

Kalman filter를 이용한 위치추정 알고리즘의 성능 분석

Performance Analysis of Emitter Localization Using Kalman Filter

이 준 호*

Joon-Ho Lee

조 성 우*

Seong-Woo Cho

이 동 근**

Dongkeun Lee

Abstract

In this paper, the dependence of the Kalman filter-based emitter location algorithm on the initial estimate is investigated. Given all the LOB data, the initial estimate of the emitter location is obtained from the linear LSE algorithm with the former LOB data. Using the initial estimate, the Kalman filter algorithm is applied with the remaining LOB data to update the initial estimate. It is shown that as the number of data used in the calculation of the initial estimate increases, the accuracy of the final estimate is improved and the total computational complexity of obtaining the initial estimate and the final estimate increases. In addition, the dependence of the performance of the Kalman filter algorithm on the predefined constant is illustrated.

Keywords : LOB(도래각), Emitter Localization(신호원위치결정), Kalman Filter(칼만 필터), Final Estimate(최종 추정치), Initial Estimate(초기 추정치), Performance Analysis(성능분석), Predefined Constant(사전 정의 상수)

1. 서 론

본 연구는 전술항공기에 탑재된 단일 방향탐지 장치가 항공기 이동에 따라 측정한 신호원의 도래방위들을 이용하여 신호원의 위치를 결정(PF : Position Fixing)하는 기술에 관한 것이다.

방위각을 이용한 위치원 추정법은 알려진 곳에 위치한 센서로부터 구해진 두 개 이상의 도래각(LOB :

Line Of Bearing)의 교점을 이용하여 통계적으로 가장 확률이 높은 신호원의 위치를 결정하는 것이다.

본 연구에서는 전체 도래각 정보가 주어졌을 경우, 앞부분의 일부 도래각 정보를 이용하여 선형 LSE 알고리즘으로 신호원 위치의 초기 추정값을 구한 후, 나머지 도래각 정보를 이용하여 Kalman filter 알고리즘으로 초기 추정값을 실시간 갱신한다. 따라서, 초기 추정값 계산에 이용되는 도래각 정보의 개수가 증가되면, Kalman filter 알고리즘에 이용되는 도래각 정보의 개수는 감소한다.

초기 추정값 계산에 이용되는 도래각 정보의 개수의 변화에 따른 성능 및 Kalman filter 기법의 상수 변화에 따른 성능 변화를 조사한다.

* 2009년 7월 6일 접수~2009년 10월 9일 게재승인

* 세종대학교

** 국방과학연구소(ADD)

책임저자 : 이준호(joonhlee@sejong.ac.kr)

2. 선형 LSE(linear least-squared error) 알고리즘

Fig. 1로부터 거리 오차의 총합은 다음과 같이 주어진다^[1,2].

$$\begin{aligned} D &= \sum_{i=1}^N d_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 x_T^2 + \sum_{i=1}^N 2 a_i b_i x_T y_T - \sum_{i=1}^N 2 a_i c_i x_T \\ &\quad + \sum_{i=1}^N b_i^2 y_T^2 - \sum_{i=1}^N 2 b_i c_i y_T + \sum_{i=1}^N c_i^2 \end{aligned} \quad (1)$$

