

## 복합 추세를 가지는 수리가능 시스템의 고장 데이터 모형화에 관한 연구

문병민 · 배석주

한양대학교 산업공학과  
서울 성동구 행당동 17 한양대학교

## Research for Modeling the Failure Data for a Repairable System with Non-monotonic Trend

Byeong Min Mun · Suk Joo Bae

Hanyang University Department of Industrial Engineering  
Hanyang Univ., 17 haengdang-dong seongdong-gu, SEOUL, KOREA.

### Abstract

The power law process model the Rate of occurrence of failures(ROCOF) with monotonic trend during the operating time. However, the power law process is inappropriate when a non-monotonic trend in the failure data is observed. In this paper we deals with the reliability modeling of the failure process of large and complex repairable system whose rate of occurrence of failures shows the non-monotonic trend. We suggest a sectional model and a change-point test based on the Schwarz information criterion(SIC) to describe the non-monotonic trend. Maximum likelihood is also suggested to estimate parameters of sectional model. The suggested methods are applied to field data from an repairable system.

Key Word : Change-point, Non-homogeneous poisson process, Non-monotonic trend,  
Power law process, Repairable system, Sectional model

## 1. 서론

수리가능 시스템(Repairable system)이란 고장이 발생하였을 때, 고장이 난 부분의 수리나 교체를 통하여 운용 가능하게 하는 것을 말한다. 수리가능 시스템의 예로는 자동차, 비행기, 컴퓨터 등이 있으며, 좋은 제품의 생산과 설계를 위해서는 꼭 필요한 분야이다. 오늘날 대부분의 시스템은 복잡한 수리가능 시스템으로 이루어져 있기 때문에 최적 비용을 고려하여 적절한 정비계획을 수립하는 것은 난해한 문제이다. 이러한 문제를 해결하기 위하여 신뢰성 이론에 기반을 둔 체계적인 분석방법을 도입함으로써 시스템의 신뢰도를 정확하게 예측할 뿐만 아니라 시스템의 중단 없는 가동을 위한 효율적인 정비정책(Maintenance policy)을 수립하는 것이 큰 이슈가 되고 있다.

수리가능 시스템에 대한 최적 정비계획문제에서 주 관심사는 고장발생률(Rate of occurrence of failures)의 추세(Trend)를 파악하여 어느 시점에 수리나 교체를 실시할지에 대한 의사결정 문제이다. 이러한 수리가능 시스템의 고장발생률의 추세를 모형화하는데 Crow(1974)가 제안한 Power Law Process가 많이 사용된다. Power Law Process는 형상 모수(Shape parameter), 척도 모수(Scale parameter) 등을 통해 고장발생률이 일정하지 않은 단조 추세(Monotonic trend)를 가지는 수리가능 시스템의 개선(Improving) 또는 악화(Deteriorating)와 같은 고장 패턴을 모형화 할 수 있다. 하지만 현실적인 문제에서 수리가능 시스템이 고장발생률이 일정한 단조 추세만을 가지지는 않는다. 많은 고장 모드를 가지는 크고 복잡한 수리가능 시스템에서 단조 추세보다는 다양한 요인의 영향으로 인해 복합 추세(Non-monotonic trend)를 가지는 경우가 더 빈번하며 기존의 Power Law Process로는 복합 추세를 모형화 할 수 없다. 이와 같이, 단조 추세는 Power Law Process 등을 통하여 수리가능 시스템의 개선 또는 악화와 같은 고장 패턴을 모형화 할 수 있으며 많은 연구가 이루어진 상태이다. 하지만 복합 추세는 Power Law Process 등을 통하여 설명이 불가능하며 연구가 미비한 상태라서 복합 추세를 모형화 할 필요성이 인식되고 있는 실정이다.

