

## 와전류 브레이크의 영구자석배열 최적설계

최재석<sup>†</sup> · 유정훈<sup>\*</sup>

(2008년 12월 26일 접수, 2009년 6월 9일 수정, 2009년 6월 10일 심사완료)

### Optimal Array Design of the Permanent Magnet in an Eddy Current Brake

Jae Seok Choi and Jeonghoon Yoo

**Key Words :** Eddy Current Brake(와전류 브레이크), Permanent Magnet(영구자석), Optimal Design(최적설계), Finite Element Analysis(유한요소해석)

#### Abstract

Eddy current is usually generated in the material with high conductivity by time-varying source such as AC current and also is induced by the moving source with relative velocity. The contactless magnetic brake makes use of the braking force from the eddy current generated by the moving source and currently used for the secondary brakes of heavy trucks, buses and rail vehicles. This study aims to design the magnetization pattern of the eddy current brake system of a permanent magnet type where the design aim is to maximize the braking force. The analysis of brake systems is based on the two-dimensional finite element analysis. We use the sequential linear programming as the optimizer and the adjoint variable method is applied for the sensitivity analysis.

#### 1. 서론

와전류(eddy current) 브레이크는 전통적인 접촉식 제동장치와 달리 마찰, 소음으로부터 자유로울 뿐만 아니라 빠른 응답속도를 갖는다. 하지만 유도전류로 인한 많은 열의 발생과 열변형, 그리고 저속인 경우에 제동력이 거의 발생하지 않는다는 단점도 있다. 그러나 비접촉 제동과 고속으로 운동할 때 발생하는 큰 제동력은 다른 단점들을 상쇄시킬 만하다.

지금까지 전자기 시스템에서의 영구자석 설계는 주로 설계자의 직관 혹은 오랜 경험에 의해 이루어졌으며 전산모사 기반의 최적화 기법을 이용한 연구는 드문 실정이다.<sup>(1,2)</sup> 본 연구에서는 영구자석의 자화방향을 설계변수로 정의하고 와전류 브레이크의 제동력을 최대화하는 자석배열을 찾고자 한다.

와전류 브레이크 시스템의 유한요소해석은 일반적으로 과도 해석과 정적 해석으로 분류될 수 있다.<sup>(3)</sup> 전자기원과 전도체(conductor)가 일정한 속도를 가지고 움직이며 이동 방향으로 모델의 단면 형상(geometry)이 변화하지 않는 경우 정적인 해석이 가능하다. 일반적인 정자계를 위한 지배방정식에 속도와 도전율에 의한 대류항(convection term)을 추가하여 해석함으로써 과도 해석을 피할 수 있다. 본 연구는 긴 직선 레일과 직사각형 형상의 영구자석으로 구성된 단순한 브레이크 모델을 대상으로 하기 때문에 정적인 해석이 용이하다.

본 연구에서 와전류 시스템의 해석은 2차원 유한요소해석을 통해 이루어지며 자기포화현상에 의

[이 논문은 대한기계학회 2008년도 추계학술대회(2008. 11. 5.-7., 용평리조트) 발표논문임]

<sup>†</sup> 책임저자, 회원, 연세대학교 정보저장기기 연구센터  
E-mail : gattz@yonsei.ac.kr

TEL : (02) 2123-2859, FAX : (02) 362-2736

<sup>\*</sup> 연세대학교 기계공학부

한 비선형 특성은 배제된다. 설계 민감도는 보조 변수법(adjoint variable method)<sup>(4)</sup>을 통해 계산되며 순차선형계획법(sequential linear programming)<sup>(4)</sup>이 최적화 알고리즘으로 사용된다.

## 2. 와전류 유한요소해석

와전류  $\mathbf{J}_{eddy}$  는 전도성 재료에서 교류(AC)나 전자기원에 대한 상대적인 운동으로 발생되며 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{J}_{eddy} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1)$$

여기서  $\sigma$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{B}$  는 각각 도전율(conductivity), 전기장도(electric field intensity), 운동속도, 자속밀도(magnetic flux density)를 가리킨다. 본 연구에서는 전도성 재료의 상대적인 운동만을 고려하기 때문에 지배방정식은 다음과 같이 정의된다.

