

진동 패턴의 평균 변화 탐지를 위한 누적합 관리도

이재준¹ · 김덕래² · 이종선³

¹인하대학교 통계학과, ²인하대학교 통계학과, ³인하대학교 통계학과

(2009년 11월 접수, 2009년 11월 채택)

요약

공정관리에서 작은 평균변화를 탐지하기 위하여 누적합 관리도를 사용하는 것이 일반적이다. 자기상관이 존재하는 공정의 경우 시계열 모형에 적합하여 구한 잔차를 관리도에 적용하는 모형기반 관리방법이 활용되고 있다. 그러나 공정에 일정한 크기의 지속적인 수준 변화가 발생하면 잔차에는 동적 평균변화의 패턴이 나타나게 되어 누적합 관리도의 탐지능력은 저하될 수 있다. 본 논문에서는 잔차에 등락을 반복하는 진동(oscillation) 특성의 동적 평균변화가 발생하는 ARMA(1,1) 모형을 대상으로, 그러한 변화를 효율적으로 탐지할 수 있는 새로운 OCUSUM 관리도를 제안하고 모의실험을 통해 최근에 소개된 기존의 CUSUM 관리도와 탐지능력을 비교하였다.

주요용어: CUSUM, WCUSUM, 자기상관 공정 관리, 동적 수준변화.

1. 서론

슈하르트 관리도는 이상원인에 의한 공정의 변화를 탐지하기 위해 흔히 사용되는데, 작은 공정 평균의 변화에는 둔감하여 탐지능력이 떨어진다. 이러한 단점을 보완하기 위해 CUSUM(Cumulative Sum) 관리도와 EWMA(Exponentially Weighted Moving Average) 관리도 등이 고려된다. 이러한 기존 관리도들은 공정의 관측치가 서로 독립이고 동일한 분포(IID)를 따른다는 가정 하에서 제안된 방법이다. 그러나 공정 자동화에 따른 자동 계측기로 제품의 품질 특성치를 전수 관측하는 반도체나 석유화학 분야에서는 관측치 사이에 자기상관(autocorrelation)이 존재하여 기존의 관리도를 사용하는 경우에 잘못된 경보(false alarm)가 자주 발생할 수 있다. 이러한 문제점을 해결하기 위해 자기상관이 존재하는 자료를 적절한 시계열 모형에 적합하여 구한 잔차들(residuals)이 서로 독립인 성질을 이용하여, 잔차를 관리도에 적용하는 모형 기반(model-based) 탐지방법이 제안되었다 (Wardell 등, 1994; Alwan과 Roberts, 1988; Montgomery, 2009).

자기상관이 있는 공정 자료에 일정한 같은 크기의 수준 변화(Persistent Level Shift; LS)가 지속적으로 발생하는 경우, 공정 자료를 시계열 모형에 적합하여 구한 잔차는 원 자료의 수준변화 특성과 달리 모형에 따라 다양한 형태의 평균 변화 패턴을 나타내게 된다. 예를 들어, ARMA(1,1) 과정을 따르는 모형에서 잔차의 평균은 모형의 모수 값에 따라 수준 변화의 발생시점부터 점진적으로 증가하거나, 감소 혹은 진동과 같은 패턴을 보이면서 궁극적으로 특정 수준으로 평균이 수렴하는 동적 수준변화(dynamic/varying mean shifts)의 특성을 보이게 된다 (Hu와 Roan, 1996; Shu 등, 2008; Tsung와 Tsui, 2003; Lee와 Cho, 2004; 이재준과 이종선, 2008). 이러한 배경에서 지금까지 많은 연구자에 의

이 논문은 인하대학교의 지원에 의해 연구되었음.

¹교신저자: (402-751) 인천시 남구 용현3동 253, 인하대학교 통계학과, 교수. E-mail: jjlee@inha.ac.kr

해 Shewhart 관리도, CUSUM 관리도, EWMA 관리도 등 기존의 관리도가 자기상관이 있는 공정에 발생한 LS를 탐지하는데 ARL(Average Run Length) 기준에서 얼마나 효과적인지 분석되었다 (Wardell 등, 1994; Runger와 Prabhu, 1996; Vander 등, 1992; Atienza 등, 1998; Lu와 Reynolds, 2001; Shu와 Jiang, 2006).

기존의 관리도는 기본적으로 IID 공정에 발생한 LS를 탐지하기 위해 설계된 방법으로서, 자기상관이 있는 공정 자료의 경우 잔차의 동적 평균변화를 효과적으로 탐지하지 못하는 한계가 있을 수 있다. 이러한 문제점에 대한 개선된 탐지 방법으로 Lucas (1982)가 제안한 슈하르트 관리도와 CUSUM 관리도를 동시에 적용하는 방법을 고려할 수 있다. 또 다른 대안으로, Sparks (2000)과 Han 등 (2007)에 의해 제안된 여러 개의 CUSUM 관리도를 동시에 적용하는 Multiple CUSUM 관리도와 CUSUM 관리도의 참고 값과 결정구간을 시점별로 변경하는 Adaptive CUSUM(ACUSUM) 관리도 등이 있는데, 최근에 Shu 등 (2008)은 이를 개정한 Weighted CUSUM(WCUSUM)을 제안하고 그 성능을 비교하였다.

일반적으로 작은 수준 변화의 탐지에는 CUSUM 관리도가 좋은 성능을 보인다고 알려져 있다. 그러나 진동(oscillation)과 같은 동적 수준변화가 발생하는 경우에는 CUSUM 관리도에서 잔차의 수준변화가 누적되기 보다는 누적된 다음 시점에서 그 변화가 상쇄되어 탐지 능력이 저하되는 문제가 발생할 수 있다. 따라서 본 논문에서는 자기상관이 존재하는 공정 중에서 잔차에 진동 패턴의 동적 평균변화가 발생하는 공정에 초점을 두고 이를 효과적으로 탐지할 수 있는 Oscillating CUSUM(OCUSUM)을 소개하고, 모의실험을 통해 기존의 CUSUM, ACUSUM, WCUSUM 관리도들과 탐지능력을 비교하였다.