이에 대해 Pulcini(2001)는 복합 추세를 모형화 하기 위하여 Superposed Power Law Process Model(Superposed PLP Model)을 제안하였다. Superposed PLP Model은 수리가능 시스템에서 고장발생률이 감소하다가 증가하는 복합 추세를 모형화 할 수 있음을 기존문헌을 통해 파악할 수 있다. 하지만 Superposed PLP Model은 고장발생률이 육조곡선 형태 또는 증가하다가 감소하는 복합 추세를 모형화하는데 한계를 가지고 있다.

본 연구에서는 다양한 복합 추세를 모형화 할 수 있는 Sectional Model을 제안하고자 한다. 또한 최우추정법을 사용하여 Sectional Model의 모수를 추정하였으며 고장발생률이 일정하지 않은 비동질 포아송 프로세스(Non-homogeneous Poisson Process)를 가정한 SIC(Schwarz Information Criteria)를 통한 변화점 검정 방법을 제안하고자 한다. 마지막으로 제안된 모델과 방법들을 실제 수리가능 시스템의 고장 데이터에 적용시켰다.

## 2. 본론

### 2.1 Sectional Model

만약 수리가능 시스템이 다양한 요인의 영향으로 인해 두 가지의 다른 고장 패턴을 가지고 있다면 수리가능 시스템의 전체 고장 패턴을 Sectional Model로 모형화 할 수 있다. Sectional Model은 다음과 같은 고장발생률을 가지는 비동질 포아송 프로세스(Non-homogeneous poisson process)이다.

$$\lambda_1(t) = \left(\frac{\beta_1}{\theta_1}\right) \left(\frac{t}{\theta_1}\right)^{\beta_1-1}, \quad 0 < t \leq t_k$$

$$\lambda_2(t) = \left(\frac{\beta_2}{\theta_2}\right) \left(\frac{t}{\theta_2}\right)^{\beta_2-1}, \quad t_k < t \leq t_n$$
(1)

여기서  $t_k$ 는 고장발생률이 변하는 시점인 변화점(Change point)이며  $\theta_j (j=1,2)$ 는 척도 모수,  $\beta_j (j=1,2)$ 는 형상 모수이다. Sectional Model은 변화점  $t_k$ 를 시점으로 복합 추세를 두 개의 독립적인 단조 추세로 나누어 모형화 한다. 다시 말해,  $t_k$ 를 시점으로 앞의 구간은 모수가  $\theta_1, \beta_1$ 인  $\lambda_1(t)$ 으로 모형화를 하고 뒤의 구간은 모수가  $\theta_2, \beta_2$ 인  $\lambda_2(t)$ 로 모형화를 한다. 이 때의 형상모수의 값에 따라 고장발생률은 다음과 같이 변한다.

- 1)  $\beta_j < 1 (j=1,2)$ 이면 시간이 경과함에 따라 고장발생률이 감소한다.
- 2)  $\beta_j = 1 (j=1,2)$ 이면 시간의 경과와 무관하게 고장발생률이 일정하다.
- 3)  $\beta_j > 1 (j=1,2)$ 이면 시간이 경과함에 따라 고장발생률이 증가한다.

이 때의  $t$ 시간동안 발생하는 기대고장의수(The expected number of failures)는 다음과 같다.

$$A_1(t) = \left(\frac{t}{\theta_1}\right)^{\beta_1}, \quad 0 < t \leq t_k$$

$$A_2(t) = \left(\frac{t_k}{\theta_1}\right)^{\beta_1} + \left[ \left(\frac{t}{\theta_2}\right)^{\beta_2} - \left(\frac{t_k}{\theta_2}\right)^{\beta_2} \right], \quad t_k < t \leq t_n$$
(2)

첫 번째 구간의  $A_1(t)$ 은  $\lambda_1(t)$ 을  $(0, t]$  구간으로 적분을 하고 두 번째 구간의  $A_2(t)$ 는  $\lambda_1(t)$ 을  $(0, t_k]$  구간,  $\lambda_2(t)$ 를  $(t_k, t]$  구간으로 적분을 하면 된다.