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} (\nabla \times \mathbf{A}_z - \mathbf{B}_r) - \sigma \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}_z) = \mathbf{J}_z \quad (2)$$

여기에서  $\mu$ ,  $\mathbf{B}_r$  는 각각 자기투과율(magnetic permeability)과 잔류자속밀도(remanent flux density)를 나타내며,  $\mathbf{J}_z$  는 z 방향의 전류밀도(current density)를 의미한다. 본 연구는 2차원 모델을 다루기 때문에 z 방향의 자기벡터포텐셜(magnetic vector potential)  $A_z$  가 사용된다. 식 (2)에 갤러킨(Galerkin)법을 적용하면 아래와 같은 유한요소식을 얻을 수 있다.<sup>(3)</sup>

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial A_z}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} + \frac{\partial A_z}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \right) dx dy \\ & + \sigma \iint_{\Omega_{mover}} \left( \mathbf{N} \frac{\partial A_z}{\partial x} v_x + \mathbf{N} \frac{\partial A_z}{\partial y} v_y \right) dx dy \\ & = \iint_{\Omega_{magnet}} \frac{1}{\mu} \left( B_{r,x} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} - B_{r,y} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \right) dx dy \end{aligned} \quad (3)$$

여기서  $\mathbf{N}$  은 형상함수를 나타내며,  $v_x$  와  $v_y$  는 각각 움직이는 전도체( $\Omega_{mover}$ )의 x와 y 방향의 운동속도를 가리킨다. 또한  $B_{r,x}$  와  $B_{r,y}$  는 영구자석( $\Omega_{magnet}$ )의 x와 y 방향의 잔류자속밀도를 표시한다. 식 (3)에서 강성행렬은 좌변의 라플라시안(Laplacian) 항과 대류항으로 구성되며, 힘 벡터는 영구자석에 의한 잔류자속밀도에 의해 구성된다. 식 (3)이 일반적인 유한

요소해석 구성식과 다른 점은 강성행렬이 대류항으로 인해 비대칭성을 갖는다는 점이다. 따라서 보조 변수법을 이용한 민감도 해석 시에 주의가 요구된다.

또한 해석 과정에서 대류항은 전도성 재료 내의 진동하는 가상해(spurious solution)를 유발하는 원인이 된다. 이러한 해의 떨림 현상은 Peclet number  $\alpha$  가 다음과 같은 조건을 위반할 때 발생하는 것으로 알려져 있다.<sup>(5)</sup>

$$\alpha = \mu \sigma v L < 2 \quad (4)$$

여기서  $\mu$  는 전도성 재료의 자기투과율이고,  $L$  은 운동방향의 유한요소 크기이다. 전도성 재료가 높은 투과율과 도전율을 가질 경우, 운동 속도가 작더라도 식 (4)의 조건을 만족시키기 위해서는 매우 조밀한 요소망(mesh size)이 필요하다. 이러한 문제를 해결하기 위해서 일반적으로 상류해법(upwind scheme)이 사용되며, 본 연구에서는 Hughes<sup>(6)</sup>에 의해 제안된 방법을 이용하고자 한다. Hughes는 대류항에 의한 강성행렬  $\mathbf{K}_{convec}^e$  의 가우시안(Gaussian) 수치 적분에서 적분점의 위치를 운동 방향으로 편향시킴으로써 해의 진동을 억제하였다. 본 연구에서는 전도성 재료의 x방향 운동을 가정하기 때문에  $\mathbf{K}_{convec}^e$  는 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{K}_{convec}^e = \sum_m \sigma v_x \frac{\partial N(\xi^*, \eta_m)}{\partial x} N(\xi^*, \eta_m) J W \quad (5)$$

여기서  $(\xi^*, \eta_m)$  는 적분점을 가리키며,  $J$  와  $W$  는 각각 자코비안(Jacobian)의 행렬식(determinant)과 가우시안 적분의 가중치(weighting factor)를 나타낸다.  $\xi^*$  의 위치는 다음 식과 같이 정의된다.<sup>(6)</sup>

$$\xi^* = \coth \alpha - 1/\alpha \quad (6)$$

여기서  $\alpha$  는 식 (4)에서의 Peclet number이다.