2. 잔차 평균의 변동 패턴

자기상관이 존재하는 공정 Z_t 는 다음과 같은 ARIMA(p, d, q) 모형을 따른다고 가정한다.

$$\phi(B)(1-B)^d Z_t = \theta(B)a_t, \quad (2.1)$$

여기서, a_t 는 분산이 σ^2 인 IID 백색 잡음 과정이고, B 는 $B^k Z_t = Z_{t-k}$ 인 후향 연산자, $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p$ 와 $\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q$ 는 B 의 다항식으로서 모든 절대 근이 1보다 크며 서로 같은 근이 없다고 가정한다. 여기에서부터 ARIMA 모형의 모든 모수는 기지이고(known), 일반성의 상실 없이 $\sigma^2 = 1.0$ 이라고 가정한다.

만약 공정에 수준변화 f_t 가 발생하면, 실제 관측치 N_t 와 N_t 를 Z_t 의 시계열 모형에 적합해 구한 잔차 e_t 는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$N_t = Z_t + f_t, \quad (2.2)$$

$$e_t = a_t + \tilde{f}_t, \quad (2.3)$$

여기서, $e_t = [(1-B)^d \phi(B)/\theta(B)]N_t$ 이고 $\tilde{f}_t = [(1-B)^d \phi(B)/\theta(B)]f_t$ 로 표현된다. 식 (2.3)으로부터 공정에 변화가 발생하지 않으면 잔차는 IID 백색 잡음 과정이 되지만, 수준변화 f_t 가 발생하면 잔차의 분산은 σ^2 로 같지만 그 평균이 \tilde{f}_t 의 변동 패턴을 띄게 됨을 알 수 있다.

공정 Z_t 에 시점 τ 에서부터 크기가 ω 인 LS가 발생하는 경우에 f_t 는 $t = 1, 2, \dots, \tau - 1$ 에서 $f_t = 0$ 이고 $t = \tau, \tau + 1, \dots$ 에서 $f_t = \omega$ 로 표현되는데, ARMA(1,1)을 따르는 공정의 경우 식 (2.3)의 잔차는 식 (2.4)와 같은 동적 평균 변화를 나타나게 된다 (Hu와 Roan, 1996; 이재준과 이종선, 2008).

$$E[e_t] = \tilde{f}_t = \begin{cases} 0, & t = 1, 2, \dots, \tau - 1, \\ \omega, & t = \tau, \\ \omega \left[1 - \frac{\xi(1 - \theta^{t-\tau})}{\lambda} \right], & t = \tau + 1, \tau + 2, \dots, \end{cases} \quad (2.4)$$

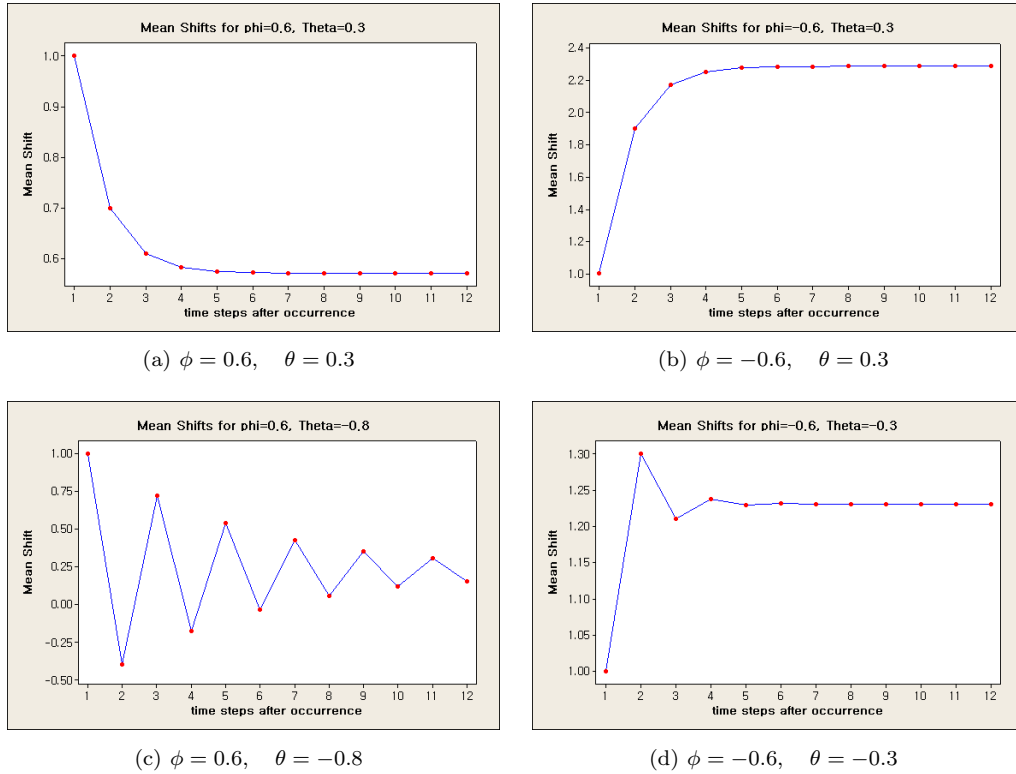


그림 2.1. ARMA(1, 1) 모수 값에 따른 잔차 평균의 변동 패턴($\omega = 1.0$)