만약 수리가능 시스템이 다양한 요인의 영향으로 인해 세 가지의 다른 고장 패턴을 가지고 있다면, Sectional Model은 다음과 같은 고장발생률을 가지는 비동질 포아송 프로세스이다.

$$\begin{aligned}\lambda_1(t) &= \left(\frac{\beta_1}{\theta_1}\right)\left(\frac{t}{\theta_1}\right)^{\beta_1-1}, \quad 0 < t \leq t_k \\ \lambda_2(t) &= \left(\frac{\beta_2}{\theta_2}\right)\left(\frac{t}{\theta_2}\right)^{\beta_2-1}, \quad t_k < t \leq t_m \\ \lambda_3(t) &= \left(\frac{\beta_3}{\theta_3}\right)\left(\frac{t}{\theta_3}\right)^{\beta_3-1}, \quad t_m < t \leq t_n\end{aligned}\quad (3)$$

여기서  $\theta_j(j=1, 2, 3)$ 는 척도 모수,  $\beta_j(j=1, 2, 3)$ 는 형상 모수이며  $t_k, t_m$ 은 고장발생률이 변하는 시점인 변화점이고 이 시점을 전후로 하여 고장발생률이 다르다. 이 때의  $t$ 시간동안 발생하는 기대고장의수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}A_1(t) &= \left(\frac{t}{\theta_1}\right)^{\beta_1}, \quad 0 < t \leq t_k \\ A_2(t) &= \left(\frac{t_k}{\theta_1}\right)^{\beta_1} + \left[\left(\frac{t}{\theta_2}\right)^{\beta_2} - \left(\frac{t_k}{\theta_2}\right)^{\beta_2}\right], \quad t_k < t \leq t_m \\ A_3(t) &= \left(\frac{t_k}{\theta_1}\right)^{\beta_1} + \left[\left(\frac{t_m}{\theta_2}\right)^{\beta_2} - \left(\frac{t_k}{\theta_2}\right)^{\beta_2}\right] + \left[\left(\frac{t}{\theta_3}\right)^{\beta_3} - \left(\frac{t_m}{\theta_3}\right)^{\beta_3}\right], \quad t_m < t \leq t_n\end{aligned}\quad (4)$$

첫 번째 구간의  $A_1(t)$ 은  $\lambda_1(t)$ 을  $(0, t]$  구간으로 적분을 하고 두 번째 구간의  $A_2(t)$ 는  $\lambda_1(t)$ 을  $(0, t_k]$  구간,  $\lambda_2(t)$ 를  $(t_k, t]$  구간으로 적분을 하면 된다. 또한  $A_3(t)$ 은  $\lambda_1(t)$ 을  $(0, t_k]$  구간,  $\lambda_2(t)$ 를  $(t_k, t_m]$  구간,  $\lambda_3(t)$ 을  $(t_m, t]$  구간으로 적분을 하면 된다.

## 2.2 모수 추정

Sectional Model을 모형화 하기 위해서는 모수를 추정하여야 한다. 모수를 추정하기 위하여 최우추정법을 사용하였다. 최우추정법으로  $\theta_1, \beta_1$ 은 기존의 방법으로도 추정이 가능하지만  $\theta_j, \beta_j(j=2, 3)$ 는 새로운 방법으로 추정을 하여야한다. 복합 추세를 가지는 수리가능 시스템에서 변화점이 존재할 때  $j(j=1, 2, 3)$  번째 구간의 우도 함수(Likelihood function)는 다음과 같다.

$$L = \prod_{i=k+1}^n \left[ \frac{\beta_j}{\theta_j} \left( \frac{t_i}{\theta_j} \right)^{\beta_j-1} \right] \exp \left[ - \int_{t_k}^{t_n} \frac{\beta_j}{\theta_j} \left( \frac{x}{\theta_j} \right)^{\beta_j-1} dx \right], \quad j=1, 2, 3 \quad (5)$$

양변에 로그를 취하여 로그 우도 함수(Log-likelihood Function)를 구하면 다음과 같다.