$$a_i = \sin \phi_i, \quad b_i = -\cos \phi_i$$

$$c_i = x_i \sin \phi_i - y_i \cos \phi_i$$

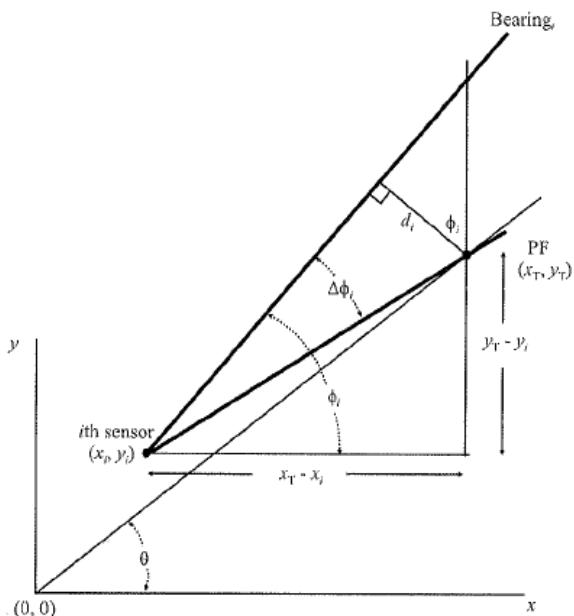


Fig. 1. 선형 LSE 알고리즘

식 (1)에서 D 값을 최소화하는 값을 신호원 위치 추정치로 선택한다.

추정치의 값이 실제 신호원의 위치에 가까울수록 거리 제곱의 합은 감소한다. 따라서, 거리 제곱의 합을 최소화하는 신호원의 위치를 신호원 위치에 대한 추정치로 선택할 수 있다. 신호원 위치의 추정치의 변화에 따라 거리 제곱의 합이 변화하므로 거리 오차의 합을 최소화하는 신호원 위치는 다음과 같이 주어

진다.

따라서, 거리 제곱의 합을 최소화하는 조건으로부터 다음을 얻는다.

$$\frac{\partial D}{\partial x_T} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial D}{\partial y_T} = 0 \quad (3)$$

식 (2)와 식 (3)에 식 (1)을 대입하여, 다음과 같이 신호원의 위치의 추정치를 얻을 수 있다.

$$x_T = \frac{\sum_{i=1}^N b_i^2 \sum_{i=1}^N a_i c_i - \sum_{i=1}^N a_i b_i \sum_{i=1}^N b_i c_i}{\sum_{i=1}^N a_i^2 \sum_{i=1}^N b_i^2 - (\sum_{i=1}^N a_i b_i)^2} \quad (4)$$

$$y_T = \frac{\sum_{i=1}^N a_i^2 \sum_{i=1}^N b_i c_i - \sum_{i=1}^N a_i b_i \sum_{i=1}^N a_i c_i}{\sum_{i=1}^N a_i^2 \sum_{i=1}^N b_i^2 - (\sum_{i=1}^N a_i b_i)^2} \quad (5)$$

같은 결과를 다음과 같이 행렬과 벡터를 이용하여 구할 수 있다.

다음과 같이 행렬과 벡터를 정의한다.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_T = \begin{bmatrix} x_T \\ y_T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_N & b_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_N \end{bmatrix} \quad (6)$$

행렬과 벡터를 이용하여 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{D} = \mathbf{H} \mathbf{x}_T - \mathbf{C} \quad (7)$$

신호원 위치 벡터 \mathbf{x}_T 에 대한 LS 추정기는 다음과 같이 주어진다.

$$\mathbf{x}_T = [\mathbf{H}^T \quad \mathbf{H}]^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{C} \quad (8)$$

3. Kalman 필터기법을 적용한 신호원 위치추정 알고리즘

Kalman 필터의 개념은 특정시간에서의 신호원 위치 추정치를 갱신(update)하여 다음 시간에서의 위치추정치를 구하는 것이다. 이 때, 갱신을 위하여 새로운 측정값(measurement)을 이용한다.

신호원 위치식별에 Kalman 필터는 표준 Kalman 필터(Standard Kalman Filter)와 확장 Kalman 필터(EKF : Extended Kalman Filter)의 두 가지 방법으로 적용될 수 있다. 표준 Kalman 필터는 mean-squared 에러를 최소화하는 의미에서 최적이다. 확장 Kalman 필터는 최적은 아니며, 근사를 사용하므로 ad hoc 추정기이다.

