대한수학교육학회지 <학교수학> 제 11 권 제 1 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.11, No.1, 131-145. Mar. 2009

함수의 그래프 표현 및 그래프 해석 지도 가능성 탐색
- 초등학교 5학년을 중심으로 -

이 화 영* · 류 현 아** · 장 경 윤***

본 연구는 초등학교 학생들에게 함수의 그래프 표현 및 해석의 지도가능성을 탐색하기 위하여 설계되었다. 이를 위하여 부분적으로 역동적인 기하 소프트웨어를 이용하는 점진적인 함수 그래프 지도 방법을 고안하여, 초등학교 5학년생 4명을 대상으로 8차시의 수업을 실행하였다. 연구 결과, 아동들은 함수 관계에 대한 개념화, 1차 함수 그래프의 해석, 1차 함수 그래프 기울기의 의미를 인식하고, 기울기에 대한 논의와 실생활과의 관련성을 파악하는 것으로 나타났다. 함으로써 함수의 그래프 표현 및 해석의 지도가 가능함을 알 수 있었다.--삭제) 또한, 아동들은 GSP-선그래프를 통하여 그래프에서의 점과 선의 관계를 시각적으로 명확히 인식하였으며, 함수관계를 그래프로 정확하게 표현하는 데에 있어서 결정적인 역할을 했음을 알 수 있었다.

I. 서 론

그래프는 대응표, 대수식, 언어적 표현, 대응도(diagram) 등과 더불어 대표적인 함수표현 도구이며, 특히 조작 도구로 그 유용성이 널리 알려져 있다. 함수를 그래프로 표현하고 그래프로 표현된 함수의 의미를 해석할 수 있게 하려면 함수와 그래프를 체계적으로 연결하여 지도할 필요가 있다. 즉 함수의 그래프 지도는 단지 그래프를 그리는 방법을 가르치는데 그칠 것이 아니라 그래프 표현의 유용성을 그 발생 과정과 더불어 다룰 필요가 있다. 그러나, 현재의 함수 그래프 교육은 생성된 산물로서 완성된 지식 형태로 함수 개념을 지도하고 있다(송순희, 오정현, 1997). 함수 그래프의 전통적 접근방법에 따르면, 대수식(예: y=2x)을 대응표로 변형할 때에는 계산값으로, 대응표를 그래프로 변형할 때는 몇 개의 주요 거점을 이용하는 방법만을 주로 이용해왔다 (Coulombe & Berenson, 2001). 충분한 고민없이 몇 개의 거점을 찾고 거점을 선으로 잇는 기계적인 방식으로 함수의 그래프 학습을 경험한 학생들은, 거점과 선끼리의 관계를 이해하지 못하며, 이때에 생기는 선분의 기울기의 의미에 대해서도 크게 주의를 기울이지 않는 경향을 보인다.

중학생들도 일차함수의 그래프를 이해하는데 어려움을 겪는 것으로 나타났다(Greenes, Chang & Ben-Chaim, 2007; 안가영 · 권오남, 2002). 중학생 다수가 점과 구간, 기울기와 높이를 혼동하기도 하고, 그래프를 상황에 대한 그림으로 인식하는 등의 오류를 범하고 있으며(안가영 · 권오남, 2002), 직선의 기울기의 의미를 바르게 이해하지 못한다(Greenes 등, 2007). 학생들은 대수적 표현인 방정식으로부터 함수적 표현인 그래프로의 관점 이동에 비해, 그래프에서 방

* 건국대학교 대학원 박사과정(bornapril@empal.com)
** 건국대학교 강사(ryuha29@naver.com)
*** 건국대학교(kchang@konkuk.ac.kr)

정식으로의 관점 이동에 더 어려움을 보인다(안가영 · 권오남, 2002).

우리나라 7차 수학교육과정에서 '함수'용어와 함수의 그래프가 공식적으로 도입되는 것은 중학교 1학년에서이다. 그러나 학생들은 학교 교육에서 중학교 1학년 이전부터 이미 다양한 경로로 그래프에 대한 경험을 갖고 있다.

먼저 초등학교 수학교과에서 학생들은 함수와 그래프에 대한 경험을 한다. 함수식과 함수 관계의 개념과 표현은 초등학교 6학년 '규칙성과 함수' 영역에서, 그래프는 4학년 '확률과 통계' 영역에서 각기 도입된다. 초등학교 6학년의 '규칙성과 함수' 영역에서는 두 수의 관계를 기호 □, △를 사용하여 식으로 나타내기와 표로 나타내기의 두 가지 방식을 다룬다. 그래프는 '확률과 통계' 영역에서 4학년부터 그림그래프, 막대그래프, 꺾은선그래프, 비율그래프 등을 그래프 그리는 방법과 그 해석을 자료의 정리와 표현 방식으로 다룬다. 꺾은선 그래프나 막대그래프처럼 궁극적으로 두 변수 사이의 관계를 표현하는 그래프도 함수와 개념적으로 관련짓지 않고 다루어진다.

뿐만 아니라 학생들은 초등학교 수학교과에서 그래프를 다루기 이전에 과학 등 다른 교과에서 그래프를 접한 경험을 갖고 있다. 과학과에서는 실험 결과의 정리를 위하여 초등학교 3학년에서는 막대그래프, 4학년때 선그래프와 꺾은선 그래프, 5학년때 선그래프, 6학년때 꺾은선 그래프 등을 그리고, 요소들간의 함수 관계를 파악하며, 이를 해석하도록 하고 있다.

본 연구는 초등학교 수학의 '규칙성과 함수'과 '확률과 통계'에서 각각 다루는 '비형식적 함수표현'과 다양한 '그래프 표현'의 이원적 교육과정 구조가 중학교 과정(7-가)에서 함수의 그래프를 다루는 과정과 자연스럽게 연결되고 있지 않으며 그 내용상의 수준차가 상당하다는 인식에서 출발하였다. 또한 직관적 수준에서 그래프를 다루는 타 교과에서의 그래프 경험은 그래프에 관한 잘못된 선입견을 형성하여 장차 수학교과에서 함수의 그래프 학습에 인식론적 장애로 작용할 가능성을 배제하기 어렵다고 판단하였다.

본 연구는 교육과정상 학교급간의 연계성을 고려하여 초등학교 수준에서 함수의 그래프 표현 도입 가능성을 탐색하기 위하여 설계되었다. 이를 위하여 함수관계 특히, 변화하는 양에 초점을 맞춘 관계의 표현 방식 지도방안을 고안하고, 그 적용가능성을 탐색하고자 한다, 더불어, 지필식 교수 환경의 한계점을 보완하기 위하여 과도기적인 그래프 표현의 발전 과정에서 역동적 기하 소프트웨어를 활용할 것이다.