$$\ell = \sum_{i=k+1}^n \ln \left[ \frac{\beta_j}{\theta_j} \left( \frac{t_i}{\theta_j} \right)^{\beta_j-1} \right] - \left[ \left( \frac{t_n}{\theta_j} \right)^{\beta_j} - \left( \frac{t_k}{\theta_j} \right)^{\beta_j} \right], \quad j=1, 2, 3 \quad (6)$$

로그우도 함수를  $\theta_j(j=1, 2, 3)$ 에 대하여 편미분을 한 후 0과 같다고 놓고  $\theta_j(j=1, 2, 3)$ 에 대하여 정리를 하면 다음과 같다.

$$\hat{\theta}_j = \left( \frac{t_n^{\hat{\beta}_j} - t_k^{\hat{\beta}_j}}{n - \hat{k}} \right)^{\frac{1}{\hat{\beta}_j}}, \quad j=1, 2, 3 \quad (7)$$

또한 로그우도 함수를  $\beta_j(j=1, 2, 3)$ 에 대하여 편미분을 한 후 0과 같다고 놓고  $\beta_j(j=1, 2, 3)$ 에 대하여 정리를 하면 다음과 같다.

$$\hat{\beta}_j = \frac{n - \hat{k}}{n \ln t_n - \hat{k} \ln t_{\hat{k}} - \sum_{i=k+1}^n \ln t_i} \quad (8)$$

첫 번째 구간의 모수는 식 (7)과 (8)에  $k=0$ 을 대입함으로써 추정할 수 있다. 두 번째 구간과 세 번째 구간의 모수는 각각의 변화점을 대입함으로써 추정할 수 있다. 또한 식 (7), (8)에서 변화점  $\hat{k}$ 는 미지(Unknown Parameter)이므로  $\hat{k}$ 를 알고있다는 가정 하에서 각각의 모수를 추정할 수 있다.

### 2.3 SIC(Schwarz Information Criteria)를 통한 변화점 검정

SIC(Schwarz Information Criteria)는 우도 함수에 기반한 정보량 측정 기준이다. 홍민표와 배석주(2009)는 고장 간 발생시간이 일정한 동질 포아송 프로세스를 가정하여 SIC를 통한 변화점 검정을 실시하였다. Sectional Model의 변화점 검정은 고장발생률이 일정하지 않은 비동질 포아송 프로세스를 가정하였으며 변화점 검정을 위한 귀무가설 및 대립가설은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 H_0: \lambda_1(t) &= \dots = \lambda_{R+1}(t) \\
 H_1: \lambda_1(t) &\neq \dots \neq \lambda_{R+1}(t)
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

이때 귀무가설은 변화점이 없고 고장발생률이 일정하지 않은 비동질 포아송 프로세스를 가정하며, 대립가설은 변화점이 R개가 있고 (R+1)개의 구간은 각각 고장발생률이 일정하지 않은 비동질 포아송 프로세스를 가정한다. 이 때의 SIC는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$SIC_k(R) = -2M(R) + (2R+1)\ln n \tag{12}$$

여기서 M(R)은 로그우도 함수이므로 식 (6)을 넣어 계산하면 되고 2R+1은 추정해야 할 모수의 수를 의미한다. 또한 R은 변화점의 개수, k는 변화점의 위치를 의미한다. 이러한 SIC를 통한 변화점 검정의 절차를 살펴보면 다음과 같다.

*Step1.* 변화점의 개수(R)를 가정.