가. 표준 Kalman 필터

상태벡터(state vector)를 \mathbf{s}_i , 측정벡터(measurement vector)를 \mathbf{z}_i 로 표현한다. $\hat{\mathbf{s}}_{i|+}$ 는 i 인 순간의 사전 상태 추정치이며, $\hat{\mathbf{s}}_i$ 는 i 인 순간의 사후 상태 추정치이다. 사전과 사후의 의미는 i 인 순간의 측정(measurement) \mathbf{z}_i 정보의 이용여부이다. 사전 추정치 오차와 사후 추정치의 오차를 다음과 같이 각각 정의한다.

$$\mathbf{e}_{i|+} \equiv \mathbf{s}_i - \hat{\mathbf{s}}_{i|+} \quad (9)$$

$$\mathbf{e}_i \equiv \mathbf{s}_i - \hat{\mathbf{s}}_i \quad (10)$$

관련된 가중치가 고려된 오차 공분산 행렬은 다음과 같다.

$$\mathbf{I}_{i|+} = e\{\mathbf{e}_{i|+} \mathbf{W} \mathbf{e}_{i|+}^T\} \quad (11)$$

$$\mathbf{I}_i = e\{\mathbf{e}_i \mathbf{W} \mathbf{e}_i^T\} \quad (12)$$

Kalman 필터는 상태에 대한 사후 추정치를 사전 추정치와 차이(difference)의 선형결합으로 표현한다. 여기서, 차이는 실제 측정값 \mathbf{z}_i 와 예측된 측정(predicted measurement) $\mathbf{H}\hat{\mathbf{s}}_{i|+}$ 사이의 차이이다:

$$\hat{\mathbf{s}}_i = \hat{\mathbf{s}}_{i|+} + \mathbf{K}(\mathbf{z}_i - \mathbf{H}\hat{\mathbf{s}}_{i|+}) \quad (13)$$

위의 식에서 현재의 측정에 의해 정해지는 사전 추정치와 사후 추정치의 차이 ($\mathbf{z}_i - \mathbf{H}\hat{\mathbf{s}}_{i|+}$) 부분을 innovation이라고 부른다. 행렬 \mathbf{K} 는 사후 오차 공분산 행렬이 최소화되도록 선택된다.

$$\mathbf{K}_i = \mathbf{I}_{i|+} \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \mathbf{I}_{i|+} \mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1} \quad (14)$$

표준 Kalman 필터는 다음과 같이 구성된다.

State Prediction

$$\hat{\mathbf{s}}_{i|+} = \Phi \hat{\mathbf{s}}_{i-1} + \mathbf{B} \mathbf{u}_{k-1} \quad (15)$$

Prediction of covariance matrix of state

$$\mathbf{I}_{i|+} = \Phi \mathbf{I}_{i-1} \Phi^T + \mathbf{Q} \quad (16)$$

Kalman gain matrix computation

$$\mathbf{K}_i = \mathbf{I}_{i|+} \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \mathbf{I}_{i|+} \mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1} \quad (17)$$

Update state equation

$$\hat{\mathbf{s}}_i = \hat{\mathbf{s}}_{i|+} + \mathbf{K}_i (\mathbf{z}_i - \mathbf{H}_i \hat{\mathbf{s}}_{i|+}) \quad (18)$$

Update covariance matrix of states

$$\mathbf{I}_i = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_i \mathbf{H}) \mathbf{I}_{i|+} \quad (19)$$

Initialization

$$\mathbf{s}_{0|+} = e\{\mathbf{s}_0\} \quad \mathbf{I}_{0|+} = \text{cov}\{\mathbf{s}_0\} \quad (20)$$

따라서, Kalman 필터 방정식은 시간갱신방정식(time update equation)과 측정갱신방정식(measurement update equation)의 두 부분으로 구성된다.

