\begin{aligned}& -\sum_{i,j=1}^{k} h_i h_j(\tau)2\dot{x}^T P_1\overline{B_i}K_j\sum_{o=k-\tau}^{k} x(o)\\ & \leq \sum_{i=1}^{k} h_i h_j(\tau)\begin{bmatrix}x\\ \sum_{o=k-\tau}^{k} x(o)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{X_{i2}} & \overline{Y_{i2}} - P\overline{B}_i K_j\\ * & \overline{Z_{i2}}\end{bmatrix}\\ & \quad \times\begin{bmatrix}x\\ \sum_{o=k-\tau}^{k} x(o)\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{14}$$

식 (14)은 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned}0 \leq\ & \sum_{i,j=1}^{k} h_i h_j(\tau)2x^T(\overline{A_i} + \overline{B}_i K_j)^T P_1 x - 2x^T P_1 x\\ & + \sum_{i=1}^{k} h_i h_j(\tau)\begin{bmatrix}x\\ \sum_{o=k-\tau}^{k} x(o)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{X_{i2}} & \overline{Y_{i2}} - P\overline{B}_i K_j\\ * & \overline{Z_{i2}}\end{bmatrix}\\ & \times\begin{bmatrix}x\\ \sum_{o=k-\tau}^{k} x(o)\end{bmatrix}\end{aligned}$$

이제 $z^T = \left[x^T\ \dot{x}^T\ \sum_{o=k-\tau}^{k} x(o)\right]$로 정의하고, 이를 이용하여 다음을 정리하면,

$$\begin{aligned}&\eta(t)\\ &\leq \sum_{o=k-\tau(k)}^{k}\begin{bmatrix}y(o)\\ \overline{x}(k)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{T} & \overline{Y} - [0\ A_d]P\\ \overline{Y^T} - P^T\begin{bmatrix}0\\ A_d\end{bmatrix} & Z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y(s)\\ \overline{x}(k)\end{bmatrix}\\ &= \sum_{o=k-\tau(k)}^{k} y^T(o)\overline{T}y(o) + \sum_{o=k-\tau(k)}^{k}\overline{x^T}(t)Z\overline{x}(t)\\ &\quad + 2\sum_{o=k-\tau(k)}^{k} y^T(o)(\overline{Y} - [0\ A_d]P)\overline{x}(k)\\ &= \sum_{o=k-\tau(k)}^{k} y^T(o)Ry(o) + \tau(k)\overline{x^T}(t)\overline{Zx(k)}\\ &\leq \sum_{o=k-\tau(k)}^{k} y^T(o)Ry(o) + x^T(k)(\overline{Y} - [0\ A_d]P)\overline{x}(k)\\ &\quad - x^T(t-\tau(k))(\overline{Y} - [0\ A_d]P)\overline{x}(k)\end{aligned}$$

이를 이용하여 Lyapunov 함수의 시간 k에 관한 차이를 정리하면, 다음과 같다.

$$\Delta V \leq z^T(k)\Phi z(k)$$

따라서 LMI 조건 (9)-(11) 이 만족 되면, $\Delta V(k) \leq 0$를 만족한다. 따라서 Lyapunov-Krasovskii의 이론에 따라서 시간 지연을 갖는 폐루프 퍼지 시스템 (6)은 안정하다.

정리 1 에서는 시간 지연을 갖는 폐루프 퍼지 시스템 (6)의 안정도 분석을 위한 필요 충분 조건을 유도하였다. 그러나 정리 1에서 제시한 조건들은 비선형 행렬 부등식의 형태이므로, 다음의 정리 2에서 선형 행렬 부등식을 유도한다.

정리 2. 시간 지연을 갖는 폐루프 퍼지 시스템(6)은 다음의 행렬 부등식이 만족하는 행력 $X = X^T > 0$, $X_i = X_i^T > 0\ (i=1,2,3)$, $\overline{Z_i} = \overline{Z_i^T} > 0, (i=1,2,3)$, $\overline{M_i}, \overline{S_i}, \overline{N_i}(i=1,2,3)$, $T_i(i=1,2,3), \overline{K_j}(j=1,2,\cdots,r)$, 가 존재한다면,

