

# 네트워크 제어 시스템의 강인 퍼지 관측기 기반 출력궤환 제어기

## Robust Fuzzy Observer-Based Output-Feedback Controller for Networked Control Systems

지성철\* · 이호재\* · 주영훈\*\*

Sung Chul Jee\*, Ho Jae Lee\* and Young Hoon Joo\*\*

\* 인하대학교 전자공학부

\*\* 군산대학교 전자정보공학부

### 요 약

본 논문은 네트워크 상에서 구현되는 불확실 Takagi-Sugeno (T-S) 퍼지 시스템의 관측기 기반 강인 안정화를 논의한다. 네트워크 기반 시스템에서 입력 지연은 필연적으로 발생하며 마코프 (Markov) 확률 과정으로 표현함을 가정한다. 강인 퍼지 관측기 기반 샘플치 제어기를 설계하기 위하여 입출력 단에 영차의 샘플/홀드를 가정하여 T-S 퍼지 시스템을 이산화하고 확률적 과정에 따라 변화하는 도약 시스템으로 표현한다. 확률적 강인 안정 가능성 조건은 선형 행렬 부등식으로 표현된다.

**키워드:** 네트워크 제어 시스템, 입력 지연, 불확실성, 퍼지 제어, 관측기.

### Abstract

This paper discusses a robust observer-based output-feedback stabilization of an uncertain Takagi-Sugeno (T-S) fuzzy system in a network. In the networked control system, the input delay occurs inevitably and it is expressed by the Markovian stochastic process. To design robust sampled-data observer-based output-feedback controller, we discretize the T-S fuzzy system and represent as a jump system. Stochastic robust stabilization condition is formulated in terms of linear matrix inequalities.

**Key Words:** Networked control system, input delay, uncertainty, fuzzy control, observer.

## 1. 서 론

유비쿼터스 센서 네트워크(ubiquitous sensor network: USN)가 실생활에 활용될 수 있는 주요한 원인은 원거리의 정보에 대한 접근성이 뛰어난 인터넷의 발달이다. USN이 대중화됨에 따라 네트워크 기반 원격제어기술의 활용도가 늘어나며 그 중요성이 증대되고 있다. USN기반 제어시스템은 원거리의 장치로부터 얻어진 데이터를 이용하여 제어 입력을 설계한 후 다시 원거리의 시스템을 제어하는 원격 페루프 시스템을 형성한다. 특히, 데이터 전송과 복잡한 제어신호 계산에 의해서 발생하는 시간 지연 현상은 무시할 수 없으며 이는 시스템 성능을 저하시킬 뿐 아니라 제어 시스템을 불안정하게 하는 주요 요소이다. 지난 수년간, 언급된 문제들을 해결하기 위해 연구가 널리 진행되었다 [1,2]. 많은 제어이론이 선형 시스템에 기반하여 개발되었음은

주지의 사실이지만 실세계 존재하는 대부분의 시스템은 비선형 시스템이다. Takagi-Sugeno (T-S) 퍼지모델기반 제어기는 그 구조가 매우 간단함에도 불구하고 비선형 시스템의 제어에 매우 효과적인 방법으로 알려져있다. T-S 퍼지 모델은 퍼지 규칙의 후반부가 시스템의 국부적인 선형 입/출력 관계로 표현되는 IF-THEN 규칙들의 비선형 결합에 의하여 시스템의 전역적 동특성을 표현하는 방법이다 [3,4].

본 논문은 시스템의 모든 상태변수가 측정 가능하지는 않은 네트워크 불확실 T-S 퍼지 시스템의 관측기 기반 강인 샘플치 안정화 기법을 제시한다. 원격제어 시스템을 구성함으로써 발생한 USN내의 시간지연은 그 해석적인 인과 관계를 파악하는 것이 매우 난해하다. 따라서 네트워크 상의 시간 지연은 마코프 (Markov) 확률 과정을 따름을 가정한다 [5,6]. 샘플치 제어기를 설계하기 위하여 T-S 퍼지 시스템을 이산화한다. 이산화된 T-S 퍼지 시스템은 확률적 과정에 의한 마코비안 도약 시스템으로 표현된다. 시스템 불확실성과 모델링 오차로부터 강인한 관측기 기반 제어기는 관측기-제어기 분리원칙에 의하여 효과적으로 설계되며 설계조건은 선형 행렬 부등식의 형태로 표현된다.

다음절에서 입력 지연을 가지는 불확실 T-S 퍼지 시스템을 논의한다. 3절에서는 논의된 시스템의 원격 관측기 기반 강인 샘플치 안정화 조건을 제시한다. 4절에서는 수치적

접수일자 : 2009년 4월 14일

완료일자 : 2009년 7월 16일

이 논문은 2008년 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국과학재단의 지원을 받아 수행된 연구임 (과제번호: R01-2008-000-20844-0)

인 예제를 통해 제안된 기법의 효용성을 검증한다. 마지막으로 5절에서 본 논문을 맺는다.