II. 함수와 함수의 표현 방식에 대한 선행 연구

1. 함수 개념의 여러 관점

함수는 역사적으로 점의 변환이나 양 사이의 관계의 암묵적인 아이디어에서 시작되어, 비례, 일반화된 비례, 기하학적 함수, 대수적 함수, 대응적 함수, 관계로서의 함수 등의 개념으로 발달하였다(이종희, 1999). 함수 개념은 순서쌍의 형식적 정의, 두 집합의 특수한 대응, 종속변수, 또는 함수 기계(function machine) 등 다양한 관점에서 생각해 볼 수 있다(Selden & Selden, 1992). 새수학이 대응으로서의 함수를 강조한 데 반하여, 교수학적 현상학의 관점에서는 함수를 물리적, 사회적, 정신적인 '변수'들 사이에 존재하는 '종속'이라는 관련성의 조직 수단으로 본다(박교식, 1992). 우리나라 7차 교육과정에서는 함수 개념을 중학교 수준에서는

‘종속’ 관계로, 고등학교 수준에서는 ‘대응’으로 소개하고 있다. 7-가 단계에서는 함수를 ‘변화하는 두 양 사이의 관계’로 정의하고 있는데, 이는 함수가 독립변수와 종속변수 사이의 역동적인 관계를 보여주는 종속관계로 정의되는 것이다. 또한, ‘변수’에 대한 이전의 정적인 관점과는 차별하여 ‘변화하는 양’을 나타내는 기능을 강조하는 것으로써, 함수의 동적인 역할을 함의하기도 한다.

2. 함수의 동적인 역할

함수를 ‘변화하는 두 양 사이의 관계’라고 보았을 때, 변수의 변화에 따라 함수값이 변하는 역동적 속성을 지니게 된다. NCTM(2000)은 3~8학년의 규칙성, 관계, 함수의 이해에서, 학생들에게 패턴의 구조와 변화 방식을 분석하여 ‘패턴 속의 수학적 관계를 일반화’할 것과 변수를 이용하여 다양한 방식으로 양적 관계를 ‘표현’하고 여러 표현을 서로 ‘관련시키는’ 능력을 요구하고 있다. 특히 변수의 이해와 변수를 사용하여 두 양의 변화를 표현하는 것에 중점을 두고 있으며, 표, 그래프, 언어 표현과 기호 표현을 이용하여 함수와 변화 규칙성을 나타내고 조사하는 문제해결을 강조하였다.

3. 함수 표현의 다양성과 연결성

수학교과에서 표현은 수학적 아이디어의 조직 · 기록 · 의사소통을 위한 핵심 요소이다 (NCTM, 2000). 함수는 대응도, 히스토그램, 그래프, 그림, 수, 도표, 순서쌍, 문자기호, 공식, 사상 등의 여러 다른 표상이 가능하다. 또한, 어떤 문제 상황은 각각 범주로 표현(모델링)할 수 있으며, 또 한 범주의 표현은 다른 범주의 표현으로 변환(해석)이 가능하다(<표 Ⅱ-1>). 수학적 표현 간의 연결성을 인식하고 활용하며, 각각의 수학적 아이디어에 기초한 일관된 전체의 산출, 즉 하나의 함수를 다양한 방식으로 표현할 수 있어야 하고 반대로, 다양한 방식으로 표현된 것을 일관된 하나의 함수로 인식하는 것이 중요하다(NCTM, 2000).

<표 Ⅱ-1> 변수 개념의 변환표(Janvier. C., etc, 1993, p. 92)

모델링 기능

	~으로 / ~에서	그림이나 구두로 기술된 상황	표	그래프	식
해석 기능	그림이나 구두로 기술된 상황		(의미)	(기술적 모델링 또는 스케치)	(분석적 모델링)
	표	읽기		구성하기	맞추기 (Fitting)
	그래프	해석하기	읽어내기		곡선에 맞는 식 구하기
	식	매개 인식	계산하기	스케치하기	

Ⅲ. 함수의 그래프 표현 지도

1. 지도방안의 개발 방향

함수의 그래프 표현을 학생의 자발적 활동과 의사소통을 통해 발생적 방법으로 학습하게 하기 위하여 지도방향의 초점을 다음과 같이 설정하고 자료를 개발하였다.

- 학생 스스로의 표현과 의사소통
- 문맥을 중시한 문제 중심의 활동
- 표현체계의 점진적 발달
- 테크놀러지의 활용

가. 학생스스로의 표현과 의사소통

표현은 수학의 언어이다. (Coulombe & Berenson, 2001). 수학을 함에 있어서 학생들은 좀 더 효과적으로 표현하는 방법을 고민하고 탐구할 필요가 있다. 학생들은 이미 정형화된 표현 방법을 따라 익히기 전에, 스스로 수학적 아이디어를 표현하려는 노력을 기울일 기회를 충분히 가져야 한다. NCTM (2000)도 학생들이 문제를 해결하고 수학적 아이디어를 탐구하면서 만들어내는 독특한 표현들은 학생들에게 문제의 이해와 해결, 해결 방법에 대한 의사소통에 중요한 역할을 할 수 있다며, 개개인의 자유로운 표현의 중요성을 제시하였다.

따라서, 학생들은 전통적인 그래프 구성 방법을 교사에 의해 일방적으로 전수받기보다는, 함수 상황을 스스로 다양하게 표현할 기회를 가질 필요가 있다.

이와 더불어, 학생 상호간, 학생과 교사와의 의사소통도 매우 중요하다. 학생들끼리의 의사소통은 새로운 수학적 아이디어를 얻고 자신의 아이디어를 비교할 수 있게 하며, 교사와의 의사소통은 자신의 아이디어를 정교화하거나 수정할 기회를 제공하기 때문이다.

나. 문제중심의 함수 표현 학습

함수의 기호 표현을 표로 바꾸고, 그 후 표를 그래프로 바꾸는 것이 전통적인 대수 학습 방식이다. 이러한 전통적인 접근에서의 잃어버린 조각은 익숙한 문맥에서 대수식이나 또는 다른 표현으로 변형하는 것이다(Coulombe & Berenson, 2001).

반면, 문제 중심의 접근에서는, 학생들은 저축이나 다이어트 등 일상적인 시나리오를 해석한다. 학생들은 잘 알려진 다양한 표현으로 초기 표현을 시작한다. 문제 중심접근은 학생들에게 그래프 구성과 해석, 자료 생성, 패턴 찾기, 그 밖의 해석의 과정을 위한 기회를 제공한다(Janvier, 1987). 즉, 전통적 접근 방식에서는 식, 표, 그래프 상호간의 변형에 중점을 둔다면, 문제 중심 접근에서는 문제의 문맥을 중시하고 이의 해석에 집중하는 경향이 있다.

