대한수학교육학회지 <학교수학> 제 11 권 제 1 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.11, No.1, 111-129. Mar. 2009

교수공학 친화적, 실용적, 교수학적 변환의 실제적 연구 (10-나 삼각함수 단원을 중심으로)

이 영 하* · 신 정 은**

본 연구는 교육적 의도를 가지고 학문적인 지식을, 가르칠 지식으로 변형하는 일, 즉 지식의 교수학적 변환(didactical transposition)에 관한 것으로서, 제 7차 교육과정에 따라 개편된 13종의 10-나 수학 교과서에서 삼각함수 단원의 내용 배열순서 및 설명 방식을 분석하고 그 결과, 교수법적 어려움과 서술의 논리성 및 학생의 이해를 함께 고려할 때, 나타나는 교수학적 변환의 어려움은 무엇이며 이를 위한 대안적 교수학적 변환의 방법이나 실제적인 어려움 해소 방안은 무엇인가를 생각해 보았다.

이를 위해 13종의 수학교과서 10-나 단계 삼각함수 단원의 설명방식의 차이를 위주로 비교 분석하고, 그 결과를 최근의 교수법 이론과 암묵적으로 비교하여 새 교수법의 적용 가능성을 높이는데 개연적이나마 도움이 되리라고 예상되는 대안적 내용 서술 지도방안(부채꼴, 삼각함수의 그래프, 성질, 주기, 사인법칙에 대한 내용을 위주로)을 제안하였다.

Ⅰ. 서 론

수학지식을 교육적인 조건에 맞게 재구성하는 일은 수학 교육의 중요한 과제이다. 형식적인 성격의 수학지식은 학생들이 그대로 받아들이기에 거칠고 다소 딱딱할 수가 있다. 이러한 학문적 지식은 교과서 저자나 교사에 의해 학생들이 좀 더 쉽게 받아들일 수 있는 형태로 변형되어야 한다. 많은 학생들이 수학은 어려운 과목이라 생각하고 있는 현실에서 형식적인 수학지식을, 가르칠 지식으로 변형하여 보다 친근하고 쉬운 형태로 제시해야 하는 것은 현 수학교육의 가장 큰 과제 중의 하나이다.

교사는 형식적인 수학적 지식을 보다 의미있게 가르치기 위해서 그 지식의 근원, 의미, 동기, 쓰임새를 알게 해주는 일련의 활동을 교실 문맥으로 구성하려는 시도를 하게 되는데, 학문적 지식을 가르칠 지식으로 변환하는 것, 즉 교육적 의도에 의한 지식의 변형을 지식의 '교수학적 변환'이라고 한다. 수학적 소재를 교육적 관점에서 재구성하는 역할은 수학 교육학자, 교육과정 개발자, 교과서 저자, 수학 교사 등이 나누어 맡고 있다. 본 연구에서는 수학 교과서의 삼각함수 단원을 중심으로 연구를 전개하였다. 교수학적 변환의 관점에서 수학 교과서를 분석하여 보는 것은 교과서 구성에 있어서 새로운 시각을 제공할 수 있는 의미 있는 일이 되기 때문이다. 또한 김은실(2007)의 삼각함수 단원에 대한 인식 조사 및 학습 자료의 개발에 관한 연구에 따르면, 학생들은 삼각함수 단원의 학습에 심한 거부감과 어려움을 호소하고 있으며, 다른 단원보다 학업 성취가 낮고 전반적으로 흥미가 낮은 편이어서 단원에

* 이화여대 수학교육과(youngha@ewha.ac.kr)
** 이화여대 교육대학원(pascal0317@hanmail.net)

대한 내용을 충분히 이해하지 못하여 차후 단원에 관련된 학습에 필요한 지식의 심한 누적 결손 현상이 생기고 있다고 하였다. 따라서 학생들에게 가능한 한 학습 부담을 줄이고 흥미를 가지면서 삼각함수의 개념 및 성질을 정확하게 이해할 수 있도록 하기 위해 교사들이나 교과서 저자는 삼각함수의 개념과 지도법에 대하여 다양한 연구를 할 필요가 있다. 이에 본 연구에서는 교수학적 변환의 시각에서 수학 교과서의 삼각함수 단원을 분석하여 보다 효율적이고 새로운 내용 서술 방법을 다루어 보고자 한다.