본 논문은 표준적인 표기법을 따른다. 부등식  $A \prec (\preceq) B$ 은 다음의 행렬이  $A - B = A^T - B^T$  (반)음반정임을 뜻한다. 또한 대칭 행렬 표기에 대하여 다음과 같은 생략법을 사용한다.

$$K \begin{bmatrix} \text{He}\{S\} & \star \\ M & Q\star \end{bmatrix} \star := K \begin{bmatrix} S+S^T & M^T \\ M & QQ^T \end{bmatrix} K^T.$$

## 2. T-S 형태의 USN 기반 원격제어시스템

USN기반 원격제어시스템을 표현하는 다음과 같은  $i$ 번째 규칙으로 표현되는 퍼지시스템을 고려하자.

$$R^i: \text{IF } z_1 \text{ is } \Gamma_1^i \text{ and } \dots \text{ } z_p \text{ and is } \Gamma_p^i \\ \text{THEN } \begin{cases} \dot{x} = (A_i + \Delta A_i)x + (B_i + \Delta B_i)u(t - \tau_k) \\ y = C_i x. \end{cases} \quad (1)$$

여기서  $\Gamma_j^i$ ,  $i \in \mathcal{S}_R := \{1, 2, \dots, r\}$ ,  $j \in \mathcal{S}_P := \{1, 2, \dots, p\}$ 는  $i$ 번째 규칙에서  $j$ 번째 전만부 변수의 퍼지집합이다.  $x \in \mathbb{R}^n$ 은 상태,  $y \in \mathbb{R}^p$ 는 출력,  $u(t - \tau_k) \in \mathbb{R}^m$ 은 시간 구간  $[kT, kT + T)$ 에서 일정한 크기를 갖는 샘플치 제어입력  $u = u(kT)$ 이  $\tau_k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 만큼 지연된 값이다. 시스템 (1)의 전역 동특성은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sum_{i=1}^r \theta_i ((A_i + \Delta A_i)x + (B_i + \Delta B_i)u(t - \tau_k)) \\ y &= \sum_{i=1}^r \theta_i C_i x. \end{aligned} \quad (2)$$

여기서

$$\theta_i = \frac{\prod_{j=1}^p \Gamma_j^i(z_j)}{\sum_{i=1}^r \left( \prod_{j=1}^p \Gamma_j^i(z_j) \right)}$$

이며  $\Gamma_j^i(z_j)$ 는  $j$ 번째 전만부 변수  $z_j$ 의 퍼지집합  $\Gamma_j^i$ 에 대한 소속도를 나타낸다.

**가정 1 ([7]):** 불확실성은 다음과 같은 구조화된 형태로 가정된다.

$$[\Delta A_i \quad \Delta B_i] = D_i \Delta_i [E_{a_i} \quad E_{b_i}].$$

여기서  $\Delta_i$ 는  $\Delta_i^T \Delta_i \preceq I$ 을 만족하는 알려지지 않은 행렬함수이며,  $D_i$ ,  $E_{a_i}$ ,  $E_{b_i}$ 는 적절한 차원의 알려진 상수행렬이다.

**가정 2:** 논의의 단순함을 위하여 제어입력의 시간지연은  $\tau_k \in \mathbb{R}_{(0,T)}$ ,  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 임을 가정한다.

벡터들  $x(kT)$ ,  $y(kT)$ ,  $u(kT)$ 를 축약하여 각각  $x_k$ ,  $y_k$ ,  $u_k$ 로 표기한다.

USN기반 제어시스템은 샘플치 제어기로 구현된다. 샘플치 제어기는 이산시간 영역에서 설계하는 것이 편리하다. T-S 퍼지 시스템의 이산화를 위해서는 다음의 가정이 필요하다.

**가정 3:**  $i$ 번째 규칙의 발화도  $\theta_i$ 는 제어입력신호의 시간구간  $[kT, kT + T)$ 에서  $t = kT$ 에서의 값으로 근사화될 수 있다고 가정하자.

**참고 1:** 충분히 작은 적절한 샘플링 시간  $T$ 가 선택된다면 가정 3은 충분히 만족된다.

결과적으로 (2)는 다음과 같이 이산화 가능하다.

$$x_{k+1} = \sum_{i=1}^r \theta_i ((G_i + \Delta G_i)x_k + (H_{i_1} + \Delta H_{i_1})u_k + (H_{i_2} + \Delta H_{i_2})u_{k-1}). \quad (3)$$

여기서

$$\begin{aligned} G_i &= e^{A_i T}, \quad \Delta G_i = \Delta A_i T \\ H_{i_1} &= \int_{kT+\tau_k}^{kT+T} e^{A_i(kT+T-\lambda)} d\lambda B_i, \quad \Delta H_{i_1} = (T - \tau_k) \Delta B_i \\ H_{i_2} &= \int_{kT}^{kT+\tau_k} e^{A_i(kT+T-\lambda)} d\lambda B_i, \quad \Delta H_{i_2} = \tau_k \Delta B_i \end{aligned}$$

이다.