<표 Ⅲ-1> 학생들의 함수 이해 향상을 위한 두 가지 접근의 비교(Coulombe & Berenson, 2001)

	~에서	~으로	변형 과정
전통적 접근	기호	표	계산값
	표	그래프	거점
	~에서	~으로	해석 과정
문제 중심 접근	그래프	언어	그래프 해석
	표	언어	패턴의 언어적 기술
	말	그래프	질적인 그래프 구성
	그래프	표	자료 생성
	표	기호	패턴 찾기

본 연구에서는 문제 중심의 대수 표현 학습에서와 같이, 학생들이 자유롭게 자신의 초기 표현을 할 수 있는 학습의 계열을 구성하였다. 예컨대, 일상적인 문제 상황을 주고, 이를 대응표, 순서쌍, 대수식을 포함하여 기호, 그림 등 일반적으로 잘 알려진 다양하고 폭넓은 초기 표현을 하도록 하고, 문제 상황의 해석을 중시하는 것이다.

다. 점진적 표현 체계

Goldin & Shteingold (2001)에 따르면, 수학적 표현은 독립적으로 이해될 수 없다. 수식이나 교구의 조작, 데카르트 평면 그래프는 오직 그것의 의미와 약속 사항이 확립된 체계 내의 일부로써 이해될 수 있다.

NCTM(2000)에서도, 함수에서 변수의 의미와 용법에 대하여 이해하려면, 언어, 표, 그래프

표현과 관련시키면서 점진적으로 발전시켜야 한다고 제시하고 있다.

따라서, 본 연구에서는 수학적 표현의 속성과 구성주의적 학습 원리에 따라, 함수의 그래프 표현을 초기 개념 및 표현에서부터 이른바 '형식화'해 나가는 방향으로 전개하였다.

라. Technology의 이용

함수를 '종속' 관계를 나타내는 수단이라고 볼 때, 한 변수의 변화에 다른 변수가 따라 변화하는 역동적인 속성을 강조하게 된다. 교수-학습 활동에서도 변수의 역동적인 특성에 주목하게 하는 것이 필요한데 지필환경에서 변수의 동적 특성을 그래프로 구현하기가 쉽지 않다(류희찬 · 지현희 · 조민식, 2000). 그래픽 계산기나 컴퓨터 등 ICT 환경은 함수의 동적 환경과, 식, 표, 그래프 표현을 서로 긴밀하게 연결시키는 다중표현을 용이하게 지원한다. 특히 상황을 식이나 그래프로 표현하고, 그래프를 상황과 연결시켜 해석하는 능력이 매우 강조된다. 또한, 공학 도구 환경에서 함수의 특징이나 함수족의 파악을 용이하게 한다(장경윤, 2007). 또한 테크놀로지 도구가 함수 그래프 학습에서 기존의 수학적 오류를 변화, 처치하는데 영향을 줄 수 있다는 가능성이 주목받고 있다(안가영 · 권오남, 2002),

본 연구에서는 함수의 동적인 속성과 공학 도구 이용의 장점에 주목하여, 지필 방식만으로는 설명하기 어려운 부분에 적용할 수 있는 GSP 프로그램을 개발하고 이를 적절히 사용하는 방안을 구안하였다.

2. 점진적인 함수 그래프 표현 단계

본 연구에서 초기 개념 및 표현에서부터 함수의 그래프 표현을 "형식화"해 나가는 점진적 표현단계를 다음과 같이 설정하였다.

가. 자유 표현

학생들은 형식적인 표현으로 들어가기에 앞서, 자신이 고안한 고유의 비형식적인 표현의 기회를 갖는다. 학생들은 주어진 함수 상황을 자신의 말로 표현하기도 하고, 간단한 그림, 다이어그램, 기호, 만화, 수직선, 도표, 식 등 표현이 가능한 범위까지 최대한 풍부하게 나타내도록 한다. 또한, 아동들의 자유 표현 단계에서 교사는 최대한의 다양한 표현을 이끌어내도록 발문하여 이를 촉진하도록 하고, 충분한 시간을 배정한다.

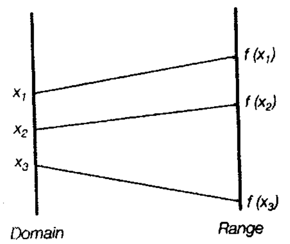
아동들이 다양한 비형식적인 표현들을 하고 나면, 이를 다른 사람에게 소개하여 아동들 상호간에 서로의 아이디어를 비교할 수 있는 기회를 부여한다. 그 다음, 함수상황을 효과적으로 나타내고 있는 표현을 선택하도록 한다. 아동들에 의하여 선택된 비형식적 표현들은 여러 아동들에 의하여 좀 더 다듬어져 맵핑 다이어그램으로 발전하게 될 것이다.

나. 맵핑 다이어그램

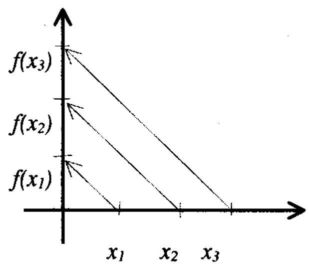
집합론적인 관점의 교수 상황에서 함수의 정의역과 공역 원소끼리의 대응 개념을 설명할 때, 정의역과 공역을 각각 폐곡선으로 구분하고 각각의 원소를 직선 또는 화살표로 연결하는 방법을 이용해 왔다. 이 방법은 그리기 간편하고 시각적으로도 복잡하지 않으나, 이를 그래프로 발전시키기에는 연결성 면에서 한계가 있다. Richmond, Spivak, Brieske, Goldenberg 등에 의하여 연구되어 온(Bridger & Bridger, 2001) 맵핑 다이어그램은 그런 면에서 벤 다이어그램의 단점을 보완해 주는 하나의 대체 수단으로 사용할 수 있다.

맵핑 다이어그램을 구성하는 방법은 [그림

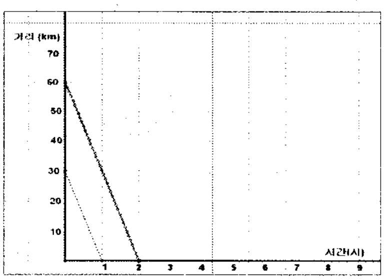
Ⅲ-1]과 같다. 먼저, 수직축을 두 개 그리고 각각을 정의역축과 공역축이라고 이름을 붙인다. 정의역 축 위의 어떤 수(점) x_n과 공역축 위에 위치한 점 $f(x_n)$을 직선으로 연결한다. 이것을 x_n에 대한 맵핑 라인이라고 부른다. 맵핑 라인을 모은 것을 함수 맵핑 다이어그램이라고 부른다(Bridger & Bridger, 2001).