*Step2.*  $SIC_k(R) = \underset{i}{\operatorname{argmin}}(SIC_i(R))$

*Step3.*  $\min\{SIC_k(R), SIC(R=0)\}$

먼저 변화점의 개수가 R개가 있다고 가정한다. 다음으로  $SIC_k(R)$  값을 구하는데 R값은 고정시키고 k값을 변화시킴으로써  $SIC_k(R)$ 이 최소로 되는 값을 찾는다. 마지막으로  $SIC_k(R)$ 과  $SIC(R=0)$ 을 비교하는데  $SIC(R=0)$ 은 변화점이 없을 때의 SIC 값이다. 만약  $SIC_k(R)$ 값이 더 작다면 귀무가설을 기각하여 변화점이 R개이고 각각의 구간은 비동질 포아송 프로세스라고 판단할 수 있고  $SIC(R=0)$ 값이 더 작다면 귀무가설을 채택하여 변화점이 없는 비동질 포아송 프로세스를 가정한다.

## 2.4 실제 데이터 적용

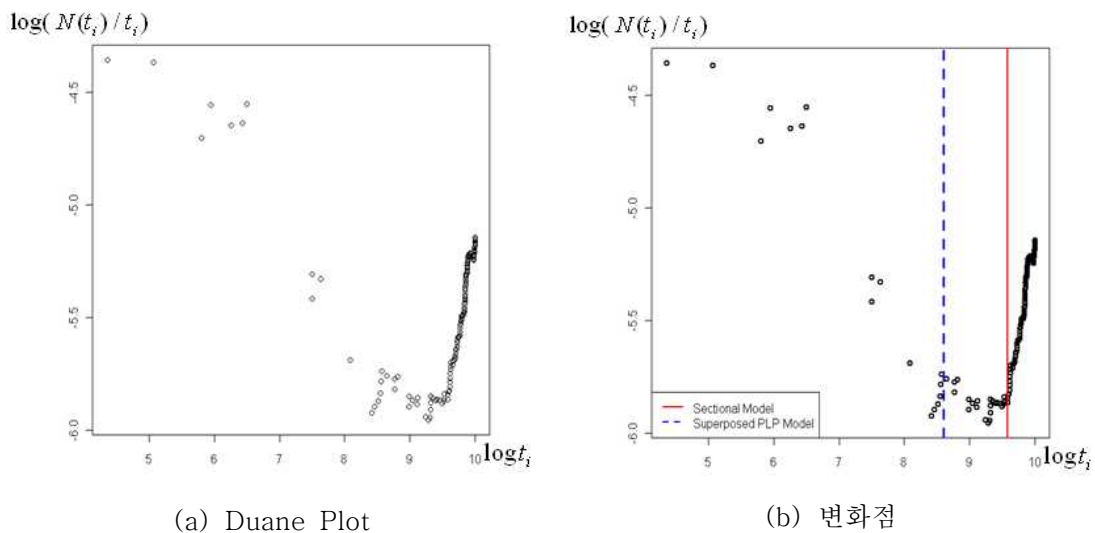
### 2.4.1 Sectional Model과 Superposed PLP Model

실제 데이터를 비동질 포아송 프로세스를 가정한 SIC를 통하여 변화점 검정을 실시한 후 각각의 구간의 모수를 추정하여 Sectional Model에 적용을 하였다. <표 1>은 Coetzee(1996)의 Rear Dump Truck 고장 데이터로 Pulcini(2001)가 Superposed PLP Model을 적용한 데이터이다.

<표 1> Rear Dump Truck 고장 데이터

78	158	331	381	523	620	664	1805	1817	2068	3253
4489	4725	4961	5138	5200	5278	5711	6400	6444	6677	7999
8001	8489	9000	9086	10 262	10 817	11 062	11 082	11 086	11 122	11 534
12 031	12 339	12 733	13 265	13 508	13 673	13 780	14 443	14 501	14 656	14 906
14 983	15 004	15 062	15 072	15 136	15 206	15 247	15 700	15 714	15 972	16 186
16 284	16 329	16 425	16 605	16 723	16 731	16 797	16 859	17 090	17 305	17 484
17 510	17 511	17 536	17 621	17 703	17 809	17 968	17 984	18 175	18 443	18 458
18 667	18 669	18 701	18 723	18 822	18 860	18 922	18 935	18 945	18 960	18 961
18 979	19 013	19 032	19 034	19 169	19 184	19 201	19 416	19 455	19 525	19 595
19 601	19 613	19 643	19 671	19 713	19 785	19 801	19 937	19 990	20 432	20 433
20 434	20 698	21 460	21 543	21 584	21 602	21 645	21 706	21 762	21 867	21 912
21 914	21 937	21 938	21 939	21 951	21 954	21 982				