시간갱신방정식은 $\hat{\mathbf{s}}_{i|+} = \Phi \hat{\mathbf{s}}_{i-1} + \mathbf{B} \mathbf{u}_{k-1}$, $\mathbf{I}_{i|+} = \Phi \mathbf{I}_{i-1} \Phi^T + \mathbf{Q}$ 으로 주어진다. 이전 시간의 측정을 이용한 사후 상태에서 현재 시간의 측정을 이용하기 전 상태로의 진행을 표시한다. 측정갱신방정식은 $\hat{\mathbf{s}}_i = \hat{\mathbf{s}}_{i|+} + \mathbf{K}_i (\mathbf{z}_i - \mathbf{H}_i \hat{\mathbf{s}}_{i|+})$, $\mathbf{I}_i = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_i \mathbf{H}) \mathbf{I}_{i|+}$ 으로 주어진다. 현재 시간의 측정을 이용하기 전 상태에서 현재 시간의 측정을 이용한 후 상태로의 변화를 표시한다. 즉, 사전 추정치에 새로운 측정을 통합하여 향상된 사후 추정치를 구하는 과정이다.

나. 확장 Kalman 필터

선형 시스템에 대한 표준 Kalman 필터를 AWGN인 비선형 시스템에 적용하는 것을 확장 Kalman 필터(EKF : Extended Kalman Filter)라고 한다. Taylor 전개를 이용하여 2차 이상 부분을 무시하여 비선형 시스템을 선형화한다^[3].

다. 확장 Kalman 필터를 적용한 신호원 위치식별

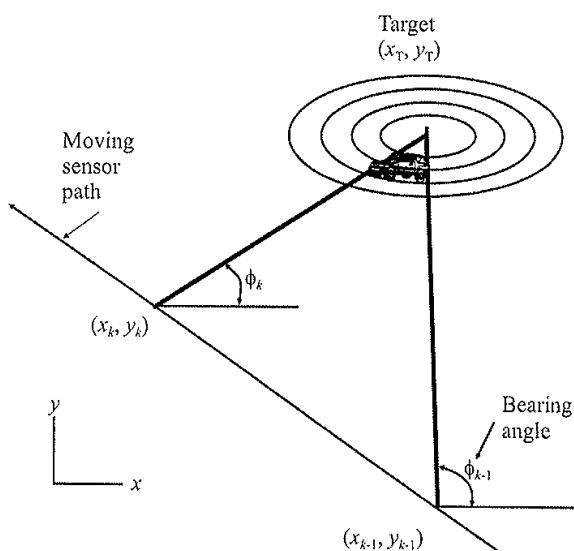


Fig. 2. EKF를 이용한 신호원 위치 추정(현재 및 다음 순간의 센서 위치 및 도래각 추정치 이용)

Fig. 2에서 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) = \begin{bmatrix} \hat{x}_{T,k} \\ \hat{y}_{T,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_{T,k-1} \\ \hat{y}_{T,k-1} \end{bmatrix} \quad (21)$$

이 경우, 신호원의 위치가 바뀌지 않으므로 상태변환행렬은 단위행렬이다. 신호원이 움직일 경우, 상태변환은 선형적이며, 다음과 같이 표현할 수 있다^[4].

$$\phi_k = h(\hat{\mathbf{x}}_k) + \eta_k \quad (22)$$

확장 Kalman 필터를 이용한 신호원 위치식별은 다음과 같이 구성된다.

Kalman 이득 행렬(gain matrix)는 다음과 같이 주어진다.

$$\mathbf{K} = \mathbf{G}_{k\leftarrow} \mathbf{H}^T(\hat{\mathbf{x}}_{k\leftarrow}) [\mathbf{H}(\hat{\mathbf{x}}_{k\leftarrow}) \mathbf{G}_{k\leftarrow} \mathbf{H}^T(\hat{\mathbf{x}}_{k\leftarrow}) + \mathbf{R}_k]^{-1} \quad (23)$$

상태 방정식을 다음과 같이 개선한다.

$$h(\hat{\mathbf{x}}_{k\leftarrow}) = \hat{\phi}_k = \tan^{-1}\left(\frac{\hat{y}_{T,k\leftarrow} - y_k}{\hat{x}_{T,k\leftarrow} - x_k}\right) \quad (24)$$