USN상에서 시간지연  $\tau_k$ 는 확정된 값이 아니며 네트워크의 정보전송 상황과, 불확실한 요소에 의하여 변하는 값이다. 본 논문에서는  $\tau_k$ 는 유한한  $q$ 개의 값  $\{d_i : d_i \in \mathbb{R}_{(0,T)}, i \in \mathcal{S}_Q\}$ ,  $\mathcal{S}_Q := \{1, 2, \dots, q\}$ , 내에서 천이하며 그 천이과정은 다음의 마코프 확률과정을 따른다고 가정한다:

$$\Pr(\tau_{k+1} = d_h | \tau_k = d_g) = \pi_{gh}.$$

여기서  $\pi_{gh} \in \mathbb{R}_{[0,1]}$ 이다.

상태  $x$ 가 측정가능하지 않으나  $z$ 는 측정가능함을 가정하자. 따라서  $x$ 를 관측하기 위하여 다음 형태의 이산시간 관측기를 도입한다.

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1} &= \sum_{i=1}^r \theta_i ((G_i + \Delta G_i)\hat{x}_k + (H_{i_1} + \Delta H_{i_1})u_k + (H_{i_2} + \Delta H_{i_2})u_{k-1} + F_{ig}(y_k - \hat{y}_k)). \end{aligned} \quad (4)$$

여기서  $\hat{x}_k \in \mathbb{R}^n$ 은  $x_k$ 의 관측값,  $H_{ig1,2} = H_{i,2}(\tau_k = d_g)$ ,  $F_{ig}$ 은 입력지연  $\tau_k = d_g$ 를 고려한 관측기 이득 행렬이다.

본 논문에서는 다음과 같은 형태의 제어기를 도입한다.

$$u_k = \sum_{i=1}^r \theta_i (K_{ig} \hat{x}_k + L_{ig} u_{k-1}). \quad (5)$$

여기서  $K_{ig}$ ,  $L_{ig}$ 은 입력지연  $\tau_k = d_g$ 를 고려한 제어기 이득 행렬이다.

관측오차를  $e_k := x_k - \hat{x}_k$ 라고 정의하고 확장된 상태변수  $\chi_k := [x_k^T, u_{k-1}^T | e_k^T]^T$ 를 도입하면 다음의 페루프 시스템을 구성할 수 있다.

$$\begin{aligned} \chi_{k+1} &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \theta_i \theta_j \mathcal{G}_{ijg} \chi_k \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \theta_i \theta_j \left[ \begin{array}{c|c} \mathcal{G}_{ijg}^{11} & \mathcal{G}_{ijg}^{12} \\ \hline 0 & \mathcal{G}_{ijg}^{22} \end{array} \right] \chi_k. \end{aligned} \quad (6)$$

여기서  $\bar{\mathcal{G}}_{ijg}$ 는 제어입력  $u_k$ 의 시간 지연  $\tau_k = d_g$ 를 고려한 시스템 행렬이며

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{G}}_{ijg} &= \mathcal{G}_{ijg} + \Delta\mathcal{G}_{ijg} \\ \mathcal{G}_{ijg} &= \left[ \begin{array}{cc|c} G_i + H_{ig1}K_{jg} & H_{ig1}L_{jg} + H_{ig2} & -H_{ig1}K_{jg} \\ K_{jg} & L_{jg} & -K_{jg} \\ \hline 0 & 0 & G_i - F_{ig}C_j \end{array} \right] \\ \Delta\mathcal{G}_{ijg} &= \left[ \begin{array}{cc|c} \Delta G_i + \Delta H_{ig1}K_{jg} & \Delta H_{ig1}L_{jg} + \Delta H_{ig2} & -\Delta H_{ig1}K_{jg} \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \Delta G_i \end{array} \right] \end{aligned}$$

이다.

참고 2:  $\Delta\mathcal{G}_{ijg}$ 은 가정 1을 만족한다.

### 3. 주요 결과

본 논문의 주요 결과를 논의하기전에 다음의 보조정리와 정의를 도입하자.