[그림 Ⅲ-1-1] 맵핑 다이어그램



[그림 Ⅲ-1-2] 직교 좌표 화살표 그래프



[그림 Ⅲ-1-3] GSP 선그래프

[그림 Ⅲ-1] 함수 개념 표현의 점진적 발달 단계
* [그림 Ⅲ-1-1] : (Bridger & Bridger, 2001)

맵핑 다이어그램에서 정의역의 원소와 공역의 원소들을 두 수직축에 속하는 하나의 점으로 본다. 여기에서 정의역과 공역을 나타내는 두 수직축을 직각으로 교차시키면 이는 직교좌표와 같은 형태가 된다. 그리고 이렇게 형태가 바뀌는 큰 패러다임의 변화가 일어나더라도, 두 축에 속한 원소들을 그대로 두고 이용할 수 있으며, 좌표 평면의 그래프로 연결시키는 데 있어서의 과도기적 형태의 그래프로 이용 가능하다.

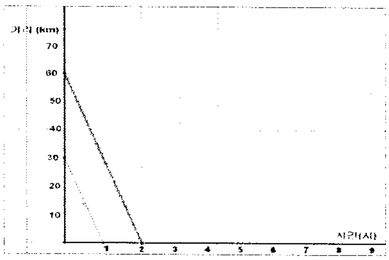
다. 직교좌표 화살표 그래프

직교 좌표 화살표 그래프는 맵핑 다이어그램을 좌표 평면의 그래프로 발전시키기 위한 과도기적 형태라고 볼 수 있다. 일반적인 좌표 평면에서의 그래프와 형태가 비슷하도록 맵핑 다이어그램에서의 정의역과 공역의 두 수직축을 수직 교차시킨다. 그러나, 선 그래프와는 달리, 정의역의 원소와 공역의 원소를 직접 반직선 화살표로 연결함으로써, 변화하는 양을 시각적으로 보다 직접적으로 표현하는 것이다. ([그림Ⅲ-1-2])

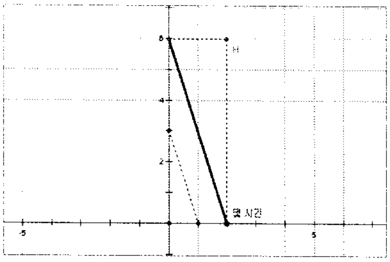
라. GSP 선그래프

'GSP 선그래프'는 [그림 Ⅲ-2]과 같이, 직교좌표 화살표 그래프를 GSP 프로그램으로 제작한 것이다. 직교 좌표 화살표 그래프는 각각의 원소에 대한 대응값을 일일이 하나하나의 반직선 화살표로 직접 그려주어야 하는 불편이 있는 반면, 'GSP 선그래프'에서는 움직이는 하나의 선으로 모든 함수 관계의 표현이 가능하다. 움직이는 하나의 선분으로 원소와 그 대응값을 연결하며, 정의역 또는 공역축을 따라 끝점을 드래그하면 선분이 따라 움직여 대응값을 가리키도록 프로그램하였다. 또한, x축과 y축에서 대응하는 원소의 교차점(이하 대응점)을 화면상에서 감출 수도 있고 드러내 보일 수도 있다.

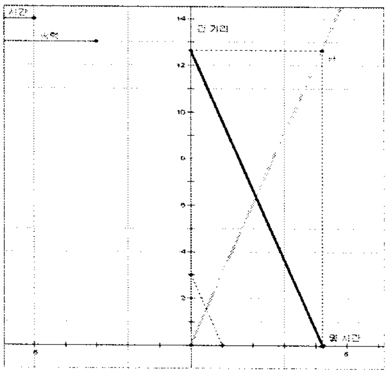
([그림 Ⅲ-3]) GSP 선그래프의 탐구가 끝난 후, 대응점 보이기를 통하여 화살표를 움직였을 때 대응점이 어떠한 형태로 움직이는지 살펴볼 수 있다. 그 다음, [그림 Ⅲ-4]과 같이, 대응점의 '흔적 남기기' 메뉴를 실행하여, 대응점의 자취를 보게 된다. 선분을 움직일 때, 점도 따라 움직이게 되며, 이 점의 자취가 화면상에 빨간색으로 흔적으로 남게 되는데, 선분을 빨리 움직이면 점의 흔적이 띄엄띄엄 생기며, 선분을 천천히 움직이면 점의 흔적이 촘촘하게 생겨 마치 직선처럼 보이게 된다. 바로 이 시점에 그동안 아동들이 많이 접하였던 선 그래프와 연관지어 지도할 수 있다.



[그림 Ⅲ-2] GSP 선분 그래프



[그림 Ⅲ-3] 대응점 보이기



[그림 Ⅲ-4] 대응점의 자취 보이기

마. 좌표 평면의 점그래프 및 선그래프

앞에서 GSP 선그래프로 대응점의 자취를 탐구한 후, 일반적 형태인 좌표 평면의 점 그래프와 선 그래프로 연결하여 지도한다. GSP 선그래프의 자취를 탐구할 때, 빠르게 선을 움직여 점의 자취가 띄엄띄엄 생기도록 해 보고, 이를 점그래프로 연결한다. 또한, 천천히 움직여 점의 자취가 매우 촘촘히 생기도록 해 보고, 이를 선그래프로 연결한다. 점그래프 또는 선그래프를 그리는 방법까지 생각해 보도록 연결하는 것이 좋다.

3. 함수의 그래프 표현 지도 계열

위와 같은 함수의 그래프 표현의 지도를 다음과 같은 계열로 구체화하였다.

가. 생활 주변의 함수 관계 탐구하기

'해가 바뀜에 따라 나이가 바뀐다', '물건의 개수를 늘리거나 줄이면, 물건값이 증가하거나 감소한다' 의 예를 통하여 전항에 따라 후항이 바뀌는 함수의 개념을 생각해 보게 한다.

나. 다양한 표현양식 고안하기

주어진 함수 상황을 학습자 나름의 다양한 양식으로 표현해 보게 한다. 각자가 고안한 다양한 표현 양식을 공유하고, 자신과 다른 학습자들이 고안한 표현 양식을 비판적으로 감상하는 기회를 거쳐, 주어진 함수의 상황을 가장 잘 나타내고 있는 표현 양식을 선정한다. 이 때, 교사는 맵핑 다이어그램에 근사하거나, 맵핑 다이어그램으로 발전시킬 수 있는 표현 양식 또는 함수의 종속 관계를 화살표로 표현한 모델에 주목하도록 해야 한다.

다. 화살표그래프 표현하기

맵핑 다이어그램을 수직 교차한 좌표 평면과

화살표 표현을 결합한 '화살표그래프'를 아동 스스로 고안할 수 있도록 안내한다. 이 때, 화살표의 시작은 정의역의 원소이며, 화살표의 끝은 공역의 원소가 된다.