여기서, $\xi = \phi - \theta$ 이고 $\lambda = 1 - \theta$ 이다. 식 (2.4)로부터 잔차의 평균은 LS 발생 시점 τ 에서는 ω 이고, 그 이후 시점에서는 시간이 지남에 따라 i) $\xi = \phi - \theta > 0$ (즉, $\phi > \theta$)이면 감소하고, ii) $\phi < \theta$ 이면 증가하며, 그 중에도 $\theta < 0$ 인 경우 잔차의 평균은 식 (2.5)의 $E[e_\infty] = \tilde{f}_\infty$ 를 중심으로 진동의 패턴을 보이되 위의 모든 경우에서 궁극적으로 \tilde{f}_∞ 의 값으로 수렴하게 된다.

$$E[e_\infty] = \tilde{f}_\infty = \omega \left[1 - \frac{\xi}{\lambda} \right] = \frac{\omega(1 - \phi)}{1 - \theta} \quad (2.5)$$

구체적인 예로 그림 2.1은 대표적인 세 가지의 잔차 평균변화 패턴을 나타낸 그림이다. 모형의 모수에 따라 점진적으로 증가하며 수렴하거나(a), 그 반대로 감소하며 수렴하는 형태를 보이거나(b), 또는 상승과 하강을 반복하는 진동의 패턴을 보이며 수렴하는 형태((c)와 (d)) 등을 보인다. 본 연구에서는 특히 (c)와 같이 상대적으로 큰 진동 패턴을 보이는 경우에 대해 CUSUM 관리도를 통해 탐지하는 방법을 제안하고자 한다.

3. 누적합관리도의 종류와 적용

이 장에서는 동적 평균변화 패턴을 갖는 프로세스에 적용 가능한 다양한 CUSUM 형태의 관리도를 소개하고, 진동 특성의 평균 변화의 탐지에 효율적인 새로운 관리도 OCUSUM을 제안한다.

3.1. CUSUM 형태의 관리도

이 절에서는 다음 절에서 제안될 OCUSUM 관리도와 비교될 관리도로 기존에 알려진 CUSUM 관리도와 ACUSUM과 WCUSUM 관리도를 정리한다.

CUSUM

CUSUM 관리도는 식 (3.1)의 통계량이 결정구간(h)을 초과하는지 여부로 공정의 변화를 탐지한다. 공정 e_n 이 IID인 경우에 수준 변화 전과 후의 평균이 각각 μ_0 와 μ_1 이라고 할 때, 참고값(k)은 일반적으로 식 (3.2)와 같이 결정되며 h 는 미리 정한 수준의 ARL_0 이 만족되도록 설정되는데 (Brook과 Evans, 1972), 본 연구에서는 Hawkins와 Olwell (1998)가 제시한 프로그램을 적용하였다. 여기에서 식 (3.1)의 C_n^+ 는 상승 단방향(upper one-sided)의 LS를 탐지하는 통계량이고, 하락의 경우에 대해 $C_n^- = \max(0, C_{n-1}^+ - (e_n - \mu_0) - k)$ 로 탐지하는데, 두 관리도를 동시에 적용하여 양 방향(two-sided) 변화를 탐지한다. 여기에서부터 C_n^+ 에 해당되는 부분에 초점을 두기로 한다.

$$C_n^+ = \max(0, C_{n-1}^+ + (e_n - \mu_0) - k) \quad (3.1)$$

$$k = \frac{\delta}{2}\sigma, \quad \delta = \frac{|\mu_1 - \mu_0|}{\sigma} = \frac{|\omega|}{\sigma}. \quad (3.2)$$

자기상관이 존재하는 공정의 경우 모형 적합으로 구한 잔차를 식 (3.1)의 CUSUM에 적용할 수 있다. 이런 경우에는 공정이 관리 상태인 때 잔차의 평균이 0이고 분산이 σ^2 이므로 식 (3.2)에서 $\mu_0 = 0$ 과 $\mu_1 = \omega = \delta\sigma$ 로 설정하면 된다. 공정 Z_t 에 LS가 발생한 경우, 잔차 e_t 의 평균이 같은 크기의 LS가 아닌 식 (2.4)와 같이 모형과 모수에 따라 특정한 변동 패턴을 나타내기 때문에 CUSUM 관리도의 탐지 능력에 대한 많은 연구가 수행되었다 (Atienza 등, 1998; Runger와 Prabhu, 1996; Lu와 Reynolds, 2001).

Adaptive CUSUM

식 (3.1)의 CUSUM에서 참고값 k 는 탐지하려는 특정 크기 ($\mu_1 - \mu_0$)의 LS를 최적으로(최소의 ARL_1) 탐지하도록 설계된 값으로 다른 크기의 LS가 발생할 때 비효율적일 수 있다.

이런 배경에서 Sparks (2000)는 다양한 크기의 LS를 조기에 탐지할 수 있게 식 (3.1)의 k 와 h 를 잔차 평균의 변화에 따라 시점별로 변경하는 Adaptive CUSUM(ACUSUM) 관리도를 식 (3.3)과 같이 제안하였다.

$$A_n^+ = \max\left(0, A_{n-1}^+ + \left[e_n + \frac{Q_n^A}{2}\right] / h\left(\frac{Q_n^A}{2}\right)\right), \quad (3.3)$$

여기서, $Q_n^A = \max(\delta_{\min}^+, \lambda e_n + (1-\lambda)Q_{n-1}^A)$ 는 탐지하려는 최소의 평균변화 크기(δ_{\min}^+)에 기초한 해당 시점 잔차 평균의 EWMA로서 식 (3.2)의 (변동)참고 값에 해당되고, $h(\cdot)$ 는 시점별로 변하는 참고값에 대해 목표 ARL_0 를 시점별로 만족시키는 운영함수이다. 본 연구에서는 Shu와 Jiang (2006)과 Shu 등 (2008)이 제시한 $h(k) \approx \ln[1 + 2k^2 AR L_0 + 2.332k]/2k - 1.166$ 을 적용하였다. 참고로, ACUSUM 관리도는 공정의 평균 변화가 δ_{\min}^+ 보다 큰 경우에 대해선 탐지력이 우수하지만 δ_{\min}^+ 보다 작은 공정변화에 대해선 탐지 능력이 낮아지게 된다.