공분산 행렬을 다음과 같이 개선한다.

$$\mathbf{G}_k = [\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H}(\hat{\mathbf{x}}_{k\leftarrow})] \mathbf{G}_{k\leftarrow} \quad (25)$$

$$\mathbf{H}(\hat{\mathbf{x}}_{k\leftarrow}) = \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k\leftarrow}} = [H_{11} \ H_{12}] \quad (26)$$

다음과 같은 초기화 조건을 이용한다.

$$\mathbf{s}_{0\leftarrow} = \mathcal{E}\{\mathbf{s}_0\} \quad \mathbf{G}_{0\leftarrow} = \text{cov}\{\mathbf{s}_0\} \quad (27)$$

이 경우, 신호원의 위치가 바뀌지 않으므로 상태변환행렬은 단위행렬이다.

Kalman 필터를 이용한 신호원 위치 추정 시 결정해야 할 상수는 다음과 같다.

잡음공분산 외삽(extrapolation)을 위하여 아래 행렬의 q_{22} 값을 결정해야 한다.

$$P(k+1|k) = \Phi P(k|k) \Phi^T + Q = P(k|k) + Q \quad (28)$$

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 \\ 0 & q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \epsilon \end{bmatrix}$$

도래각 추정의 정확성을 표현하는 잡음 공분산인 아래 식의 R 값을 결정해야 한다.

$$\begin{bmatrix} \hat{x}(0) \\ \hat{y}(0) \end{bmatrix} : \text{A priori position estimates at time } k=0 \quad (29)$$

$$P(0|0) = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & 0 \\ 0 & \sigma_y^2 \end{bmatrix}$$

초기신호원 위치 추정치의 불확실성을 표현하는 P 행렬의 대각성분의 값을 결정해야 한다.

$$\beta(k) = h(\hat{X}(k)) + v(k) \quad (30)$$

$$E[v(j)v(k)] = \sigma_v^2 \delta_{jk} = R \delta_{jk}$$

4. 수치 결과 분석

센서가 장착된 항공기의 이동속도(speed)는 300m/sec로 일정하고, 도래각 추정의 시간간격은 3초이다. 도래각 추정오차의 표준편차는 1도이며, 동일 조건에서 1000번 반복 수행한 후, RMS 오차를 구하였다. Figs. 5~6에서 y 축은 RMS 오차이므로, y 축의 값이 작을수록 정확한 추정을 의미한다.

Fig. 3과 같은 비행경로를 가정한다. 여기서, 비행경로는 직선으로 주어지며, 신호원에서 가장 가까운 비행경로와의 거리는 100km이다.

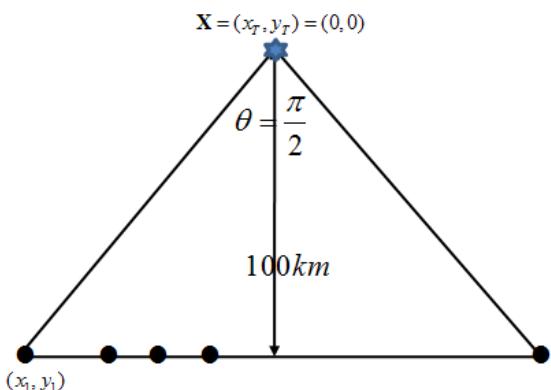


Fig. 3. 항공기 이동 경로 정의

가. LOB 추정과 EKF 추정 연산량 비교

항공기의 전체 이동경로가 동일하다고 가정할 때, 선형알고리즘과 EKF 알고리즘의 1회 추정에 필요한 연산량의 결과를 Fig. 4에 나타내었다.

이전 추정값이 주어질 때, EKF 알고리즘은 현재 도래각 값만을 이용하여 이전 추정값을 갱신하여 현재의 추정값을 구한다. 즉, 이전 도래각 값은 이전 추정값에 반영되어 있으므로 다시 이용하지 않는다. 따라서, 도래각 개수가 증가해도 1회 추정에 필요한 시간은 거의 일정하다.