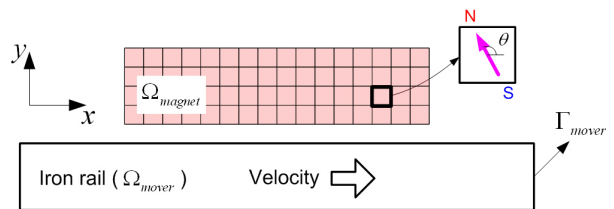


Fig. 1 Schematic diagram of the Eddy current brake system

### 3. 최적화 문제의 정의

관심 모델은 Fig. 1과 같이 철(iron)로 이루어진 레일과 수십 개의 영구자석으로 구성된 단순한 와전류 브레이크 시스템이다. 그림에서 레일이 +x 방향으로 움직인다고 가정하면 와전류에 의해 발생하는 제동력은 -x 방향으로 작용한다. 설계변수는 설계영역을 구성하는 각 영구자석들의 자화방향(magnetization direction)으로 그림에서와 같이  $\theta$ 로 표현된다. 따라서 주어진 최적화 문제는 설계영역내의 제동력을 극대화하는  $\theta$ 의 분포를 찾는 문제로, 위상최적설계<sup>(7)</sup>에서와 같이 유한 요소들의 밀도(density) 분포를 최적화하는 문제와 유사하다고 볼 수 있다. 그러나 차이점도 존재한다. 위상최적화는 설계 변수인 밀도의 중간값(gray scale)을 피하기 위한 노력이 요구되지만, 본 연구의 경우에는 설계변수의 중간값이 반드시 필요하다.

또한 본 연구의 최적화 문제는 초기조건에 의존적이다. 위상최적화 문제의 경우, 부피 제한조건에 해당되는 밀도가 전체 설계영역에 전체에 동일하게 설정되는 것이 일반적이며, 그 결과는 초기조건에 큰 영향을 받지 않는다. 그러나 본 연구와 같이 설계영역 외부에 전자기원이 존재하지 않고 오직 설계영역 내의 영구 자석에 의해서 시스템의 자속(magnetic flux)이 형성되는 경우, 초기의 자화 방향이 최적화 결과에 많은 영향을 미친다.

#### 3.1 잔류자속밀도의 정의

최적화 문제를 정식화하기 위해서는 우선, 영구자석의 성질을 나타내는 잔류자속밀도와 설계변수의 관계식을 정의해야 한다. 본 연구에서는 직교좌표계를 사용하기 때문에 x와 y 방향의 잔류자속 밀도를 다음과 같이 정의한다.

$$B_{r,x}^e = \bar{B}_r \cos \theta, \quad B_{r,y}^e = \bar{B}_r \sin \theta \quad \theta \in [0, 4\pi] \quad (7)$$

여기서  $\bar{B}_r$ 은 사용되는 자석의 잔류자속밀도로 본 연구에서는  $B_r = 1.35T$ 인 네오디뮴(Neodymium) 계열의 자석(Nd-Fe-B)을 가정한다.

식 (7)에서 설계 변수  $\theta$ 는 0에서  $4\pi$ 까지의 값을 갖도록 설정된다. 잔류자속밀도는  $\theta$ 에 따라 주기적인 값을 갖기 때문에, 만약  $\theta \in [0, 2\pi]$ 로 설정될 경우  $\theta = 0$  혹은  $\theta = 2\pi$  부근에서 민감도에 따른  $\theta$ 의 원활한 업데이트가 어려울 수 있다. 따라서  $\theta$ 의 범위를 넓게 설정하고, 초기값을 상한( $4\pi$ )과 하한(0)의 중간값 부근( $\pi \sim 3\pi$ )에서 설정하

면 안정적인 최적화 문제의 수렴성을 확보할 수 있다. 또한 주어진  $\theta \in [0, 4\pi]$ 보다 범위를 더 넓게 설정하더라도 최적화 결과나 수렴성에 차이가 발생하지 않는다.