라. GSP 선그래프 탐구하기

'GSP 선그래프'를 도입하여 탐구하도록 한다. GSP 선그래프는 일종의 '움직이는 화살표 그래프'로써의 역할을 한다. 축에 닿은 선 끝은 좌우 또는 위아래로 드래그해 봄으로써 변수에 따른 함수값을 찾을 수 있고, 함수값에 따른 변수를 찾는 활동을 할 수 있다.

마. 점그래프 그리기

좌표 평면에서 정의역의 원소와 공역의 원소가 만나는 교차점에 점을 찍어, '점그래프'를 고안하여 그려보게 한다.

바. GSP 선그래프의 자취 관찰하기

'GSP 선그래프'의 자취를 관찰하도록 한다. 이 때, 정의역과 공역의 교차점을 '점의 자취 남기기' 메뉴를 실행하여 자취가 남도록 조작하여 보게 한다. 자취를 띄엄띄엄 남도록 해보고, 촘촘하게 남도록 해 본다. 아동들은 이 단계에서, 그래프에서의 점과 선의 관련성을 인식하게 된다.

사. 선그래프 그리기

정의역의 원소들 사이의 원소에 대한 함수값을 생각하여 점으로 찍어 보도록 하고, 이런 식으로 함수값들 사이의 간격을 좁혀나감으로써 선 그래프에 가까워지도록 안내한 후, 선그래프를 그려보게 한다.

아. 선그래프의 의미 명확화 및 해석하기

그려진 선 그래프에서 대응되는 정의역의 원소와 공역의 원소를 찾아보는 활동과, 기울기가 다른 일차함수의 그래프를 탐구하는 활동, 구체적인 상황을 모델링한 그래프를 보고 상황을 해석하는 활동을 해봄으로써, 선그래프의 개념을 명확화환다.

IV. 연구 방법

1. 연구 대상

본 연구를 위한 지도 대상으로 경기도 시흥시 소재 S초등학교 5학년 아동 4명(남 2, 여 2)을 선정하였다. 선정 기준은 평소 수학 성취도가 중· 상인 아동으로써 특히, 연구의 수월성을 위하여, 자신의 의견이나 새로운 아이디어의 표현에 어려움이 없는 아동들로 선정하였다.

2. 지도 및 관찰

본 연구를 위한 지도는 2008년 6월 17일~6월 30일까지 총 8차시의 수업을 진행하였다. 수업은 주로 아동들의 정규 수업이 끝난 직후 1~2시간(단위시간 : 40분) 동안 이루어졌으며, 지도교사 이외의 1인이 디지털 캠코더 2대로 수업의 모든 과정을 녹화하였다. 촬영된 수업의 전 과정은 트랜스스크립트로 작성하여 분석의 기초자료로 활용하였다.

3. 주요 지도 과정

함수의 개념화를 위하여 수학적으로 익숙한 함수 상황을 탐구하도록 하고, 이를 형식적 · 비형식적인 다양한 초기 표현의 기회를 준다. 아동들에 의해 표현된 다양한 함수의 표상들은 점진적으로 '안내된 재발명'의 과정과 유사한 여러 단계를 거쳐 그래프로 발전해 나간다. 본 연

구의 수업에서 다룬 함수 상황은 다음과 같다.

<표 Ⅳ-1> 주요 지도 과정

차시	지도 내용	표현 단계
1	◇ 일차함수의 관계 인식하기 (시간에 따른 거리의 관계 : y=30x)	가
	◇ 여러 가지 방법으로 표현하기 ◇ 여러 가지 표현 중 우수한 것 선택하여 발전시키기	나
2	◇ 화살표 그래프로 표현하기 ◇ 여러 가지 함수 관계를 화살표 그래프로 나타내보기 ◇ 화살표그래프로 나타낼 수 있는 함수 관계 정의하기	다
3	◇ 화살표 그래프를 보고 대응되는 수 찾기 ◇ 함수 관계를 구두, 문장, 식으로 표현하기 ◇ 화살표 그래프 표현의 장점과 단점 음미하기	
4	◇ 함수 관계를 나타내는 또 다른 방법 생각해보기 ◇ GSP로 움직이는 화살표 그래프 조작해보기	라
	◇ 점그래프로 그려보기	마
5	◇ GSP로 화살표 그래프의 점의 자취 관찰하기	바
	◇ 점그래프를 선그래프로 발전시키기 ◇ 선그래프 읽기	사
6	◇ 일차함수그래프의 기울기의 공통점과 차이점 관찰하기 ◇ 일차함수그래프의 모양을 식과 관련지어 생각해보기	아
평가 7	◇ 기울기가 다른 일차함수의 그래프에 각각 알맞은 상황 연결하기	
평가 8	◇ 주어진 실생활 상황에 알맞은 대강의 그래프 그리기 ◇ 주변에서 접할 수 있는 그래프를 찾고, 그래프 해석하기	

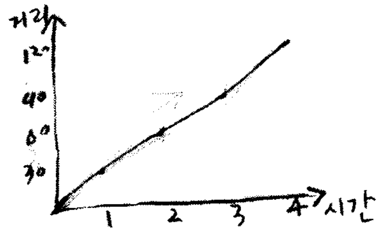
현수는 주말에 아빠가 운전하시는 차를 타고 나들이를 다녀왔다. 고속도로가 무척 막히는 바람에 1시간에 30km를 갔다. 같은 속도로 간다면 2시간에는 60km를 갈 수 있다.

함수의 여러 가지 표상 중 그래프 표현의 개념 형성을 위하여 6차시의 수업과 2차시에 걸친 평가를 계획하였다. 총 8차시까지의 수업 내용을 약술하면 <표 Ⅳ-1>과 같다.

4. 결과 및 분석

가. 그래프에서의 선과 점의 의미 파악

본 연구의 초기에 아동들은 등속운동의 일차함수 상황을 점과 직선으로 된 그래프로 표현할 수 있는 것처럼 보였다[그림 Ⅳ-1].



[그림 Ⅳ-1] 아동 B의 함수 초기 표현

그러나 연구자가 [그림 Ⅳ-1]에서 선과 점의 의미를 물었을 때, 학생들은 그래프에서 선과 점이 큰 의미를 지니지 못하는 것으로 잘못 인식하고 있음을 알 수 있었다.

교사 : 이 선이 나타내는 건 뭐고, 점이 나타내는 건 뭐야?
아동 B : 점은 별 의미 없어요.
아동 D : 선이 거리를 나타내고 점이 시간을 나타내고…
아동 C : 점이 시간과 거리를 나타내는 거고, 그 그냥 더 뚜렷하게…
교사 : 그러니까 점을 더 부각시키기 위해서 선을 그렸다?
아동 A : 네.