보조정리 1: 적절한 차원의 행렬  $S = S^T$ ,  $D$ ,  $E$ 에 대하여

$$\begin{aligned} S + \text{He}\{D\Delta E\} &< 0 \\ \Leftrightarrow S + [E^T \quad D] \begin{bmatrix} \varepsilon^{-2}I & \star \\ 0 & \varepsilon^2I \end{bmatrix} \star &< 0 \end{aligned}$$

이다. 여기서  $\Delta^T \Delta \preceq I$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ 이다.

정의 1: 임의의 초기 지연시간  $\tau_0$ 가 주어질 때, 다음의 조건을 만족하는 적절한 상한값  $\mathcal{M}(\tau_0) \in \mathbb{R}_{>0}$ 이 존재한다면 (6)은 확률적으로 안정하다.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E \left\{ \sum_{k=0}^N x_k^T(\tau_0)x_k(\tau_0) \mid \tau_0 \right\} < \mathcal{M}(\tau_0). \quad (7)$$

참고 3([7]): 정의 1은 평균제곱의 측정을 사용했을 때, 원점으로 접근적 수렴을 의미한다. 즉 식 (7)의 확률적 안정성은 다음을 의미한다.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E \{ x_k^T(\tau_0)x_k(\tau_0) \mid \tau_0 \} = 0.$$

정리 1: 다음의 조건을 만족하는 행렬  $P_g = P_g^T \succ 0$ ,  $g \in \mathcal{J}_Q$ 이 존재한다면 (6)은 확률적으로 안정하다.

$$\begin{bmatrix} -P_g & \star \\ \bar{\mathcal{G}}_{ijg} & -\mathcal{P}_g^{-1} \end{bmatrix} < 0. \quad (8)$$

여기서  $\mathcal{P}_g = \sum_{h=1}^q \pi_{gh}P_h$ 이다.

증명: 참고문헌 [1]의 결과로부터 쉽게 유도 가능하다.  $\square$

정리 2: 시스템 (2)가 전역적으로 관측가능하고 전역적으로 제어가능하다면, (3)에서  $x_k$ 를 확률적으로 안정화하는 (5)형태의 상태케환 제어기와  $e_k$ 를 확률적으로 안정화하는 관측기 (4)의 중속연결로 구성된 관측기 기반 출력케환 샘플치 제어기는 이산 시스템 (3)을 확률적으로 안정화시킨다.

증명: 행렬  $P_g$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$P_g = \begin{bmatrix} W_g & \star \\ 0 & \alpha X_g \end{bmatrix}.$$

여기서,  $W_g = W_g^T \succ 0$ ,  $X_g = X_g^T \succ 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ 이다. 따라서

$$\begin{aligned} &-P_g + \bar{\mathcal{G}}_{ijg}^T \mathcal{P}_g \star \\ &= - \begin{bmatrix} W_g & \star \\ 0 & \alpha X_g \end{bmatrix} \\ &\quad + \sum_{h=1}^q \pi_{gh} \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{G}}_{ijg}^{11} & \bar{\mathcal{G}}_{ijg}^{12} \\ 0 & \bar{\mathcal{G}}_{ijg}^{22} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} W_h & \star \\ 0 & \alpha X_h \end{bmatrix} \star \\ &= \begin{bmatrix} -W_g + (\bar{\mathcal{G}}_{ijg}^{11})^T \left( \sum_{h=1}^q \pi_{gh} W_h \right) \bar{\mathcal{G}}_{ijg}^{11} & \star \\ (\bar{\mathcal{G}}_{ijg}^{12})^T \left( \sum_{h=1}^q \pi_{gh} W_h \right)^T & \bar{\mathcal{G}}_{ijg}^{11} \\ \star & \\ \alpha \left( -X_g + (\bar{\mathcal{G}}_{ijg}^{22})^T \left( \sum_{h=1}^q \pi_{gh} X_h \right) \star \right) & \star \\ \star & \\ (\bar{\mathcal{G}}_{ijg}^{12})^T \left( \sum_{h=1}^q \pi_{gh} W_h \right) \star & \star \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

가정에 의하여 (3)에서  $x_k$ 를 확률적으로 안정화하는 (5)형태의 상태케환 제어기와  $e_k$ 를 확률적으로 안정화하는 관측기 (4)가 설계가능하다면 다음 두개의 부등식

$$Q := -W_g + (\bar{\mathcal{G}}_{ijg}^{11})^T \left( \sum_{h=1}^q \pi_{gh} W_h \right) \star < 0 \quad (9)$$

$$R := -X_g + (\bar{\mathcal{G}}_{ijg}^{22})^T \left( \sum_{h=1}^q \pi_{gh} X_h \right) \star < 0 \quad (10)$$