그러나, 선형 알고리즘은 현재 도래각 값 뿐 아니라 이전 도래각 값을 동시에 이용하여 현재 추정값을 완전히 새로 계산한다. 따라서, 도래각 개수가 증가함에 따라 1회 추정에 필요한 시간은 증가한다.

나. 초기추정치의 정확성과 P값의 변화에 따른 EKF 추정의 성능

선형 알고리즘을 이용하여 신호원의 초기 추정치를

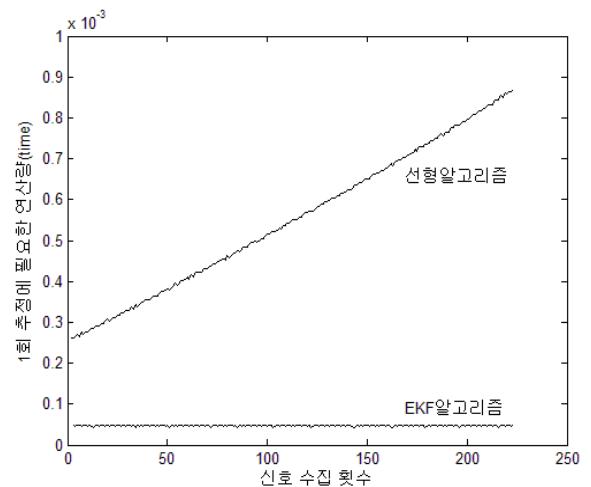


Fig. 4. 1회 추정에 필요한 연산량

구한 후, EKF 알고리즘을 적용하여 최종 추정치를 구한다. 그리고 (29)식의 P값의 변화에 대한 결과를 Figs. 5~6에 나타내었다.

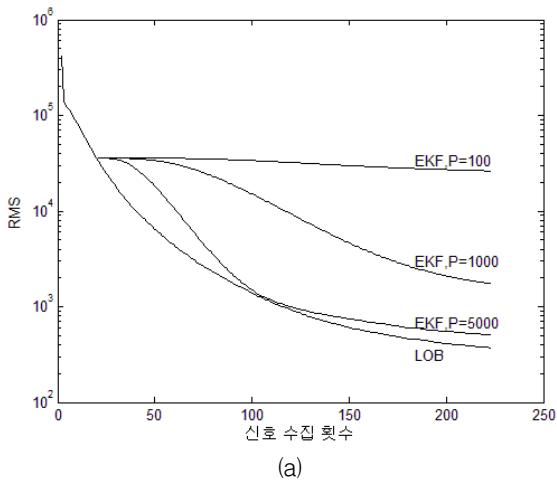
Fig. 5-(a)에서는 앞부분의 20개의 도래각을 이용하여 선형알고리즘으로 초기추정치를 구한 후, 그 결과를 EKF 추정의 초기추정치로 사용한 결과이다. 그림을 보면, P값이 커질수록 최종 추정치의 성능이 좋아지는 것을 확인할 수 있다.

Fig. 5-(b)에서는 앞부분의 60개의 도래각을 이용하여 선형알고리즘으로 초기추정치를 구한 후, 그 결과를 EKF 추정의 초기추정치로 사용한 결과이다. 초기추정치가 실제 타켓 위치와 오차가 클 경우 P값이 커질수록 성능이 좋아지는 것을 확인할 수 있다. 그리고 Fig. 5-(a)보다 전체적으로 성능이 향상됨을 알 수 있다.

Fig. 6에서는 160개의 도래각을 이용하여 초기추정치를 구한 후, 그 결과를 EKF 추정의 초기추정치로 사용한 결과이다. P값이 커질수록 성능이 나빠지는 것을 확인할 수 있다.