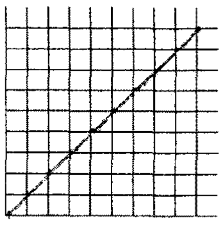
이러한 아동들의 공통된 오해는 GSP 프로그램에서 선그래프를 움직이면서 두 변수값을 표현한 점의 자취가 모여 직선이 되는 것을 눈으로 확인하면서 변화하였다. 아동들은 GSP 선그래프의 자취를 관찰하면서, 그래프의 선이 몇 개의 점을 의미 없이 이은 것이 아니라는 인식과 더불어, 더 나아가 점이 많이 찍혀서

선이 된다는 사실을 인식하였다.

연구자 : (화살표그래프를 이리저리 움직여 점의 자취가 선처럼 보이게 한다) 지금 왔다가갔다 하다가 보니까, 뭐가 되었니?
아동들 : 선!
연구자 : 선처럼 보이지만 사실은 그게 뭐가 많이 찍힌 거니?
아동 A, C : 점!

위와 같은 과정을 거치면서 아동들은, 스스로 선그래프를 그릴 때, 그것을 의미 없는 선으로 인식하기보다는, 그것이 시간과 거리를 동시에 나타내는 점들이 많이 찍혀서 생긴 것이라는 인식의 바탕 위에서 선을 긋고 있었다. 또한, 위와 같은 GSP 그래프에서 점의 자취를 관찰한 직후, 아동 B는 [그림 Ⅳ-2]와 같이 학습지에 점을 촘촘히 찍어, 선그래프가 점의 자취임을 강조하여 보여주었다.

그리고나서, 아동들은 그래프에서 점과 선의 관계 및 선의 의미를 유의미하게 인식하고 이를 이용하였다. 즉, 계속해서 점들을 여러 개 찍는 것처럼, 점을 몇 개 찍고 나서, 이 점들 사이 사이의 구간에 대한 함수값을 일일이 점으로 찍어줄 필요 없이, 선으로 이어주면 점을 일일이 찍는 것과 같은 결과가 나타난다는 인식을 하고 있음을 볼 수 있었다.



아동 B : 선이 아니에요. 점들을 일일이 다 찍은 건데, 하다보니까 이렇게 되었어요.

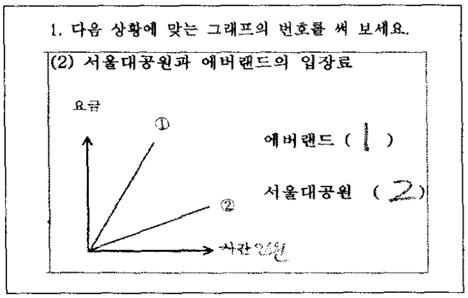
[그림 Ⅳ-2] 아동 B의 점그래프

연구자 : 자, 점을 찍다보니까 무슨 생각이 드니?
아동 B : 이 점들을 쫙 이은 다음에 점을 빼면 선 그래프가 되요.
연구자 : 그럼, 한 시간과 두 시간 사이에서 1시간 반에 대한 거리를 찍는다면?
아동 B : 1과 2 사이에…
연구자 : 그러면, 2시간 반이라면?
아동들 : 두 번째 점과 세 번째 점 사이에.
연구자 : 시간에 대한 사이사이의 점들을 다 찾아낸다고 하면 결국은 이 점들이 어떻게 보일까?
아동들 : 선!
아동 B : 점을 찍은 다음에 선으로 그린다.
아동 D : 일단 거리와 시간이 만나는 점을 찍고, 선으로 잇는다!

나. 일차함수 그래프의 기울기 인식 및 그래프 해석

아동들은 일차함수 그래프의 기울기에 대해 명확히 인식함은 물론, 일차함수의 그래프를 능숙하게 해석하고, 그래프의 기울기와 상황을 알맞게 관련지을 수 있음을 보여주었다. 모든 아동들이 평가 차시에서 문제 1[그림 Ⅳ-3]과 문제 2[그림 Ⅵ-4]를 올바르게 대답하였다.

특히, 아동 B의 경우, 3차시까지도 화살표 그래프를 받아들이지 않고 부정확한 선그래프의 형태만을 고집하였다. 게다가, 3차시까지의 선그래프는 정교하지 않고 도수의 간격과 그래프의 시작점 등이 문제가 되었었는데, GSP 그래프의 관찰 이후에 그래프의 해석은 훌륭하게 해 내었을 뿐만 아니라, 평가 인터뷰 차시에서는 일차함수 그래프의 의미를 정확히 파악하며, 일차함수를 기울기에 따라 구별할 수 있는 능력을 갖추게 되었음을 보여주었다. 이는, GSP 선그래프의 자취를 관찰한 후, 다음의 대화와 같이 학습지에 점그래프와 선그래프를 그리는 과정에서 연속함수에서 선그래프의 선이 사실은 점들의 집합이라는 것을 명확히 인식하였음을 보인 이후에 이루어진 급진전이다.



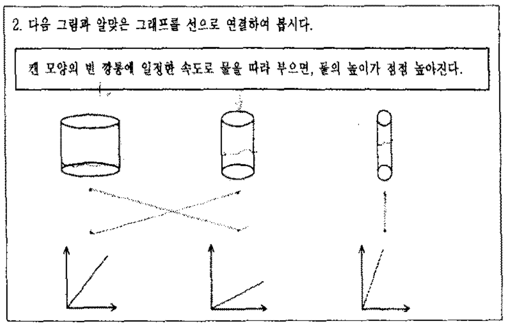
[그림 IV-3] 평가지 1쪽 1-(2)번

아동 B : 에버랜드랑 서울대공원은 처음엔 요금이 비슷했을지 모르겠는데, 여기(②번 그래프)는 인원이 훨씬 더 많은데 훨씬 더 싸고, 여기(①번 그래프)는 인원이 적은데 가격이 거의 훨씬 많아요. 그래서 이 높은게 에버랜드고 낮은게 서울대공원.

연구자 : 우리, 기울기로 연관지어서 설명해 볼까?

아동 B : 음...이게(세로축) 가격이라면 만약에 가격이 좀 싸면 느슨~하게 되잖아요. 그런데, 가격이 비싸면 가파르게...!

위의 예는 2번 문항([그림 IV-4])과 함께, Dubinsky & Harel(1992)의 함수 개념 발달의 관점에서 보았을 때, 아동들의 함수 개념 인식이 변수와 함수값의 일대일 대응관계인 행동이나 과정으로의 인식을 넘어, 그래프의 기울기로 표현되는 하나의 대상(Object)으로 인식하는 단계에까지 이르렀음을 알수 있었다.