#### 3.2 최적화 문제의 정식화

본 연구에서 와전류 브레이크의 설계 목적은 와전류에 의해 발생하는 제동력의 최대화이며, 최적화 문제는 다음과 같이 정의된다.

$$\text{Min: } \Phi(\theta) = \frac{1}{2\mu_0 \Gamma_{mover}} \iint \left[ (B_x^2 - B_y^2) \hat{\mathbf{n}}_x + 2B_x B_y \hat{\mathbf{n}}_y \right] dl \quad (8)$$

$$\text{s.t.: } 0 \leq \theta_i \leq 4\pi, \quad i: 1 \text{ to } N_e$$

여기서  $N_e$ 는 설계영역 내의 요소 개수이다. 제동력은 맥스웰 응력법(Maxwell stress tensor method)<sup>(8)</sup>에 의해 레일의 둘레( $\Gamma_{mover}$ )를 적분함으로써 계산되며,  $\hat{\mathbf{n}}_x$ 와  $\hat{\mathbf{n}}_y$ 는 각각 x와 y 방향의 단위외향벡터(outward unit normal vector)이다. Fig. 1에서 보듯이 레일이 +x 방향으로 이동한다고 가정하였기 때문에 +x 방향 자기력을 최소화함으로써 제동력을 극대화할 수 있다.

#### 3.3 설계 민감도의 계산

목적함수  $\Phi$ 는 벡터포텐셜  $A_z$ 의 음함수로 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{d\Phi}{d\theta_i} = \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{A}_z} \right]^T \frac{\partial \mathbf{A}_z}{\partial \theta_i} \quad (9)$$

여기서  $\partial \mathbf{A}_z / \partial \theta_i$ 은 유한요소해석의 선형 방정식 ( $\mathbf{K}\mathbf{A}_z = \mathbf{F}$ )으로부터 계산된다.

$$\frac{d\mathbf{A}_z}{d\theta_i} = \mathbf{K}^{-1} \frac{d\mathbf{F}}{d\theta_i} \quad (10)$$

식 (10)을 식 (9)에 대입하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{d\Phi}{d\theta_i} = \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{A}_z} \right]^T \mathbf{K}^{-1} \frac{d\mathbf{F}}{d\theta_i} \quad (11)$$

일반적으로 보조변수법<sup>(4)</sup>에서는  $\partial \mathbf{A}_z / \partial \theta_i$ 의 직접적인 계산을 피하기 위하여  $\mathbf{K}\boldsymbol{\lambda} = \partial \Phi / \partial \mathbf{A}_z$ 를 만족하는 보조변수  $\boldsymbol{\lambda}$ 을 사용한다. 그러나 와전류 브레이크의 해석에서는 강성행렬의 비대칭성을 고려

하여  $\mathbf{K}^T \boldsymbol{\lambda} = \partial \Phi / \partial \mathbf{A}_z$  을 만족하는 보조변수를 이용하여  $\partial \Phi / \partial \mathbf{A}_z$  은 식 (8)로부터 다음과 같이 계산된다.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{A}_z} = -\frac{1}{\mu_0} \int_{\Gamma_{iron}} \left[ \left( B_x \frac{\partial B_x}{\partial \mathbf{A}_z} - B_y \frac{\partial B_y}{\partial \mathbf{A}_z} \right) \hat{\mathbf{n}}_x + \left( B_y \frac{\partial B_x}{\partial \mathbf{A}_z} + B_x \frac{\partial B_y}{\partial \mathbf{A}_z} \right) \hat{\mathbf{n}}_y \right] dl \quad (12)$$

최종적으로 목적함수의 민감도는 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{d\Phi}{d\theta_i} = \boldsymbol{\lambda}^T \frac{d\mathbf{F}}{d\theta_i} \quad (13)$$

#### 4. 최적화 예제

본 연구의 자기장 해석은 쌍선형(bilinear) 형상함수의 4절점 요소를 이용한 2차원 선형 유한요소 해석을 통해 이루어지며, 설계변수의 업데이트는 심플렉스법(simplex)을 이용한 순차선형계획법(4)을 기반으로 이루어진다. 설계영역은  $6 \times 24$ 개의 유한요소로 이루어지며, 레일의 상대투과율과 전도도는 각각 4000과  $1.12 \times 10^7 S/m$ 으로 설정된다. 또한 레일의 +x 방향으로의 운동속도는  $0.05 m/s$ 이다. Fig. 2는 초기모델의 자속 분포를 나타낸다. 자석들의 자화방향은 모두 +y 방향으로 동일하며, 이때 와전류에 의해 발생하는 제동력은  $-38.77 N/m$ 이다.