II. 수학교과서와 교수학적 변환

강완(1990)은 수학 교과서는 학교 수학이라는 변형된 지식을 담아 간직하는 전형적 방법의 하나라고 하였다. 그러므로 수학 교과서를 분석해 보는 것은 현재 학교에서 가르쳐지고 있는 학교 수학의 특성을 알아보는 좋은 방법이라 할 것이다. 그리고 수학적 내용이 바라는 모습대로 학교에서 가르쳐지고 있는 지를 우리 스스로 확인해보는 방법이기도 하다. 기존의 교과서를 분석해 보고 생각하던 것과 다른 결과를 얻었다면 원하는 교과서의 성향은 어떤 것인가 정리해 볼 수도 있다. 바람직한 교과서가 갖추어야 할 조건은 무엇인가? 이는 쉽게 답을 얻을 수 없는 질문이다. 예컨대, 교사뿐만 아니라 학생에게까지도 바라는 모든 측면이 다 인식될 수 있는 교과서를 쓸 수 있는지, 또 그것이 가능하다면 그 자체로 바람직한 것인지 다시 생각해 볼 필요가 있다. 오히려 그러한 교과서가 과도한 방법화를 꾀해서 교사와 학생으로 하여금 독립적으로 교과서를 다루지 못하게 방해할 수도 있으며, 그것이 학생으로 하여금 교과서만 참고하고 다른 학생과 공부하거나 다른 학생으로부터 배울 수 있음을 생각하지 못하게 함으로써, 사회적인 학습의 기능을 간과하게 할 수도 있다는 비판을 제기하기도 한다. 그렇게 생각해 보면 교과서를 구성하고 사용하는 동안에 우리는 어떤 한계에 부딪힐 수 밖에 없음을 느낄 수 있다. 그 이유에 대하여 이경화(1993)는 다음과 같이 주장하였다.

> 이러한 문제점은 교과서에 제시된 수학적 지식의 구성이 원래의 지식의 형성 과정과 달리 그 순서가 거꾸로 되고, 발견 과정이 제거되거나 생략되며, 적절히 재정리되고, 다듬어진 것임을 간과하는 데서 기인한다. 수학적 지식이 선형적이고 단일하며, 처음에 주어진 하나의 구조적 수준에서 비롯된다는 생각에 따르는 것으로 볼 수 있다(이경화, 1993).

위에서 지적한 바와 같이 교사들은 수업 시간에 교과서 형태의 이미 만들어진 지식을 따라 수업하게 되고, 그 결과 학생들이 학교에서 수학 지식의 본질적인 과정과 사고법의 발달을 이루는 것은 어렵고 극도로 벅찬 과제가 돼버리는 것이다.

실제로 수학 교과서는 수업의 주된 도구이고, 교사와 학생에게 주어진 공통의 공인된 수학적 지식의 원천이므로 수학 교과서의 구성은 중요한 문제 가운데 하나이다.

교과서 기능의 이와 같은 이율배반적 측면은 결국 교과서 집필을 위한 교수학적 변환의 어려움을 잘 설명해 준다. 한편, 교수학적 변환은 수학 교과서 구성에 있어서 새로운 시각을 제공한다. 교수학적 변환의 과정은 잠재되어 있고, 쉽게 드러나지 않지만 이에 대한 연구는 교수학적 변환의 결과, 즉 교과서의 내용 서술을 통해 이루어질 수 있다. 즉, 수학 교과서를 교수학적 변환의 시각으로 분석해 보는 것은 그래서 더욱 특별히 의미 있는 일이다. 교수학

적 변환에 의해 왜곡, 전도된 수학적 지식은 없는지, 교수법 상의 어려움을 초래하는 것은 아닌지 등을 검토하고, 있다면 어떤 형태로 존재하는지 살펴봄으로써 새로운 변환 관련 생각을 얻어낼 수 있기 때문이다.