이 성립한다. 이제 충분히 큰  $\alpha$ 를 선택한다면 다음 두개의 부등식은

$$\begin{aligned} \bar{R} &:= \alpha R + (\bar{\mathcal{G}}_{ijg}^{12})^T \left( \sum_{h=1}^q \pi_{gh} W_h \right) \star < 0 \\ \star Q &+ (\bar{\mathcal{G}}_{ijg}^{12})^T \left( \sum_{h=1}^q \pi_{gh} W_h \right)^T \bar{\mathcal{G}}_{ijg}^{11} \bar{R}^{-1} \star < 0 \end{aligned}$$

항상 성립하며 따라서 식 (8)이 만족된다.  $\square$

정리 3: 다음의 선형행렬부등식 (11), (12)을 만족하는 행렬들  $W_{g1} = W_{g1}^T \succ 0$ ,  $W_{g2} = W_{g2}^T \succ 0$ ,  $X_g = X_g^T \succ 0$ ,  $M_{jg}$ ,  $N_{jg}$ ,  $O_{ig}$ 이 존재한다면 (6)은 확률적으로 안정하다. 여기서  $i, j \in \mathcal{J}_R$ ,  $g \in \mathcal{J}_Q$ 이다.

$$\begin{bmatrix} z_{11} & * & * & * & \cdots & * & * & * & * \\ 0 & z_{22} & * & * & \cdots & * & * & * & * \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} & * & \cdots & * & * & * & * \\ z_{41} & z_{42} & 0 & z_{44} & \ddots & * & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_{61} & z_{62} & 0 & 0 & \ddots & z_{66} & * & * & * \\ z_{71} & z_{72} & 0 & 0 & \cdots & 0 & z_{77} & * & * \\ z_{81} & z_{82} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & z_{88} & * \\ 0 & 0 & z_{93} & 0 & \cdots & z_{96} & 0 & 0 & z_{99} \end{bmatrix} \prec 0 \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} y_{11} & * & * & \cdots & * & * & * \\ y_{21} & y_{22} & * & \cdots & * & * & * \\ y_{31} & 0 & y_{33} & \ddots & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{51} & 0 & 0 & \ddots & y_{55} & * & * \\ y_{61} & 0 & 0 & \cdots & 0 & y_{66} & * \\ 0 & y_{72} & y_{73} & \cdots & y_{75} & 0 & y_{77} \end{bmatrix} \prec 0. \quad (12)$$

여기서

$$\begin{aligned} z_{11} &= -W_{g1}^{-1}, & z_{22} &= -W_{g2}^{-1} \\ z_{31} &= G_i W_{g1}^{-1} + H_{ig1} M_{jg} \\ z_{32} &= H_{ig1} N_{jg} + H_{ig2} W_{g2}^{-1}, & z_{33} &= -\pi_{g1}^{-1} W_{11}^{-1} \\ z_{41} &= M_{jg}, & z_{42} &= N_{jg}, & z_{44} &= -\pi_{g1}^{-1} W_{12}^{-1} \\ z_{61} &= G_i W_{g1}^{-1} + H_{ig1} M_{jg} \\ z_{62} &= H_{ig1} N_{jg} + H_{ig2} W_{g2}^{-1} \\ z_{66} &= -\pi_{gq}^{-1} W_{q1}^{-1} \\ z_{71} &= M_{jg}, & z_{72} &= N_{jg}, & z_{77} &= -\pi_{gq}^{-1} W_{q2}^{-1} \\ z_{81} &= T E_{a_i} W_{g1}^{-1} + (T - d_g) E_{b_i} M_{jg} \\ z_{82} &= (T - d_g) E_{b_i} N_{jg} + d_g E_{b_i} W_{g2}^{-1} \\ z_{88} &= -\varepsilon^2 I \\ z_{93} &= D_i^T, & z_{96} &= D_i^T, & z_{99} &= -\varepsilon^{-2} I \\ y_{11} &= -X_g \\ y_{21} &= X_1 G_i - O_i^1 C_j, & y_{22} &= -\pi_{g1}^{-1} X_1 \\ y_{31} &= X_2 G_i - O_i^2 C_j, & y_{33} &= -\pi_{g2}^{-1} X_2 \\ y_{51} &= X_q G_i - O_i^q C_j, & y_{55} &= -\pi_{gq}^{-1} X_q \\ y_{61} &= T E_{a_i}, & y_{66} &= -\varepsilon^2 I \\ y_{72} &= D_i^T, & y_{73} &= D_i^T \\ y_{75} &= D_i^T, & y_{77} &= -\varepsilon^{-2} I. \end{aligned}$$