$$\begin{bmatrix}\overline{\Phi_{11}^{ii}} & *\\ \overline{\Phi_{12}^{ii}} & -I\end{bmatrix} < 0, i = 1,2,\cdots,r$$
$$\begin{bmatrix}\overline{\Phi_{11}^{ij}} & *\\ \overline{\Phi_{21}^{ij}} & -I\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\overline{\Phi_{11}^{ji}} & *\\ \overline{\Phi_{21}^{ji}} & -I\end{bmatrix} < 0, i<j, i = 1,2,\cdots,r$$
$$\overline{Z_1} + \overline{Z_2} - \overline{M_3} \geq 0$$
$$\overline{Z_3} - \overline{Z_1} - \overline{N_3} \geq 0,$$

$$\overline{Z_2}+\overline{Z_3}-\overline{S_3}\geq 0,$$
$$\begin{bmatrix}\overline{M_1} & \overline{M_2}\\ \overline{M_2^T} & \overline{M_3}\end{bmatrix}\geq 0,\quad \begin{bmatrix}\overline{N_1} & \overline{N_2}\\ \overline{N_2^T} & \overline{N_3}\end{bmatrix}\geq 0,\quad \begin{bmatrix}\overline{S_1} & \overline{S_2}\\ \overline{S_2^T} & \overline{S_3}\end{bmatrix}\geq 0,$$

여기서,

$$\overline{\Phi_{11}^{ij}}=\begin{bmatrix}\overline{\Theta_{11}} & \overline{\Theta_{12}} & \overline{\Theta_{13}} & \overline{\Theta_{14}} & \overline{\Theta_{15}}\\ * & \overline{\Theta_{22}} & \overline{\Theta_{23}} & \overline{\Theta_{24}} & \overline{\Theta_{25}}\\ * & * & \overline{\Theta_{33}} & \overline{\Theta_{34}} & \overline{\Theta_{35}}\\ * & * & * & \overline{\Theta_{44}} & \overline{\Theta_{45}}\\ * & * & * & * & \overline{\Theta_{55}}\end{bmatrix}+\tau_2\overline{M_1}+(\tau_2-\tau_1)\overline{N_1}+(\tau_2-\tau_1)\overline{S_1}$$
$$+\overline{M_1}+(d_2-d_1)\overline{N_1}+(d_2-d_1)\overline{S_1},$$
$$\overline{\Phi_{12}^{ij}}=\left[\overline{D^TX_1^T}\ \overline{D^TX_2^T}\ \overline{D^TX_3^T}\ \overline{D^TX_4^T}\ \overline{D^TX_5^T}\right],$$
$$\overline{\Theta_{11}}=\overline{Q_1}+\overline{Q_3}+\overline{M_{211}^T}+\overline{M_{211}}+X_1(A_i+B_i\overline{K_j})$$
$$+(A_i+B_i\overline{K_j})^TX_1^T,$$
$$\overline{\Theta_{12}}=\overline{M_{221}^T}-\overline{M_{221}}-\overline{N_{211}}+\overline{S_{211}}+X_1A_{0i}+X_1A_{1i}$$
$$+(A_i+B_i\overline{K_j})^TX_2^T,$$
$$\overline{\Theta_{13}}=\overline{M_{231}^T}+\overline{N_{211}}+(A_i+B_i\overline{K_j})^TX_3^T,$$
$$\overline{\Theta_{14}}=\overline{M_{241}^T}-\overline{S_{211}}+(A_i+B_i\overline{K_j})^TX_4^T,$$
$$\overline{\Theta_{15}}=X+\overline{M_{251}^T}-X_1+(A_i+B_i\overline{K_j})^TX_5^T,$$

$$\overline{\Theta_{22}}=-X_2-\overline{M_{221}^T}-\overline{M_{221}}-\overline{N_{221}}-\overline{N_{221}^T}+\overline{S_{221}}+\overline{S_{221}^T}$$
$$+X_2A_{0i}+X_2A_{1i}+X_2A_{0i}^T+X_2A_{1i}^T,$$
$$\overline{\Theta_{23}}=-\overline{M_{231}^T}-\overline{N_{231}^T}+\overline{N_{221}}+\overline{S_{231}^T}+A_{0i}^TX_3^T+A_{1i}^TX_3^T,$$
$$\overline{\Theta_{24}}=-\overline{M_{241}^T}-\overline{N_{241}^T}+\overline{S_{241}^T}-\overline{S_{221}}+A_{0i}^TX_4^T+A_{1i}^TX_4^T,$$
$$\overline{\Theta_{25}}=-\overline{M_{251}^T}-\overline{N_{251}^T}+\overline{S_{251}^T}-X_2+A_{0i}^TX_5^T+A_{1i}^TX_5^T,$$
$$\overline{\Theta_{33}}=-X_1+X_2+\overline{N_{231}^T}+\overline{N_{231}},$$
$$\overline{\Theta_{34}}=\overline{N_{241}^T}-\overline{S_{231}}$$
$$\overline{\Theta_{35}}=\overline{N_{251}}-X_3,$$
$$\overline{\Theta_{44}}=-X_3-\overline{S_{241}^T}-\overline{S_{241}},$$
$$\overline{\Theta_{45}}=-\overline{S_{251}^T}-X_4,$$
$$\overline{\Theta_{55}}=\tau_2\overline{Z_1}+\tau_2\overline{Z_2}+(\tau_2-\tau_1)\overline{Z_3}-X_5-X_5^T$$
$$+d_2\overline{Z_1}+d_2\overline{Z_2}+(d_2-d_1)\overline{Z_3}$$