Weighted CUSUM

Shu 등 (2008)은 ACUSUM이 다양한 크기의 LS를 탐지할 수 있도록 제안되는데 비해 평균이 시점별로 변하는 경우에 좀 더 적합하도록 설계한 Weighted CUSUM(WCUSUM)을 제안하였다. WCUSUM은

잔차의 평균이 변할 때 그 영향을 단순히 누적하기 보다 잔차 평균의 크기 추정량 ($|Q_n|$)으로 가중시켜 누적하여 그 변화를 더 빠르게 탐지할 수 있도록 식 (3.4)와 같이 설계되었다.

$$\begin{aligned} W_n^+ &= \max(0, W_{n-1}^+ + (e_n - k)|Q_n|) \\ Q_n &= \lambda e_n + (1 - \lambda)Q_{n-1}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

여기서 Q_n 는 가중 함수이며 일반적으로 초기 값은 $Q_0 = 0$ 으로, 평활상수 λ 는 $0 \leq \lambda \leq 1$ 사이 값으로 설정되는데 흔히 $\lambda = 0.2$ 가 적용된다. WCUSUM 관리도에서 결정구간(h)은 Shu (2008)가 제시한 이중 Markov Chain 방법이나 모의실험을 통해 결정될 수 있는데, 여기에서는 모의실험을 통해 결정하였다.

3.2. Oscillating CUSUM(OCUSUM)

공정에 LS가 발생한 후 잔차의 평균 변화는 모형과 모수에 따라 다양한 동적 평균변화의 패턴을 나타낼 수 있음을 ARMA(1,1)의 경우에 대해 식 (2.4)로 제시한 바 있다. 이러한 배경에서 최근에 ACUSUM과 WCUSUM이 각각 제안되었는데 이러한 관리도가 CUSUM보다 동적 평균변화의 탐지에 더 효과적임이 보고되었다 (Sparks, 2000; Shu 등, 2008). 그러나 ARMA(1,1)을 따르는 공정에서 $\theta < 0$ 의 경우에 잔차의 평균은 특히 식 (2.5)를 중심으로 등락을 반복하는 진동 형태로 나타남을 지적하였다. 이 경우에 식(3.1)–(3.4)에서 CUSUM은 $e_t > k$ 이면 그 시점에서 평균적으로 $e_t - k (> 0)$ 에 의해 누적될 수 있지만, 그 다음 시점에서는 $e_{t+1} < k$ 가 되어 $e_{t+1} - k (< 0)$ 에 의해 오히려 CUSUM이 감소(누적이 상쇄)되는 경우가 자주 발생하게 되어 CUSUM 관리도의 탐지 능력이 저하되기 쉽다. 예를 들어, ARMA(1,1) 모형의 모수가 ($\phi = 0.6, \theta = -0.8$)인 경우는 그림 2.1의 (c)에서 확인할 수 있듯이, 일반적으로 LS발생 후 홀수 시차에서는 CUSUM이 누적되지만 그 다음 짝수 시차에서는 CUSUM이 감소되는 특성으로 인해 초기 탐지능력이 저하되어 ARL_1 이 다른 동적 평균변화의 경우와 달리 상대적으로 크게 되는 문제가 발생할 수 있다. 특히, 초기 수준변화의 크기(ω)가 큰 경우에 그 영향이 더 오래 지속되어 탐지 능력이 더 나빠질 수 있다. 이러한 단점은 지금까지 제안된 대부분의 CUSUM 형태 관리도의 공통적인 문제로서 Shu 등 (2008)에서 확인할 수 있다. 따라서 공정의 모형과 모수가 기지라는 가정 하에서 공정관리가 수행됨을 고려할 때, 식 (2.4)와 같이 잔차의 동적 평균변화의 패턴을 미리 파악하여 그에 맞는 관리도를 적용하는 것이 더 효율적이라 할 수 있다.

본 논문에서는 진동 특성의 평균변화를 효율적으로 탐지하기 위해, 시점이 홀수인 경우와 짝수인 경우에 대해 아래의 식 (3.5)와 같이 별도의 CUSUM 관리도인 홀수 시점용 CO_n^+ 와 짝수 시점용 CE_n^+ 를 각각 적용하는 OCUSUM 관리도를 제안한다. 이러한 OCUSUM 관리도는 근본적으로 기존의 CUSUM과 같은데, 다만 CUSUM을 적용하는 시점만 그 시점이 홀수인지 또는 짝수인지에 따라 해당 CUSUM에 변하여 적용된다. 식 (3.5)에서 시점 n 이 홀수이면 $n = 2j - 1$, 짝수이면 $n = 2j$ 로 표기한다. 여기에서 $j = 1, 2, 3, \dots$ 이다.

$$\begin{aligned} CO_{2j-1}^+ &= \max\left(0, CO_{2(j-1)-1}^+ + (e_{2j-1} - k)\right), \quad j = 1, 2, 3, \dots \\ CE_{2j}^+ &= \max\left(0, EC_{2(j-1)}^+ + (e_{2j} - k)\right), \quad j = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (3.5)$$

공정 자료는 OCUSUM 관리도에 다음과 같은 과정으로 적용된다.