[그림 VI-4] 평가지 1쪽 2번

아동 B : 2번은 물의 높이가 깡통에 부으면 계속 이렇게 올라가는건데, 만약 여기(가운데 통) 1리터쯤 부었다고 하면 여기가 폭이 좁으니까, 이건 이렇게 올라가고, 여기(세 번째 통)는 더 좁으니까 이만큼 올라가고 기울기가 이렇게....

다. 관계로서의 함수 개념 형성

수업 과정을 통하여 아동들은, 독립변수에 따라 종속변수가 변하는 관계로서의 함수 개념이 형성하였음을 알 수 있었다.

연구자 : 관계를 나타내려고 했던 거지? 어떤 관계가 있었었니?

아동 B : 시간이 늘어나면 거리가 늘어나고, 거리가 늘어나면 시간이 늘어나고…뭐 그런 관계요.

연구자 : 어. 그래. 우리가 했던 건 구체적으로 어떤 관계였니?

아동 C : 1시간에 30km 가는 관계요.

Markovits 외 (1988)에 따르면, 함수 개념이 형성되었을 때, 함수 관계의 예를 보일 수 있어야 한다. 2차시에서 실생활의 다양한 함수 관계를 화살표 그래프로 표현해 보게 한 후, 이렇게 화살표 그래프로 나타낼 수 있는 함수 상황을 문제로 만들어보게 하였을 때, 아동들은 다음과 같은 문제를 만들어냄으로써, 함수 개념이 올바르게 형성되었음을 보여주었다. 아동 A를 제외한 나머지 아동들의 문제가 엄밀하게는 '비연속' 양으로써, 연속성에 문제가 있기는 하지만, 아동들이 제시한 상황에서 '관계'와 '대응'의 개념 구분이 모호한 면이 있음을 감안하였을 때, 아동 전원이 일정한 수준의 함수 개념을 형성하고 있음을 짐작하기는 어렵지 않다.

아동 B : 김밥 1줄에는 토막난 작은 김밥 10개가 들어있다. 김밥의 줄 수가 늘어나면 토막난 김밥은 몇 개인가?

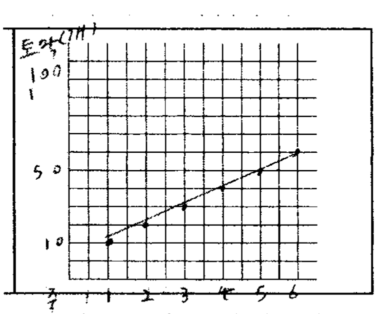
아동 C : 1일 용돈이 600원이다. 일수에 따라 용돈이 어떻게 달라지는지 화살표 그래프로 나타내시오.

아동 D : 껌 1개의 무게는 20g입니다. 껌의 개수에 따라 무게는 어떻게 달라지는지 나타내어 봅시다.

아동 A : 봉선화는 1주일에 1.5cm를 자랍니다. 1주일이 지날 때마다 봉선화의 키는 어떻게 변화하는지 나타내어 봅시다.

라. 0점의 처리

아동 B와 D는 초기에 다음 그림과 같이, 함수 상황을 선그래프로 표현하면서 계속적으로 선을 (0, 0) 점부터 시작하지 않거나, 정확하지 않은 점을 0점으로 잡거나 하는 경향이 있었다.



[그림 IV-5] 아동 B의 영점 처리

이는 본 연구에서 제시된 함수 상황에대한 수업에서 0시간 움직였을 때, 움직인 거리가 0km 라는 것을 다루지 않았기 때문인에, 0시간일 때를 좌표에 표현해야 할지에 대하여 제대로 판단하지 못한 것으로 보인다. 초등학생의 행동 특성상, 0시간에 대한 언급과 더불어 단위 시간 이하의 시간에 대한 함수값에 대한 논의도 이루어져야 할 것이다.

V 결론 및 논의

본고에서는 함수의 여러 가지 개념 중 '변화하는 두 양을 표현하는 방법' 중의 하나로써, 함수의 그래프 표현 및 해석에 중점을 두었다. 이의 지도를 위하여 자유로운 함수 표현, 맵핑 다이어그램, 직교좌표 화살표 그래프, GSP 선 그래프, 좌표 평면의 점 그래프 및 선 그래프로 진행되는 점진적인 그래프 지도 방식을 고안하여 실행하였다.

연구 결과, 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

첫째, 함수 그래프 지도를 통하여 초등학교 5학년 아동들이 함수 관계에 대한 개념화는 물론, 1차 함수 그래프의 상황 해석의 지도의 가능성을 엿볼 수 있었다. 아동들은 함수 상황을 여러 가지 수단으로 표현할 수 있고, 여러 가지 함수 상황을 창안해 바르게 창안해 내었으며, 기울기가 다른 여러 가지의 1차 함수의 그래프에 대한 해석을 훌륭하게 해 내었다. 연구 대상 아동들이 성취수준 상 또는 중의 아동들이었음을 감안하여, 모든 아동들을 대상으로 한 지도 방안을 강구하여 적용한다면, 함수 관계에 대한 개념화와 1차 함수 그래프의 상황 해석 지도가 가능하다고 본다.

둘째, 점진적인 함수 그래프 지도를 통하여 아동들이 기존에 가지고 있던 그래프에 대한 부정확하고 진지하지 못한 지식을 명확한 것으로 인식하도록 할 수 있음을 볼 수 있었다. 타교과나 일상생활에서 많이 접하는 그래프의 형태를 부정확하게 흉내만 내는 것이 아니라, 복잡한 상황의 그래프도 순서쌍이나 함수값과 더불어 구간을 고려한 근거를 바탕으로 정확하게 그릴 수 있게 되었다. 또한, 점진적인 함수 그래프 지도 방법은 함수 개념에 대한 아동들의 발달 수준을 증진시킬 수 있다는 것을 보여주었다. 아동들이 여러 가지 함수 관계를 표현하는 기울기의 차이점에 대해서도 논의할 수 있는 능력이 형성되었다는 것을 앞에서 보였다. Dubinsky & Harel (1992)은 함수 개념

발달의 단계에 대하여 '활동(Action)으로서의 함수', '과정(Process)으로서의 함수', '대상(object)으로서의 함수'로 제시하였다. 특히, '대상으로서의 함수' 단계는 이전의 '과정' 단계에 어떠한 수행을 하는 것과 관계가 깊다. 예를 들면, 함수식이나 그래프를 대상으로 해를 구하거나 기울기를 파악한다면, 이는 함수를 대상으로써 다루는 것이 된다. 특히 평가 차시에서의 인터뷰 내용과 같이, 이전 단계에서 '과정(process)'으로써 다루었던 함수를 이제는 '대상(object)'로써 논의하고 있다는 것을 볼 수 있다. 말하자면, '수단의 대상화'를 이루었음을 보여주는 좋은 예이다.