다음의 제어기 이득값을 이용하여 제어가능하다.

$$K_i=\overline{K_i}X^{-T}$$

증명) 식 (9)-(11)의 양변에 $diag[X,X,X,I]$와 그것의 전치를 곱하고, 새로운 변수들 $X=T^{-1}$, $\overline{P}=XPX^T$, $\overline{E_b}=XQ_iX$, $K_j=K_jX^{-T}$, $\overline{X_1}=XX_1X$, $\overline{Y_2}=XY_2X$, $\overline{Z_3}=XZ_3X$을 정의하여, Schur complement를 이용하면, 정리 2는 쉽게 증명된다.

4. 시뮬레이션 및 결과 고찰

시간 지연을 가지는 퍼지 시스템을 고려한다. 고려된 비선형 시스템을 다음과 같은 T-S 퍼지 룰을 이용하여 모델링한다.

$$\begin{aligned}&Rule\ 1: IF\quad x_2(k)/0.5\quad is\quad about\ \ 0\\ &\qquad THEN\quad x(k+1)=A_1x(k)+B_1u(k)+A_{11}x(k-\tau(k))\\ &\qquad\qquad +A_{01}x(k-d(k))\\ &Rule\ 2: IF\quad x_2(k)/0.5\quad is\quad about\ \ \pm\pi\\ &\qquad THEN\quad x(k+1)=A_1x(k)+B_1u(k)+A_{02}x(k-d(k)\\ &\qquad\qquad +A_{12}x(k-\tau(k)\end{aligned}$$

이때 각각의 행렬은 다음과 같다.

$$A_1=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0.1 & -2\end{bmatrix},\quad A_2=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0.1 & -0.5\end{bmatrix}$$
$$B_1=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix},\quad B_2=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$
$$A_{11}=A_{12}=\begin{bmatrix}0.1 & 0\\ 0.1 & -0.6\end{bmatrix},\quad A_{01}=A_{02}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0.1 & -0.6\end{bmatrix}$$

여기서, IF-THEN 규칙의 전건부에 등장하는 퍼지 소속함수들은 각각 0과 π를 중심으로 하는 함수이며, 다음과 같다.

$$h_1(\theta)=(1-\frac{1}{1+\exp(-7(x_1-0.25\pi)})(\frac{1}{1+\exp(-7(x_1(t)+0.25\pi))}),$$
$$h_2(\theta)=1-h_1(\theta).$$

여기서 $d_1=0,\tau_1=0.2,d_2=\tau_2=0.8$이므로, 정리 2에 의해서 우리가 원하는 제어기 이득값을 구할 수 있다. 구하여진 제어기 이득값을 아래와 같이 구할 수 있다.

$$K_1=[-1.242\ -0.4834],$$
$$K_2=[-1.8515\ -2.1358]$$

초기 조건을 $x_1(0)=x_2(0)=0$으로 가정하고, 정리 2에서 구한 퍼지 제어기의 이득값을 이용하여 퍼지 폐루프 시스템의 상태 변수의 그래프를 그리보면 그림 1-2와 같다. 그림에서 보여지듯이 본 논문에서 설계한 퍼지 제어기를 이용하면 시스템의 각각의 상태 변수들이 $k\rightarrow\infty$일 때 0으로 수렴함을 확인할 수 있다.