**증명:** 우선 (9)  $\Leftrightarrow$  (11)을 증명하자.

$$\begin{aligned} (9) &\Leftrightarrow -W_g + \begin{bmatrix} (\mathcal{G}_{ijg}^{11})^T & \cdots & (\mathcal{G}_{ijg}^{11})^T \end{bmatrix} \\ &\quad \times \text{diag}\{\pi_{g1} W_1, \dots, \pi_{gq} W_q\}^* \prec 0. \end{aligned}$$

위의 행렬부등식에 Schur complement를 적용하면

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} -W_g & * & * & \cdots & * \\ \mathcal{G}_{ijg}^{11} & -\pi_{g1}^{-1} W_1^{-1} & * & \cdots & * \\ \mathcal{G}_{ijg}^{11} & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & * \\ \mathcal{G}_{ijg}^{11} & 0 & \cdots & 0 & -\pi_{gq}^{-1} W_q^{-1} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & * & * & \cdots & * \\ \Delta \mathcal{G}_{ijg}^{11} & 0 & * & \cdots & * \\ \Delta \mathcal{G}_{ijg}^{11} & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & * \\ \Delta \mathcal{G}_{ijg}^{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \prec 0 \end{aligned}$$

이다. 여기서

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{ijg}^{11} &= \begin{bmatrix} G_i + H_{ig1} K_{jg} & H_{ig1} L_{jg} + H_{ig2} \\ K_{jg} & L_{jg} \end{bmatrix} \\ \Delta \mathcal{G}_{ijg}^{11} &= \begin{bmatrix} \Delta G_i + \Delta H_{ig1} K_{jg} & \Delta H_{ig1} L_{jg} + \Delta H_{ig2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

이다. 가정 1을 도입하면

$$\Psi_{ijg} + \text{He} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{D}_i \end{bmatrix} \Delta_i \begin{bmatrix} \mathcal{E}_{ijg} & 0 \end{bmatrix} \right\} \prec 0$$

이다. 여기서

$$\begin{aligned} \Psi_{ijg} &= \begin{bmatrix} -W_g & * & * & \cdots & * \\ \mathcal{G}_{ijg}^{11} & -\pi_{g1}^{-1} W_1^{-1} & * & \cdots & * \\ \mathcal{G}_{ijg}^{11} & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & * \\ \mathcal{G}_{ijg}^{11} & 0 & \cdots & 0 & -\pi_{gq}^{-1} W_q^{-1} \end{bmatrix} \\ \mathcal{D}_i &= \begin{bmatrix} D_i \\ 0 \\ \vdots \\ D_i \end{bmatrix}, \quad \mathcal{E}_{ijg} = \begin{bmatrix} (T E_{a_i} + (T - d_g) E_{b_i} K_{jg})^T \\ ((T - d_g) E_{b_i} L_{jg} + d_g E_{b_i})^T \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

이다. 위의 부등식은 보조정리 (1)을 이용하면 다음 부등식과 등가관계임을 알 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \Psi_{ijg} & * \\ \begin{bmatrix} \mathcal{E}_{ijg} & 0 \\ 0 & \mathcal{D}_i^T \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -\varepsilon^2 I & * \\ 0 & -\varepsilon^{-2} I \end{bmatrix} \end{bmatrix} \prec 0. \quad (13)$$

부등식 (3)에서  $W_g := \text{diag}\{W_{g1}, W_{g2}\}$ 로 가정한 후  $\text{diag}\{W_{g1}^{-1}, W_{g2}^{-1}, I\}$ 에 의한 컨그루언스(congruence) 변환을 수행하고  $K_{ig} W_{g1}^{-1} = M_{ig}$ ,  $L_{ig} W_{g2}^{-1} = N_{ig}$ 의 변수 치환을 수행하면 식 (11)을 유도할 수 있다. 선형행렬부등식 (12)도 유사하게 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 (10) &\Leftrightarrow -X_g + \left[ (\mathcal{G}_{ijg}^{22})^T \quad \dots \quad (\mathcal{G}_{ijg}^{22})^T \right] \\
 &\quad \times \text{diag} \{ \pi_{g1} X_1, \dots, \pi_{gq} X_q \} \star < 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -X_g & \star & \star & \dots & \star \\ \mathcal{G}_{ijg}^{22} & -\pi_{g1}^{-1} X_1^{-1} & \star & \dots & \star \\ \mathcal{G}_{ijg}^{22} & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ \mathcal{G}_{ijg}^{22} & 0 & \dots & 0 & -\pi_{gq}^{-1} X_q^{-1} \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} 0 & \star & \star & \dots & \star \\ \Delta \mathcal{G}_{ijg}^{22} & 0 & \star & \dots & \star \\ \Delta \mathcal{G}_{ijg}^{22} & 0 & \ddots & \ddots & \star \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \Delta \mathcal{G}_{ijg}^{22} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \prec 0 \\
 &\Leftrightarrow \Phi_{ijg} + \text{He} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ D_i \\ \vdots \\ D_i \end{bmatrix} \Delta_i \begin{bmatrix} TE_{a_i} & 0 \end{bmatrix} \right\} \prec 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \Phi_{ijg} & \star \\ \begin{bmatrix} TE_{a_i} & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} D_i \\ \vdots \\ D_i \end{bmatrix}^T \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -\varepsilon^2 I & \star \\ 0 & -\varepsilon^{-2} I \end{bmatrix} \end{bmatrix} \prec 0 \\
 &\Leftrightarrow (12)
 \end{aligned}$$