- (1) 시작 단계에서 $CO_0^+ = 0$ 과 $CE_0^+ = 0$ 으로 설정한다.
- (2) 시점 $n = 1$ (홀수)에서 식 (3.5)로 CO_1^+ 를 계산하고, $CO_1^+ > h$ 이면 RL = 1로 정하고 탐지를 마치며, 아니면 다음 시점으로 진행한다.

- (3) 시점 n 이 짝수 ($n = 2j$)이면 식 (3.5)로 $CE_n^+ = CE_{2j}^+$ 를 계산하고, $CE_n^+ > h$ 이면 $RL = n$ 으로 정하고 탐지를 마치며, 아니면 다음 시점 $n + 1 = 2(j + 1) - 1$ 로 진행하여 홀수 시점의 $CO_{n+1}^+ = CO_{2(j+1)-1}^+$ 을 구하여 같은 방법으로 탐지 여부를 판단한다.
- (4) 위의 단계 (3)을 OCUSUM이 결정구간 h 를 초과할 때까지 계속한다.

OCUSUM의 h 와 ARL의 결정

CUSUM 관리도에서 결정구간 h 는 IID를 가정하고 목표 ARL_0 를 만족하도록 결정되는데, OCUSUM의 경우 LS가 발생하지 않은 관리 상태에서는 잔차가 IID를 만족하므로 기본적으로 기존의 CUSUM 관리도에서 h 를 설정하는 방법과 같다. 다만 OCUSUM에서 개별 관리도의 경우 누적하는 시점이 한 시점씩 건너 뛰어 기존의 특정 ARL_0 를 만족하는 h 는 OCUSUM의 경우 2배의 ARL_0 가 된다. 따라서 관리 상태에서는 잔차가 IID를 만족하고 상승 방향의 수준변화를 탐지하는 CO_n^+ 와 CE_n^+ 의 CSUSUM에 적용되는 자료는 서로 독립이어서 OCUSUM의 ARL_0^+ 는 식 (3.6)과 같이 계산된다. 예로, ARL_{400}^+ 이 만족되는 결정구간 h 는 $ARL_{0(CO^+)}$ 와 $ARL_{0(CE^+)}$ 가 각각 800이 되도록 결정하면 된다.

$$\frac{1}{ARL_0^+} = \frac{1}{ARL_{0(CO^+)}} + \frac{1}{ARL_{0(CE^+)}} \quad (3.6)$$

양 방향 (two-sided) CUSUM의 ARL_0 는 상승과 하락 단방향(one-sided) CUSUM들로서 식 (3.6)과 유사한 방법으로 계산되듯이, 양방향 OCUSUM의 ARL_0 도 같은 방법으로 상승과 하락 단방향 수준변화 탐지 OCUSUM들의 평균 런 길이를 각각 구하여 $1/ARL_0 = 1/ARL_0^+ + 1/ARL_0^-$ 으로 계산된다. 여기에서 주목할 것은 제안한 OCUSUM의 경우 결정구간 h 는 기존의 CUSUM에서 h 를 결정하는 방법 그대로 사용하되 단지 목표 ARL_0 을 2배로 설정하여 구할 수 있다는 용이함이 장점이다.

4. 모의실험 및 결과

일반적인 CUSUM 관리도는 진동 특성의 동적 수준변화가 발생하는 프로세스에 대해 그러한 수준변화가 지속적으로 누적되기 보다는 누적된 다음 시점에서 그 변화가 상쇄되어 탐지 능력이 저하된다. 이 장에서는 ARMA(1,1) 모형 중에서 $\theta < 0$ 인 경우의 대표적인 모수 값을 대상으로 ARL_1 의 기준에서 기존의 CUSUM, ACUSUM, WCUSUM 관리도와 제안한 OCUSUM의 탐지 능력을 비교하기 위해 모의실험을 수행하였다.

CUSUM 설계모수의 설정

각 관리도의 설계모수는 모의실험을 단순화하기 위해 기존에 발표된 논문에서 적용된 설계모수 값을 최대한 이용하기 위해, 상승 방향 CUSUM의 경우 $ARL_0 = 400$ 으로, 양 방향 CUSUM의 경우 $ARL_0 = 200$ 이 만족되도록 설정하였다. 탐지목표 초기 수준변화의 크기는 모든 관리도의 설계단계에서 $\omega = 1.0\sigma$ 로 정하였다. 모의실험에 적용된 각 관리도의 설계모수는 다음과 같다.

- i) CUSUM과 OCUSUM 관리도에서 기준 참고값은 $k = \omega/2 = 0.5$ 로, 결정구간 h 는 Hawkins와 Olwell (1998)이 제시한 소프트웨어의 결과 ($h = 4.173$)를 적용하였다.
- ii) ACUSUM의 설계 모수는 Shu 등 (2008)와 같이 식 (3.3)의 Q_n^A 에서 $\delta_{\min}^+ = 2k = 1.0$ 와 $\lambda = 0.2$ 로 그리고 $h(k) \approx \ln[1 + 2k^2 ARL_0^+ + 2.332k]/2k - 1.166$ 을 적용하였다.
- iii) WCUSUM의 경우 $k = 0.5$ 에서 $ARL_0 = 400$ 을 만족하는 h 에 해당하는 $c = 3.383$ 로, Q_n 의 계산에서 $\lambda = 0.2$ 를 적용하였다.