Fig. 3은 +x 방향의 초기자화조건에 대한 최적화 결과이다. 최적화 과정은 Fig. 3(a)에서 보듯이 안정된 수렴성을 보이며, 최적화된 자화배열은 Fig. 3(b)에 나타난다. 대부분의 설계영역들은 서로 다른 자화방향으로 최적화되었지만, 자속은 전체적으로 일정한 흐름의 양상을 보여주고 있다. 흥미로운 사실은 이 자석배열을 단순화시키면 그림에

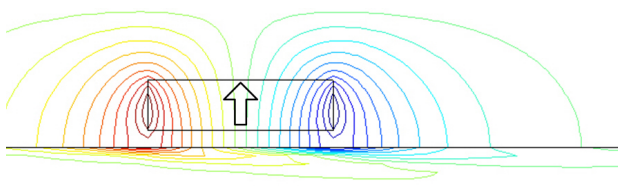
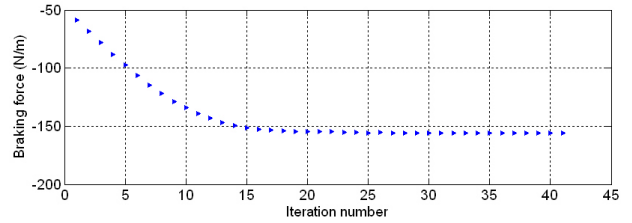
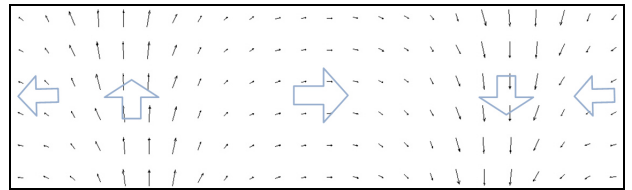


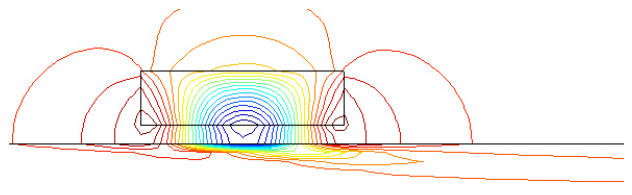
Fig. 2 Magnetic flux line of the initial model (braking force:  $-38.77 N/m$ )



(a) Convergence history

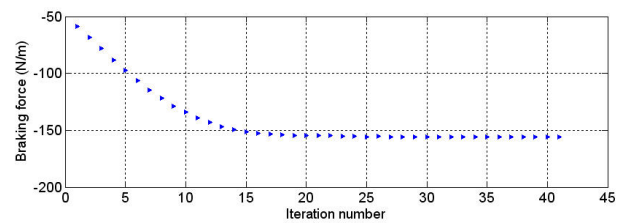


(b) Optimized magnetization

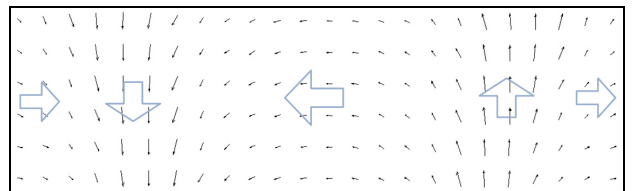


(c) Magnetic flux line plot

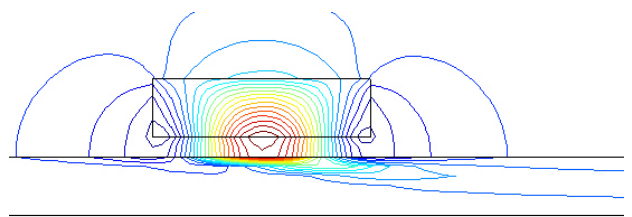
Fig. 3 Optimization results with the initial magnetization of +x direction (braking force:  $-155.87 N/m$ )