여기서 가정 (1)과 보조정리 1을 이용하였으며, 행렬  $\text{diag} \{ I, X_1, X_2, \dots, X_q, I \}$ 에 의한 컨그루언스 변환과  $X_g F_{ig} = O_{ig}$ 의 변수치환을 사용하였으며

$$\Phi_{ijg} = \begin{bmatrix} -X_g & \star & \star & \dots & \star \\ \mathcal{G}_{ijg}^{22} & -\pi_{g1}^{-1} X_1^{-1} & \star & \dots & \star \\ \mathcal{G}_{ijg}^{22} & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ \mathcal{G}_{ijg}^{22} & 0 & \dots & 0 & -\pi_{gq}^{-1} X_q^{-1} \end{bmatrix}$$

$\mathcal{G}_{ijg}^{22} = G_i - F_{ig} C_j$ ,  $\Delta \mathcal{G}_{ijg}^{22} = \Delta G_i$ ,  $\mathcal{G}_{ijg}^{22} = \mathcal{G}_{ijg}^{22} + \Delta \mathcal{G}_{ijg}^{22}$ 이다. □

#### 4. 모의실험

다음과 같은 도립진자시스템을 고려하자 [8].

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{M l_c g}{M l_c^2 + I} \sin(x_1) + \frac{1.0}{M l_c^2 + I} \tau. \end{cases} \quad (14)$$

여기서  $x_1$  rad 연직방향과 막대가 이루는 각;  $x_2$  rad/s 각 속도;  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$  중력가속도;  $M = 20.0 \text{ kg}$  막대의 질량;  $l_c = 0.5 \text{ m}$  막대의 아래에서 부터 질량중심까지의 길이;  $I = 0.8 \text{ kgm}^2$  막대의 질량 중심 주변에서의 관성 모멘트;  $\tau \text{ Nm}$  막대에 가해지는 토크이다. 불확실성과 입력에 대한 시간지연을 포함한다고 가정할 때 (14)는 다음과 같이 표현 된다.

$R^1$  : IF  $x_1$  is about 0

$$\text{THEN} \begin{cases} \dot{x} = (A_1 + \Delta A_1)x + (B_1 + \Delta B_1)u(t - \tau_k) \\ y = C_1 x \end{cases}$$

$R^2$  : IF  $x_1$  is about  $\pm \frac{\pi}{2}$

$$\text{THEN} \begin{cases} \dot{x} = (A_2 + \Delta A_2)x + (B_2 + \Delta B_2)u(t - \tau_k) \\ y = C_2 x. \end{cases}$$

여기서

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -16.9 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10.8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = B_2 = [0 \quad 0.2]^T, \quad C_1 = C_2 = [1 \quad 0]$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$E_{a1} = [0.1 \quad 0.2], \quad E_{a2} = [0.1 \quad 0.1]$$

$$E_{b1} = 0.1, \quad E_{b2} = 0.2, \quad \varepsilon = 1$$

$$\pi_{11} = \frac{1}{3}, \quad \pi_{12} = \frac{2}{3}, \quad \pi_{21} = \frac{3}{5}, \quad \pi_{22} = \frac{2}{5}$$

$$d_1 = 0.02, \quad d_2 = 0.03, \quad T = 0.1$$

이다. 퍼지규칙의 소속함수는

$$\Gamma_1^1 = 1 - \frac{1}{1 + e^{-7(x_1 - \pi/4)}}, \quad \Gamma_2^1 = 1 - \Gamma_1$$

로 선정하였다.