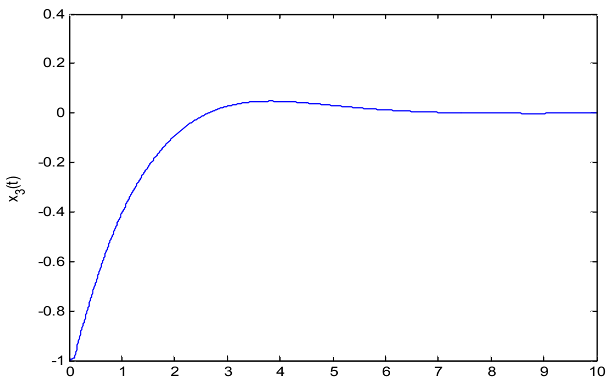

그림 1. 상태 변수 $x_1(k)$의 시스템 응답

Fig. 1. Closed loop system response of state $x_1(k)$

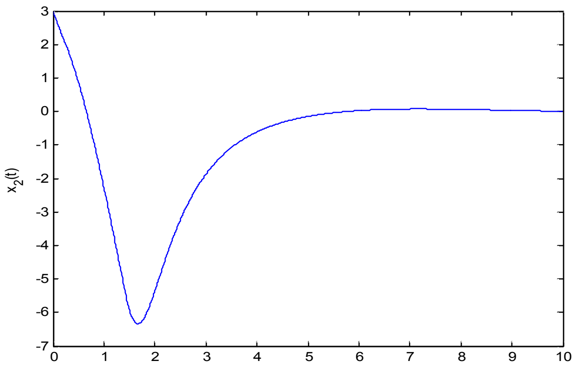

그림 2. 상태 변수 $x_2(k)$의 시스템 응답

Fig. 2. Closed loop system response of state $x_2(k)$

5. 결 론

본 논문은 시간 지연을 가지는 퍼지 시스템의 제어기 설계에 관한 새로운 방법에 대해서 논의하였다. 시변 시간 지연을 포함하는 폐루프 시스템을 고려하고, 이를 TS 퍼지 시스템으로 모델링하였다. 전체 폐루프 시스템의 지수적인 안정도를 판별하고, 안정화 시키는 퍼지 제어기 설계를 위한 충분조건을 유도하였다. 제안된 충분조건은 시간지연 간격에 종속적이며, 선형 행렬 부등식의 형태로 유도하였고 해를 유도하였다. 제안된 예제를 이용하여 이론의 타당성을 입증하였다.

참 고 문 헌

[1] Lee H. J., Park J. B., and Joo Y. H., “Robust control for uncertain Takagi-Sugeno fuzzy systems with time-varying input delay,” *ASME J Dyn Syst Meas Control*, vol. 127, pp. 302-306, 2005.

[2] Z. Shu, J. Lam, and S. Xu., “Robust stabilization of markovian delay systems with delay- dependent exponential estimates,” *Automatica*, vol. 42, pp. 2001-2008, 2006.

[3] X. Jiang and Q. L. Han, "On designing fuzzy controllers for a class of nonlienar networked control systems," *IEEE Trans. Fuzzy. Syst*, Vol 16, No. 4, pp. 1050-1060, 2008

[4] X. Jia, D. Jhang, L. Zheng and N. Zheng., “Modeling and stabilization for a class of nonlinear networked control systems: A T-S fuzzy approach," *Progress in natural science*, vol. 18, pp. 1031-1037, 2008.

[5] L. Li, X. Liu, T. Chai., "New approaches on control of T-S fuzzy systems with interval time-varying delay," *Fuzzy Set & syst*, vol. 74, pp. 1447-1455, 2008.

[6] T. Li, and Y. Zhang , "Delay-range-dependent robust stability and stabilization for uncetain systems with time-varying delay," *Int. J of Robust and nonlinear control*, vol. 42, pp. 1372-1387, 2007.

저 자 소 개

송민국 (Min Kook Song)

2006년 : 연세대학교 전기전자공학과 졸업 (공학사)
2007년 : 동 대학원 전기전자공학과 졸업 (공학석사)
2007～현재 : 동 대학원 전기전자공학과 박사과정

관심분야 : 지능제어, 시간지연
Phone : 02-2123-2773
Fax : 02-362-4539
E-mail : s5ngm2n9k@yonsei.ac.kr

박진배(Jin Bae Park)

2009년 제 18권 제 6호 참조

김진규(Jin Kyu Kim)

2006년 : 군산대학교 전자정보공학부 졸업 (공학사)
2007년 : 동 대학원 전자정보공학부 졸업 (공학석사)
2007～현재 : 동 대학원 전자정보공학부 박사과정

관심분야 : 지능 제어, 로봇 비전
Phone : 063-469-4706
E-mail : kjk3242@nate.com

주영훈(Young Hoon Joo)

2009년 제 18권 제 6호 참조