표 4.1. 단방향 CUSUM 관리도의 ARL_1

$\phi = 0.6$ $\theta = -0.8$ ω	CUSUM	ACUSUM	WCUSUM	OCUSUM	성능 비교 ^a
	$k = 0.5$ $h = 4.17$	$k = 0.5$ $h = 1.1225$ $\delta_{\min} = 1.0$	$k = 0.5$ $h = 3.383$ $\lambda = 0.2$	$k = 0.5$ $h = 4.17$	
0.5σ	192.1	195.1	152.0	193.5	-21.4%
1.0σ	98.6	100.7	71.2	95.3	-25.3%
1.5σ	54.6	55.5	39.0	46.5	-16.1%
2.0σ	32.4	32.6	23.5	21.8	7.8%
2.5σ	20.2	20.3	14.6	10.4	40.4%
3.0σ	13.3	13.1	9.1	5.6	62.5%
4.0σ	5.96	6.0	3.6	2.8	28.6%

a: WCUSUM 관리도에 대한 OCUSUM 관리도의 상대 탐지력 비율

모의실험 설계 및 수행

먼저 ARMA(1,1) 모형을 따르는 공정 중에서 잔차에 진동 형태의 평균변화를 나타내는 대표적인 모수로 우선 $(\phi, \theta) = (0.6, -0.8)$ 을 선택하였다. 실제 모의실험에서 잔차의 표준편차는 일반성의 상실 없이 $\sigma = 1.0$ 으로 설정하였고, 공정에 발생하는 LS 크기인 $\omega (= c\sigma)$ 에 대한 연구 범위는 잔차 표준편차의 측도에서 $c = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 4.0$ 을 대상으로 하였다. 각 CUSUM의 ARL을 구하기 위한 모의실험 자료는 모형의 모수 값과 잔차의 초기 평균변화 크기인 $\omega (= c\sigma)$ 를 적용하여 식 (2.3)과 (2.4)에 의해 생성하고, 생성된 자료를 분석 대상의 CUSUM 관리도에 각각 적용하여 자료별 RL를 각 CUSUM 별로 구하였다.

본 모의실험에서는 앞에서 제시한 모의실험 설계의 각 경우(모형의 모수와 ω)에 대해 각각의 관리도에 대해 상승 단방향 CUSUM에서는 $ARL_0 = 400$ 의 설계모수로, 양방향 CUSUM에서는 $ARL_0 = 200$ 의 설계모수를 적용하여 각 생성자료 별로 RL을 구하였다. 위의 모의실험과정을 160,000 회씩 수행하여 각 $\omega (= c\sigma)$ 별로 RL의 평균을 구해 ARL을 계산하였다. 참고로 이러한 방법으로 추정된 ARL의 표준오차는 0.25%보다 작게 된다.

모의실험 결과 분석

ARMA(1,1) 과정의 모수가 $\phi = 0.6, \theta = -0.8$ 인 모형은 그림 2.1의 (c)에서 보이듯이 공정 평균변화 발생 직후 잔차의 수준 변화는 ω 크기 만큼의 폭으로 발생한 후에 그 진폭이 줄어들면서 진동하며 일정한 값으로 수렴해 나가는 패턴을 나타낸다. 상승 단방향 CUSUM의 탐지능력은 표 4.1과 그림 4.1같이며 결과는 다음과 같이 요약된다.

- i) CUSUM과 ACUSUM 관리도의 탐지능력은 LS의 수준변동 크기의 전 범위에 걸쳐 대체로 낮은 편이다. 이러한 결과는 잔차의 평균이 LS 발생 후 궁극적으로 식 (2.5)의 $E[e_\infty] = \omega(1-\phi)/(1-\theta)$ 로 수렴하게 되는데, 그 값이 $\omega = 1.0, 2.0, 3.0$ 일 때에 각각 $E[e_\infty] = 0.222, 0.444, 0.666$ 로 매우 작은 수준이 되어 탐지능력이 낮아지기 때문이다. 이러한 문제는 ACUSUM에서도 나타났다.
- ii) WCUSUM의 탐지능력은 LS의 수준변동 크기가 작은 경우($\omega \leq 1.5\sigma$)에 가장 좋은데, 반면에 수준변동이 상대적으로 큰 경우에 OCUSUM에 비해 효율적이지 못한 편이다. 이는 진동 특성의 평균 변화가 지속적으로 누적되기보다 상쇄되는 부분이 크기 때문이라 할 수 있다.
- iii) OCUSUM의 탐지능력은 수준변동 크기가 큰 경우에($\omega > 1.5\sigma$) 모든 CUSUM 형태의 관리도에

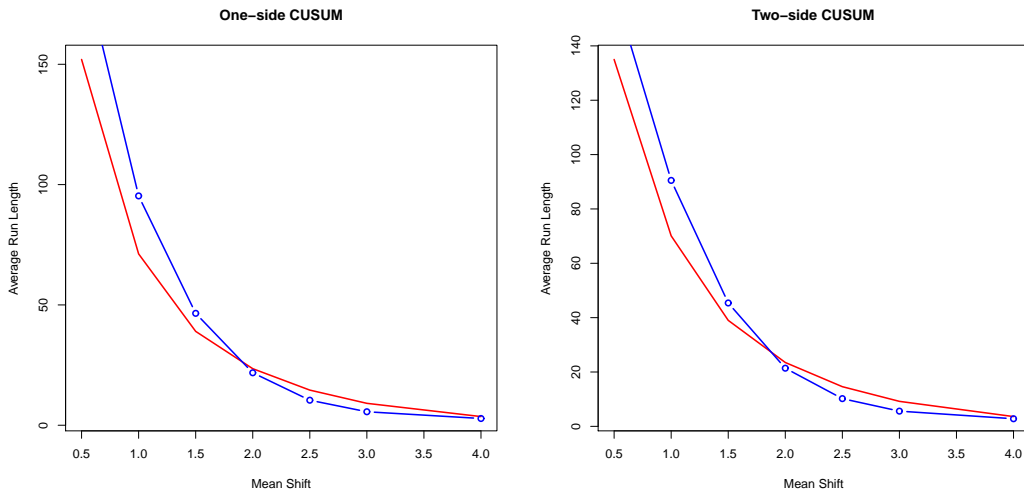


그림 4.1. ARL₁ 기준 탐지능력 비교 (실선-WCUSUM, 대쉬 라인 도트-OCUSUM)