정리 (3)을 이용하면 다음과 같은 이득을 계산할 수 있다.

$$K_{11} = [-4.12 \quad -0.18], \quad K_{21} = [-3.78 \quad -0.26]$$

$$K_{12} = [-4.09 \quad -0.22], \quad K_{22} = [-3.79 \quad -0.27]$$

$$F_{11} = \begin{bmatrix} 0.95 \\ -1.42 \end{bmatrix}, \quad F_{21} = \begin{bmatrix} 0.96 \\ -0.82 \end{bmatrix}$$

$$F_{12} = \begin{bmatrix} 0.94 \\ -1.45 \end{bmatrix}, \quad F_{22} = \begin{bmatrix} 0.95 \\ -0.85 \end{bmatrix}$$

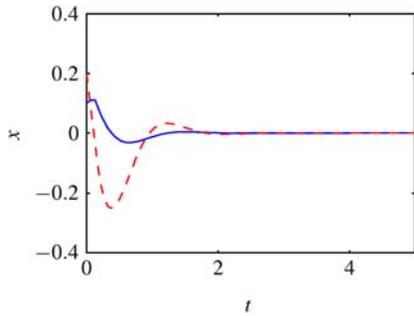
$$L_{11} = -0.14, \quad L_{21} = -0.15$$

$$L_{12} = -0.21, \quad L_{22} = -0.23.$$

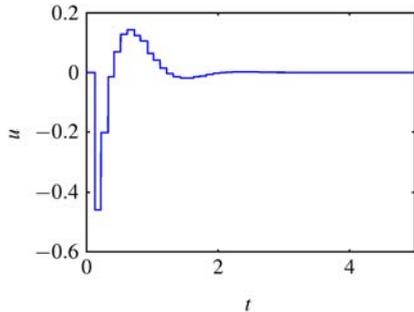
초기값  $x_0 = [0.1, 0.2]^T$ ,  $\hat{x}_0 = [0, 0]^T$  과  $u_{-1} = [0, 0]^T$ 를 가정한다. 그림 1은 시간응답을 나타낸다. 그림에서 보여지듯이 불확실성과 시간지연에도 불구하고 도립진자 시스템의 모든 상태가 확률적으로 안정하다.

#### 5. 결론

본 논문에서는 임의의 시간지연을 갖는 불확실 비선형 시스템의 관측기 기반 출력례환 샘플치 제어기 설계를 논의 하였다. 시간지연은 마코비안 확률과정을 따름을 가정하고 샘플치 제어기를 효율적으로 설계하기 위하여 연속시간 T-S 퍼지 시스템을 이산시간 T-S 퍼지 시스템으로 변환 하였다. 설계조건은 선형행렬부등식으로 나타나며 수치적 예제로부터 제안된 기법의 효용성을 입증하였다.



(a)  $x_1$  (실선),  $x_2$  (괘선).



(b) 제어입력  $u$ .

그림 1. 시간응답.

Fig. 1. Time Response.

### 참 고 문 헌

[1] P. Shi, E.-K. Boukas, and R. K. Agarwal, "Control of Markovian jump discrete-time systems with norm bounded uncertainty and unknown delay," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 44, no. 11, pp. 2139-2144, 1999.

[2] Y.-Y. Cao, J. Lam, and L. Hu, "Delay-dependent stochastic stability and  $\mathcal{H}_\infty$  analysis for time-delay system with Markovian jumping parameters," *J. Frankl. Inst.-Eng. Appl. Math.*, vol. 340, pp. 423-434, 2003.

[3] H. N. Wu and K. Y. Cai, "Robust fuzzy control for uncertain discrete-time nonlinear markovian jump system without mode observation," *Inf. Sci.*, vol. 175, no. 6, pp. 1509-1522, 2007.

[4] J. Yoneyama, "Output stabilization of Takagi - Sugeno fuzzy systems," *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 111, pp. 253-66, 2000.

[5] M. Liu, D. W. C. Ho, and Y. Niu, "Stabilization of Markovian jump linear system over networks with random communication delay," *Automatica*, vol. 45, no. 2, pp. 416-21, 2009.

[6] E. K. Boukas and P. Shi, "Stochastic stability and guaranteed cost control of discrete-time uncertain systems with Markovian jumping parameters," *Int. J. Robust Nonlinear Control*, vol. 8, no. 13, pp. 1155-167, 1998.

[7] P. Shi and E. Boukas, " $\mathcal{H}_\infty$ -control for Markovian jumping linear system with parametric uncertainty," *J. Optim. Theory Appl.*, vol. 95, no. 1, pp. 75-99, 1997.

[8] X.-J. Ma and Z.-Q. Sun, "Output tracking and regulation of nonlinear system based on Takagi-Sugeno fuzzy model," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 30, no. 1, pp. 47-59, 2000.

### 저 자 소 개



**지성철(Sung Chul Jee)**

2009년 : 인하대 전자공학부 졸업.

2009년~현재 : 동 대학원 전자공학부 석사과정

관심분야 :

퍼지제어, 대규모 시스템



**이호재(Ho Jae Lee)**

현재 : 인하대 전자공학부 조교수.



**주영훈(Young Hoon Joo)**

2008년 제 18권 제 6호 참조