Figs. 5~6에서 P 값에 따른 최종 추정치의 성능은 다음과 같다. Fig. 5와 같이 초기 추정치가 부정확한 경우, P 값이 증가함에 따라 최종 추정치의 성능이 향상된다. 반대로, Fig. 6과 같이 초기 추정치가 상대적으로 정확할 경우, P 값이 증가함에 따라 최종 추정치의 성능이 나빠짐을 알 수 있다.

초기추정치가 너무 정확할 경우 EKF 알고리즘에 의해 오히려 최종 추정치의 RMS 오차가 증가하는 현상을 보임을 Fig. 6에서 확인할 수 있다.



(a)

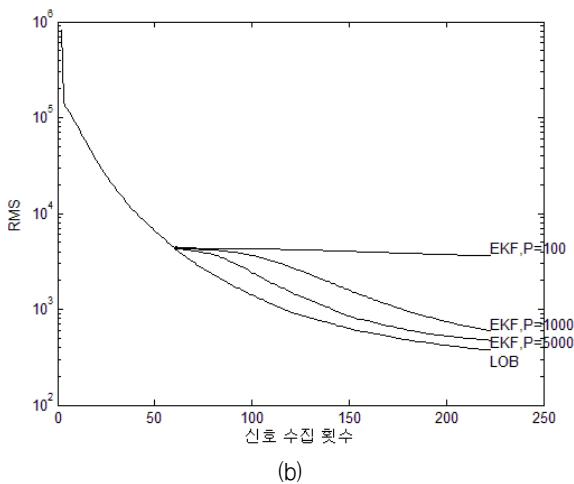


Fig. 5. 초기추정치와 P값 변화에 따른 EKF 위치추정

5. 결 론

본 논문에서는 선형 LSE 알고리즘과 Extended Kalman Filter 알고리즘을 이용한 신호원 위치 추정법의 성능을 제시하였다.

선형 알고리즘에 비하여 EKF 알고리즘의 계산량이 적음을 Fig. 4에서 보였다. 따라서, 실시간 측정을 위해선 EKF 추정이 더 효율적이라고 할 수 있다.

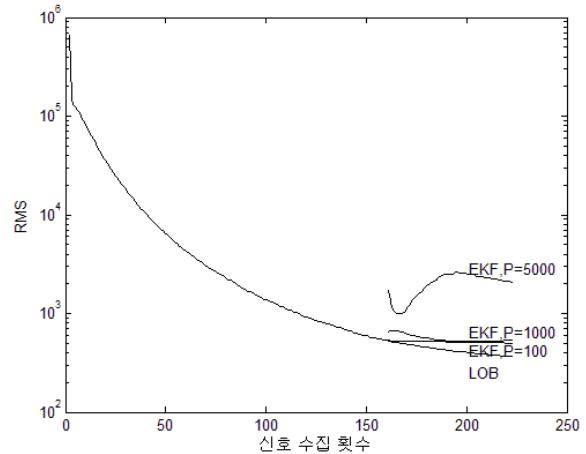


Fig. 6. P값 변화에 따른 EKF 위치추정

초기 추정값이 부정확한 경우에는 상수 P 값을 크게 해야 최종 추정치가 정확함을 Fig. 5에서 보여준다. 반대로, 초기 추정값이 정확한 경우, 상수 P 값을 작게 해야 최종 추정치의 정확성이 증가됨을 Fig. 6에서 보여준다.

Reference

- [1] Brown R. M., "Emitter Location Using Bearing Measurements from a Moving Platform", NRL Report 8483, Naval Research Laboratory, Wahington, DC, June 1981.
- [2] Poisel, R. A., "Introduction to Communication Electronic Warfare Systems", Norwood, MA : Artech House, pp. 384~388, 2002.
- [3] Aidala, V. J., "Kalman Filter Behavior in Bearing-Only Tracking Applications", IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 15, No. 1, pp. 29~39, January 1979.
- [4] Spingarn, K., "Passive Position Location Estimation Using the Extensed Kalman Filter", IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. AES-23, No. 4, pp. 558~567, July 1987.