(a) Convergence history

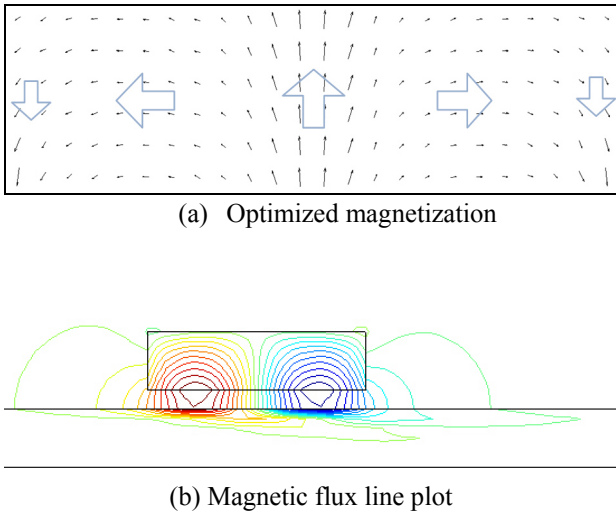


(b) Optimized magnetization



(c) Magnetic flux line plot

Fig. 4 Optimization results with the initial magnetization of -x direction (braking force:  $-155.87 N/m$ )



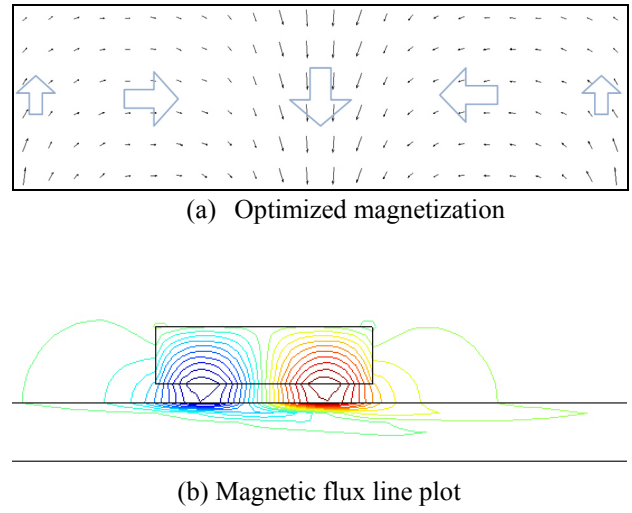
**Fig. 5** Optimization results with the initial magnetization of  $+y$  direction (braking force:  $-158.03 \text{ N/m}$ )

표시되었듯이 ‘ $\leftarrow\uparrow\rightarrow\downarrow\leftarrow$ ’의 할바(Halbach) 영구자석<sup>(2,9,10)</sup>과 유사하다는 점이다. 할바 배열은, 한 쪽 면에서 발생하는 자기장은 증대되고 다른 쪽 면의 자기장은 상쇄되는 자석배열로 ‘ $\uparrow\rightarrow\downarrow\leftarrow$ ’의 순서로 배열되는 자석을 가리킨다. Fig. 3(c)에서 보듯이 레일 쪽을 향한 면으로 자기장이 증대된 반면 다른 쪽 면에서는 자속의 흐름을 발견하기 어렵다. 이때의 제동력은  $-155.87 \text{ N/m}$ 로 초기 모델의 약 4배에 해당되는 힘이다.

앞 장에서 설명했듯이 본 연구의 최적화 문제는 초기자화조건에 영향을 받기 때문에, 다른 초기조건들( $-x, +y, -y$  방향)에 대한 최적화 결과도 살펴볼 필요가 있다. Figs. 4, 5, 6은 각각  $-x, +y, -y$  방향의 자화조건에 대한 최적화된 자화패턴과 자속의 분포를 나타낸다. 모든 최적화 결과들은 예외없이 할바자석과 유사한 자화패턴을 보이며 설계영역의 중앙부분에는 항상 초기에 부여된 자화방향이 나타남을 확인할 수 있다.

특히  $-x$  방향의 초기조건에 대한 최적화 결과 (Fig. 4(b))는  $+x$  방향 결과와 정확히 반대이며, 그 힘은  $-155.87 \text{ N/m}$ 로 동일하다. 그리고 수렴과정 또한 일치한다. 마찬가지로  $+y$ 와  $-y$  자화방향에 대한 결과는 Figs. 5와 6에서 보듯이 자속의 방향만 반대일 뿐 제동력은 서로 일치한다.