셋째, GSP 선그래프를 과도기적으로 도입함으로써, 아동들이 그래프에서의 점과 선의 관계를 시각적으로 명확히 인식하였으며, 이를 통하여 그래프의 의미에 대하여 정확히 인식하고 그래프를 좀 더 정확히 그리는데 중요한 계기가 되었음을 알 수 있었다. 함수값이 변하는 GSP 그래프를 보고, 선그래프가 x값의 변화에 따라 변하는 함수값의 동적인 자취라는 것을 인식하고 관계를 보다 쉽게 파악하는 것을 알 수 있었으며, 역동적인 GSP 그래프의 자취를 관찰함으로써, 점그래프와 선그래프와의 관계를 명확화하였다. 이를 통하여, GSP 선그래프는 함수 표현의 지도에 있어서의 적재적소의 역동적인 도구로써의 역할을 충실히 해 내었다고 할 수 있다.

위와 같이, 초등학교 5학년 아동들은 공학 도구의 사용을 포함한 점진적인 그래프 표현을 학습함으로써, 함수 개념의 발달을 이루었으며, 함수 관계를 그래프로 표현하는 표상 능력은 물론, 그래프 해석 능력을 갖출 수 있는 가능성이 있다는 결론에 이르렀다.

본 연구에서의 실험 결과를 고려하였을 때, 다음과 같은 시사점을 얻을 수 있다.

첫째, 학생들이 선그래프와 꺾은선그래프를 일상에서, 그리고 과학과에서 이미 5학년에서 속력을 시간과 간 거리의 그래프를 통하여 알아보는 활동을 도입하고 있다는 사실을 감안한다면, 1차 함수의 그래프를 중 1에서 갑자기 형식적으로 도입하는 것 보다는, 초등학교 과정에서부터 좀 더 조기에 점진적인 함수의 그래프 표현 과정을 고려하여 형식적으로 도입하는 것이 가능하고 또, 필요하다. 따라서, 이에 따른 지도 방안을 생각해 볼 필요가 있다.

둘째, 문제 중심의 점진적인 함수 그래프의 지도 결과, 초등학생들이 함수 개념을 올바르게 인식하고, 함수의 그래프 표현 및 해석을 올바르게 해 내었다는 결과를 고려하여, 함수의 그래프 학습에서 전통적인 접근방식에서 벗어나 학생 중심·문제 중심의 단계적인 함수 그래프의 지도 방식으로 확장할 필요가 있다.

셋째, 최근 우리나라의 ICT 환경 및 효과를 감안하였을 때, 함수의 그래프 표현 학습에서 테크놀로지를 적절히 사용하기 위한 방안을 고려해야 한다. 시기 및 기간, 사용방식 등 세부적이고도 구체적인 방법에 대한 연구가 이루어져야 한다.

참고문헌

류희찬·지현희·조민식(2000). Mathview를 도구로 한 고등학교 함수단원 구성. **학교수학**, 2(1).

박교식(1992). **함수 개념 지도의 교수현상학적 접근**. 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

송순희·오정현(1997). 중학교 함수영역에서 발생하는 수학적 오류에 대한 연구. 한국수학교육학회지 시리즈 A : **수학교육, 36**(1).

안가영·권오남(2002). 함수 그래프 과제에서의

오류분석 및 처치. 수학교육논문집 제 13-1집. **한국수학교육학회지** E. 337-360.

이종희(1999). 함수 개념의 역사적 발달과 인식론적 장애. **수학교육학연구, 9**(1).

장경윤(2007). ICT 시대의 대수교육의 방향과 과제. **학교수학, 9**(3).

황우형 · 차순규(2002). 탐구형 소프트웨어를 활용한 고등학교 해석 기하 교육에 관한 사례연구. 한국수학교육학회지시리즈A: **수학교육, 41**(3).

Bridger & Bridger (2001). Mapping Diagrams : Another View of Functions: *The Roles of Representation in School Mathematics, 2001 Yearbook,* NCTM.

Coulombe & Berenson (2001). Representations of Patterns and Functions : Tools for Learning: *The Roles of Representation in School Mathematics, 2001 Yearbook,* NCTM.

Curtis L, Pyke (2003). The Use of Symbols, Words, and Diagrams as Indicators of Mathematical Cognition, *Journal for Research in Mathematics Education,* 2003, Vol. 34, No. 5, NCTM.

Dubinsky & Harel (1992). The Nature of The process Conception of Function: *The Concept of Function,* MAA Notes Vol. 25. Mathematical Association of America.

Goldin & Shteingold (2001). Systems of Representations and the Development of Mathematical Concepts: *The Roles of Representation in School Mathemantics, 2001 Yearbook,* NCTM.

Greenes, C., Chang, K. & Ben-Chaim, D. (2007) International Survey of High School Students' Understanding of Key Concepts of Linearity. In J. Woo, H. Lew, K. Park & D. Suh. (eds.) *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* vol. 2. (pp. 273-280), Seoul: PME.

Janvier, C., Giradon, C., Morand. J-C., (1993), Mathematical Symbols and Representations: *Research Ideas for the Classroom,* MACMILLAN PUBLISHING COMPANY, New York.

Janvier. C. (1987). Translation processes in Mathematics education : *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics.* Hillsdale, NJ:Erlbaum.

Markovits. Z., Ylon. B & Bruckheimer. M. (1988), *Difficulties Students Have with the Function Concept: The Ideas of Algebra, K-12,* NCTM.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Restion, VA: NCTM.

Selden & Selden (1992). Research Perspectives on Conceptions of Function Summary and Overview: *The Concept of Function,* MAA Notes Vol. 25. Mathematical Association of America.

Tall. D. (1996). Functions and Calculus: *International Handbook of Mathematics Education (Part I),* Kluwer Academic Publishers.

Investigation to Teach Graphical Representations and Their Interpretations of Functions to Fifth Graders

Lee, Hwa Young (Graduate School of Konkuk University)
Ryu, Hyun Ah (Konkuk University Instructer)
Chang, Kyung Yoon (Konkuk University)

This research was designed to investigate the possibility to teach function concept and graph representation of functions in explicit manner toward at elementary level. Eight class-hours instruction was given to four Grade 5(age 11) students, and dynamic geometry software GSP was partially used in the class. Results indicate that the students could conceptualize the function relation, interpret linear function graphs, recognize the meaning of their slopes, and discuss the relationships among linear graphs and real life situation. Results also indicate that GSP helped students to recognize the relation between dots and the linear graph clearly and that GSP-line graph did decisive role for children to understand the meaning of graph representation of function.

* key words : function concept(함수개념), graph of function(그래프), representation(표현), interpretation of graph(그래프의 해석), progressive(점진적), dynamic geometry(동적기하), technology(테크놀로지)

논문접수 : 2009. 1. 30
논문수정 : 2009. 3. 5
심사완료 : 2009. 3. 13