표 4.2. 양방향 CUSUM 관리도의 ARL₁

	CUSUM	WCUSUM	OCUSUM	성능 비교 ^a
$\phi = 0.6$	$k = 0.5$	$k = 0.5$	$k = 0.5$	
$\theta = -0.8$	$h = 4.17$	$h = 3.383$	$h = 4.17$	
ω		$\lambda = 0.2$		
0.5σ	157.7	135.0	160.5	-15.9%
1.0σ	94.0	70.1	90.5	-22.5%
1.5σ	54.0	39.0	45.4	-14.1%
2.0σ	32.2	23.5	21.4	9.8%
2.5σ	20.3	14.6	10.2	43.1%
3.0σ	13.3	9.2	5.6	64.3%
4.0σ	5.9	3.6	2.8	28.6%

a: WCUSUM 관리도에 대한 OCUSUM 관리도의 상대 탐지력 비율

서 가장 우수함을 확인할 수 있다. 그러나 LS의 크기가 작은 경우($\omega \leq 1.5\sigma$), WCUSUM에 비해 탐지능력이 낮은 편인데, 특히 설계된 목표 변화 크기인 $\omega = 1.0\sigma$ 보다 작은 경우에 CUSUM과 ACUSUM과 거의 같은 탐지능력을 보이지만 다른 크기에서보다 상당히 저조한 편이다. 예를 들어, 공정 평균의 변화 폭이 1.0σ 와 같이 작은 수준의 변화에서는 WCUSUM이 OCUSUM보다 22.5% 빨리 공정 평균의 변화를 탐지하는 것으로 나타났지만, $\omega = 2.0\sigma$ 에서는 OCUSUM이 WCUSUM 보다 7.8%, $\omega = 3.0\sigma$ 에서는 62.5% 더 빨리 공정 변화를 탐지하는 것으로 나타났다.

양 방향 CUSUM의 탐지능력을 모의실험으로 분석한 결과는 표 4.2와 그림 4.1과 같다. 이 부분은 다양한 CUSUM 형태의 관리도의 특성상 잔차의 평균이 진동하는 경우에 양방향 CUSUM에서 단방향에 비해 탐지능력이 달라질 수 있기 때문인데, ACUSUM은 상승 방향의 결과가 미흡하여 이후 분석에서 제외하였다. 수행된 모의실험으로부터 다음과 같은 사실을 확인할 수 있다.

- i) 전반적으로 양방향 CUSUM 관리도($ARL_0 = 200$)의 탐지능력은 상승 단방향 CUSUM의 경우 ($ARL_0 = 400$)와 유사한 결과를 보이는데, 작은 크기의 LS($\omega \leq 1.0$)에서 모든 CUSUM의

ARL_1 이 어느 정도 감소됨을 확인할 수 있다.

- ii) WCUSUM과 OCUSUM 관리도의 탐지능력을 비교하면 상승 단방향 관리도의 경우처럼 LS의 수준변동 크기가 작은 경우($\omega \leq 1.5\sigma$)에서는 WCUSUM이 우월한데, 그런 우월 정도는 양방향 CUSUM에서는 낮아짐을 알 수 있다. 즉, 잔차의 평균이 양과 음을 반복하며 진동하는 경우에 하락 단방향 OCUSUM이 그러한 변화를 좀 더 효율적으로 탐지함을 확인할 수 있다. 예를 들어, $\omega = 0.5\sigma$ 의 경우 상승 단방향 분석에서 WCUSUM이 21.4% 빨리 탐지하였지만 양방향 분석에서는 15.9%로 감소되고, $\omega = 1.0\sigma$ 의 경우에는 25.3%에서 22.5%로 감소됨을 알 수 있다. 그러나 초기 수준변동의 크기가 큰 경우($\omega > 1.5\sigma$)에는 상승 단방향의 탐지 결과와 매우 유사함을 확인할 수 있다.

수행된 모의실험의 결과로부터 제안한 OCUSUM은 진동 특성의 동적 수준변화를 탐지하는 데 전반적으로 기존의 CUSUM보다 우수하며, WCUSUM과의 비교에서 공정의 수준변화의 크기가 상대적으로 큰($\omega > 1.5\sigma$) 경우에 OCUSUM이 더 우월함을 확인하였다.

5. 결론

CUSUM 관리도는 IID 프로세스에서 발생하는 지속적 수준변화(LS)를 탐지하는데 효과적이라고 알려졌다. 그러나 자기상관이 존재하는 프로세스에서 발생한 LS는 시계열 모형의 적합으로 생성되는 잔차에서 동적 평균변화의 패턴을 나타내어 기존의 CUSUM 관리도의 탐지능력은 저하될 수 있다. 특히, 잔차의 평균변화가 등락을 반복하는 진동의 동적 패턴을 보이며 특정 수준으로 수렴하는 경우에 CUSUM 통계량이 시간의 흐름에 따라 동적 변화의 효과를 지속적으로 누적하기보다 누적과 상쇄가 반복되어 탐지 능력이 저하될 수 있다.