$\pm y$  방향 초기조건에 의한 제동력은  $-158.03 \text{ N/m}$ 로  $\pm x$  방향의  $-155.87 \text{ N/m}$ 보다 1.39% 더 크다. 이러한 제동력의 차이는 자속분포에서 그 원인을 찾을 수 있다.  $\pm x$  방향의 초기자화조건에 대한 자속분포도 Figs. 3(c)와 4(c)를 보면,  $\pm y$  방향의 Figs. 5(b)와 6(b)와 비교해서 자석의 양끝단과



**Fig. 6** Optimization results with the initial magnetization of  $-y$  direction (braking force:  $-158.03 \text{ N/m}$ )

상단에서 좀 더 많은 자속의 누설이 발생하고 있음을 확인할 수 있다. 설계영역의 양끝단을  $y$  방향으로 자화된 자석으로 배열할 경우, 자속의 대부분은 바로 레일로 흘러들어가 설계영역의 상단부 및 좌우측에서 자속의 누설이 거의 발생하지 않는다. 결론적으로 할바자석의 패턴을 따르면서 양끝단에  $y$  방향의 자화패턴을 갖는 자석배열이 와전류 브레이크의 제동력을 최대화시키는 영구자석배열이라 할 수 있다.

### 5. 결론

영구자석 방식의 와전류 브레이크의 제동력을 향상시키기 위하여 자석배열을 최적화하였다. 설계영역 내 자석들의 자화방향을 설계변수로 설정하였으며, 정의된 최적화 문제가 초기자화조건에 영향을 받기 때문에  $+x, -x, +y, -y$ 의 네 방향의 초기조건에 대해서 각각 최적화를 수행해 결과를 살펴보았다. 최적화된 결과는 초기조건에 따라 조금씩 다른 자화패턴을 보이지만, 모든 자석배열은 예외없이 할바자석과 동일하였다. 특히 양끝단이  $y$  방향의 자석으로 배열된 경우, 누설자속이 최소화되면서 큰 제동력이 발생하였다.

### 후기

이 논문은 2008년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 수행된 연구임(KRF-2008-313-D00026).

## 참고문헌

- (1) Cho, S. H., Kim, Y. Y. and Yoo, J., 2004, "Topology Design Optimization of a Magnetic System Consisting of Permanent Magnets and Yokes and Its Application to the Bias Magnet System of a Magnetostrictive Sensor," *Transactions of the KSME A.*, Vol. 28, No. 11, pp. 1703~1710.
- (2) Choi, J. S. and Yoo, J., 2008, "Design of the Halbach Magnet Array Based on Optimization Techniques," *IEEE Trans. Magn.*, Vol. 44, No. 10, pp. 2361~2366.
- (3) Bastos, J. P. A. and Sadowski, N., 2003, *Electromagnetic Modeling by Finite Element Methods*, Marcel Dekker, Inc., New York.
- (4) Haftka, R. T. and Gürdal, Z., 1992, *Elements of Structural Optimization*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- (5) Ida, N., 1988, "Modeling of Velocity Effects in Eddy Current Applications," *Journal of Applied Physics*, Vol. 63, No. 8, pp. 3007~3009.
- (6) Hughes, T. J. R., 1978, "A Simple Scheme for Developing 'Upwind' Finite Elements," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 12, pp. 1359~1365.
- (7) Bendsøe, M. P. and Kikuchi, N., 1988, "Generation Optimal Topologies in Structural Design Using a Homogenization Method," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 71, No. 6, pp. 197~224.
- (8) Salon, S. J., 1995, *Finite Element Analysis of Electrical Machines*, Kluwer Academic Publishers, Norwell.
- (9) Mallinson, J. C., 1973, "One-Sided Fluxes-a Magnetic Curiosity?," *IEEE Trans. Magn.*, Vol. 9, No. 4, pp. 678~682.
- (10) Halbach, K., 1980, "Design of Permanent Multipole Magnets with Oriented Rare Earth Cobalt Material," *Nucl. Instrum. Methods*, Vol. 169, pp. 1~10.