Rear Dump Truck의 고장 데이터의 추세를 파악하기 위하여 Duane(1964)이 제안한 Duane Plot을 사용하였다. Duane Plot은 수치적 근거를 제공하지 못한다는 단점이 있지만 추세를 시각적으로 파악하기 쉽고 시간이 적게 소요된다는 장점이 있어 많이 사용된다.



<그림 1> Rear Dump Truck 고장 데이터

<그림 1>의 (a)는 Rear Dump Truck 고장 데이터를 Duane Plot을 사용하여 도시화한 그림이다. 보는 바와 같이 고장발생률이 감소하다가 증가하는 복합 추세를 가지고 있고 1개의 변화점을 가지고 있는 것을 알 수 있다. 먼저 비동질 포아송 프로세스를 가정한 변화점 검정을 실시하여 <표 2>와 같은 결과를 얻었다.

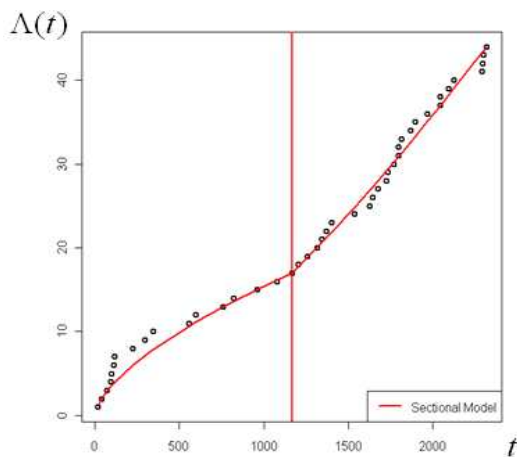
<표 2> 비동질 포아송 프로세스를 가정한 변화점 검정

	$SIC(R=0)$	$SIC(R=1)$	$k$
NHPP 변화점 검정	1555.5906	1522.9137	41

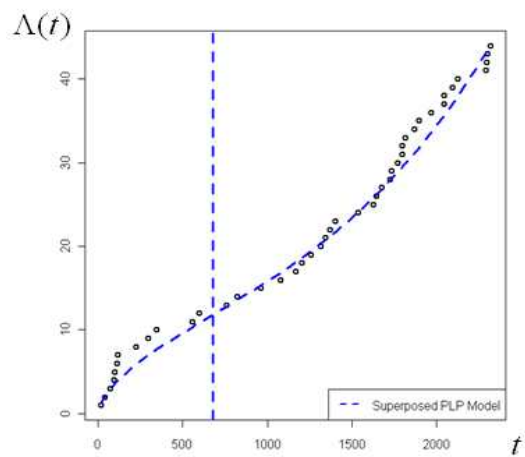
$SIC(R=0)$ 은 변화점이 없을 때의 SIC 값이며  $SIC(R=1)$ 은 변화점이 1개 있을 때의 SIC 값이다.  $SIC(R=1)$ 의 값이  $SIC(R=0)$ 의 값보다 작으므로 귀무가설을 기각하여 변화점이 1개 있고 각각의 구간은 비동질 포아송 프로세스라고 판단할 수 있다. 이 때의 변화점의 위치는  $k=41$ 이다. 즉,  $t_{k=41} = 14443$ 를 시점으로 고장발생률이 변한다고 판단 할 수 있다. <그림 1>의 (b)는 Duane Plot에서 Sectional Model의 변화점과 Pulcini(2001)가 언급한 Superposed PLP Model의 고장발생률이 변하는 시점을 표시한 그림이다. 보는 바와 같이 Sectional Model의 변화점이 Duane Plot의 추세가 변하는 시점과 일치하는 것을 알 수 있다.