이러한 배경에서 본 논문에서는 CUSUM 통계량을 진동의 상승분과 하락분에 해당되는 시점들을 분리하여 각각 두 가지의 CUSUM에 분리 누적하는 새로운 CUSUM 형태의 관리도(OCUSUM 관리도)를 제안하였고, 참고 값과 결정구간 등의 설계 모수를 설정하는 방법을 제시하였다. 제안한 OCUSUM 관리도의 장점은 이 관리도의 참고 값과 결정구간을 결정하는 방법으로 기존의 CUSUM 관리도에서 두 설계 모수를 설정하는 방법을 그대로 적용할 수 있어 사용이 용이하다는 점이다.

제안한 OCUSUM의 탐지능력을 평가하고 본 논문에서 소개된 CUSUM 형태의 관리도인 CUSUM, ACUSUM, 그리고 WCUSUM을 대상으로 탐지능력을 비교하기 위해 모의실험을 수행하였는데, 원 공정에서 예상되는 지속적 수준변화의 크기에 대한 범위 대부분에서 OCUSUM은 CUSUM과 ACUSUM에 비해 우월한 탐지능력을 보였다. 반면에 WCUSUM과 비교할 때, 그러한 변동의 크기가 작은 경우(1.5σ 이하)에서는 WCUSUM이 우월하지만, 그 외의 경우에는 OCUSUM의 탐지능력이 더 높음을 확인하였다. 또한, 변동의 크기가 작은 경우의 WCUSUM의 우월성은 양 방향 CUSUM의 경우에는 단 방향(one-sided) CUSUM에서보다 약해짐을 확인하였다.

참고문헌

- 이재준, 이종선 (2008). 자기상관 공정에 대한 누적합 관리도에서 설계모수값의 결정, <품질경영학회지>, **6**, 21-37.
- Alwan, L. C. and Roberts, H. V. (1988). Time series modeling for statistical process control *Journal of Business & Economic Statistics*, **6**, 87-95
- Atienza, O. O., Tang, L. C. and Ang, B. W. (1998). A SPC procedure for detecting level shifts of autocorrelated processes, *Journal of Quality Technology*, **30**, 340-351.

- Brook, D. and Evans, D. (1972). An approach to the probability distribution of cusum run length, *Biometrika*, **59**, 539–549.
- Han, D., Tsung, F., Hu, X. and Wang, K. (2007). CUSUM and EWMA multi-charts for detecting a range of mean shifts, *Statistica Sinica*, **17**, 1139–1164.
- Hawkins, D. M. and Olwell, D. H. (1998). *Cumulative Sum Charts and Charting for Quality Improvement*, Springer-Verlag, New York.
- Hu, S. J. and Roan, C. (1996). Change patterns in the time series-based control charts, *Journal of Quality Technology*, **28**, 302–312.
- Lee, J. J. and Cho, S. (2004). Problems of special causes in feedback adjustment, *Journal of the Korean Society for Quality Improvement*, **32**, 201–211.
- Lu, C. W. and Reynolds, M. R. (2001). CUSUM charts for monitoring an autocorrelated processes, *Journal of Quality Technology*, **33**, 316–334.
- Lucas, J. L. (1982). Combined Shewhart-CUSUM quality control schemes, *Journal of Quality Technology*, **14**, 51–59.
- Montgomery, D. C. (2009). *Statistical Quality Control: A Modern Introduction*, 6th ed., Wiley, New York.
- Runger, G. C. and Prabhu, S. S. (1996). A Markov chain models for the multivariate exponential weighted moving average control chart, *Journal of the American Statistical Association*, **91**, 1701–1706.
- Shu, L. and Jiang, W. (2006). A Markov chain model for the adaptive CUSUM control chart, *Journal of Quality Technology*, **38**, 135–147.
- Shu, L., Jiang, W. and Tsui, K-L. (2008). A weighted CUSUM charts for detecting patterned mean shifts, *Journal of Quality Technology*, **40**, 194–213.
- Sparks, R. S. (2000). CUSUM charts for signaling varying location shifts, *Journal of Quality Technology*, **32**, 157–171.
- Tsung, F. and Tsui, K-L. (2003). A mean shift pattern study on integration of SPC and APC for process monitoring, *IIE Transactions*, **35**, 231–242.
- Vander W. S., Tucker, W. T., Faltin, F. W. and Doganaksoy, N. (1992). Algorithmic statistical process control: concepts and an application, *Technometrics*, **34**, 286–297.
- Wardell, D. G., Moskowitz, H. and Plante, R. D. (1994). Run-length distributions of special-cause control charts for correlated processes, *Technometrics*, **36**, 3–17.

A CUSUM Chart for Detecting Mean Shifts of Oscillating Pattern

Jae June Lee¹ · Duk Rae Kim² · Jong Seon Lee³

¹Department of Statistics, Inha University; ²Department of Statistics, Inha University

³Department of Statistics, Inha University

(Received November 2009; accepted November 2009)

Abstract

The cumulative sum(CUSUM) control charts are typically used for detecting small level shifts in process control. To control an auto-correlated process, the model-based control methods can be employed, in which the residuals from fitting a time series model are applied to the CUSUM chart. However, the persistent level shifts in the original process may lead to varying mean shifts in residuals, which may deteriorate detection performance significantly. Therefore, in this paper, focussing on ARMA(1,1), we propose a new CUSUM type control method which can detect the dynamic mean shifts in residuals especially with oscillating pattern effectively and, through the simulation study, evaluate its performance by comparing with other various CUSUM type control methods introduced so far.

Keywords: CUSUM, WCUSUM, auto-correlated process control, dynamic shifts.

This research was supported by Inha University.

¹Corresponding Author: Professor, Department of Statistics, Inha University, 253 Yonghyun-3Dong, Nam-Gu, Incheon 402-751, Korea. E-mail: jjlee@inha.ac.kr