<표 3> Sectional Model과 Superposed PLP Model의 모수 추정

	Log-likelihood	$\theta_1$	$\beta_1$	$\theta_2$	$\beta_2$
Sectional Model	-754.1788	166.10	0.83	3658	2.71
Superposed PLP Model	-754.5573	73.02	0.638	7395	4.129



(a) Sectional Model



(b) Superposed PLP Model

<그림 2> Rear Dump Truck 고장 데이터의 모형화



<표 3>은 Superposed PLP Model과 Sectional Model을 적용시켰을 때의 로그우도와 모수의 값이다. 두 개의 모델은 형상 모수의 값이 첫 번째 구간에서는 1보다 작으므로 고장 발생률이 감소하고 두 번째 구간에서는 1보다 큼으로써 고장발생률이 증가한다는 것을 알 수 있다. 또한 로그우도가 Sectional Model이 더 큰 것으로 보아 Rear Dump Truck 고장 데이터를 Superposed PLP Model보다 더 잘 모형화하였다고 판단할 수 있을 것이다. Pulcini(2001)는 <그림 2>의 (a)와 같이 고장발생률이 감소하다가 증가하는 복합 추세를 Superposed PLP Model로 모형화 하였고 <그림 2>의 (b)는 비동질 포아송 프로세스를 가정한 SIC를 통하여 변화점 검정을 실시한 후 각각의 구간의 모수를 추정하여 Sectional Model로 모형화한 그림이다.

### 3. 결론

본 연구에서는 다양한 복합 추세를 모형화 할 수 있는 Sectional Model을 제안하였다. 또한 최우추정법을 사용하여 Sectional Model의 모수를 추정하는 새로운 추정치를 제안하였으며 비동질 포아송 프로세스를 가정한 SIC를 통한 변화점 검정 방법을 제안하였다. Sectional Model은 Superposed PLP Model과 같이 복합 추세를 하나의 연속적인 모델로 모형화 할 수는 없지만 다양한 복합 추세를 모형화 할 수 있으며 변화점이 Duane Plot과 일치한다는 점을 고려하여 변화점을 제대로 추정하였다는 가능성을 높여준다. 또한 Sectional Model은 Closed form으로 모수 추정이 가능하며 실제 데이터의 적용에서 Superposed PLP Model보다 로그우도가 더 크고 기존의 동질 포아송 프로세스를 가정한 변화점 검정 방법보다 SIC 값이 작음으로써 위의 고장 데이터를 더욱 잘 모형화 했다고 할 수 있다. 이 새로운 모델은 분명 여러 복합 추세를 모형화하고 고장발생률이 변화하는 시점을 정확히 판단하여 수리가능 시스템의 신뢰도를 정확하게 예측하고 중단 없는 가동을 위한 효율적인 정비정책을 수립할 수 있을 것이다.

## 참고문헌

- [1] Crow LH(1974). Reliability analysis for complex repairable systems. In: Proschan F, Serfling RJ, editors. Reliability and biometry, SIAM. p.379-410.
- [2] Pulcini G(2001). Modeling the failure data of a repairable equipment with bathtub type failure intensity. Reliability Engineering and System Safety. p209-218.
- [3] 홍민표, 배석주(2009). 수리 가능 발전기 시스템의 고장추세 분석을 위한 변화점 접근방법. 산업경영시스템학회지 제32권 제1호.
- [4] Kumar U, Klefsj  B, Granholm S(1989). Reliability investigation for a fleet of load haul dump machines in a Swedish mine. Reliability Engineering and System Safety. p.341-61.
- [5] Coetzee JL(1996). Reliability degradation and the equipment replacement problem. In: Proc. Int. Conf. of Maintenance Societies (ICOMS-96). Melbourne. Paper 21.
- [6] S. E. Rigdon and A. P. Basu(2000). Statistical methods for the reliability of repairable systems. John Wiley & Sons Inc., New York.