1. 교수공학 친화적 변환

본 연구에서 교수공학이란 수학 교수를 위해 사용되는 각종 교구, 즉 구체적 조작물, 각종 계산기와 컴퓨터 및 이들을 사용할 때 도움이 되는 각종 소프트웨어 등과 이에 관련된 각종 교수 이론 등을 망라한 표현이다.

Freudenthal(1981)은 '수학적 이해를 일깨우고 증진시키기 위해 계산기와 컴퓨터를 어떻게 이용할 것인가?'라는 문제를 앞으로 수학교육계가 해결해야 할 주요 문제 가운데 하나로 들고 있다. 수학은 추상적인 지식체계라는 특징을 갖고 있으며 이러한 수학의 추상성이 수학학습을 어렵게 만드는 한 가지 요인임은 잘 알려져 있다. 따라서 수학의 추상적 사고와 학습자의 구체적 사고를 연결해 주는 계산기나 컴퓨터 같은 매체의 사용이 유용할 것이다.

현재 세계적으로, 수학교실에서 교수공학의 활용이 강조되고 있음은 주지의 사실이며 우리나라도 이 점에서 예외는 아니다.

그러나 현재 새롭게 집필된 교과서의 내용 서술 방식이 이와 같은 교수공학을 활용하기에 편리하도록 변화되었는지는 분명치 않다. 만약 7차 교육과정에 의해 집필된 교과서의 내용 서술 방식이 과거 4차 또는 5차 교육과정 당시 만들어진 교과서와 관련 서술방식에 있어서 크게 달라진 점이 없다면, 당시는 교수공학이 상대적으로 덜 강조되었던 때라 하더라도, 그 당시 보다 현재의 교과서가 더 교수공학 친화적이라고 할 수는 없을 것이다.

가령 $\cos(x-\frac{\pi}{2})=\sin x$임을 설명하기 위해서 사인함수와 코사인함수의 그래프를 가르친 후에 $y=\cos(x-\frac{\pi}{2})$가 $y=\cos x$를 x축 방향으로 $\frac{\pi}{2}$ 만큼 평행이동 시킨 것이며 이 그래프가 $y=\sin x$와 겹쳐짐으로 위 등식이 성립한다고 서술하는 방식과 단위원에서 동경의 각이 각각 x와 $x-\frac{\pi}{2}$인 부채꼴에서 직각삼각형을 생각하여 두 삼각형이 합동임을 보이고 직각삼각형의 두 예각 사이의 관계가 한 각이 x이면 다른 각은 $\frac{\pi}{2}-x$임을 이용하여 증명해 주는 방식의 두 방법 중에서 어느 방법이 더 그래픽 계산기 사용이 더 용이하겠는가? 그래픽 계산기 사용 대신 다른 어떤 교수공학을 이용하면 후자의 방법이 사용하기 더 편리한가?

본 연구에서 교수공학 친화적 변환이라는 것은 교수공학을 사용하기 더 편리한 내용 서술 방식, 즉 그런 교수학적 변환을 뜻한다. 연구자는 교과서의 이런 변화가 수반되지 않는 한 아무리 교수공학의 사용을 교사들에게 강조한다 해도 수학교실이 변화하는 것은 쉽지 않다고 생각하기 때문이다.

2. 실용적 변환

교수학적 변환에서 실용적 변환은 다양한 관점에서 이해될 수 있다. 변환의 결과가 실용적인 문제 해결에 도움이 되도록 내용 설명 방식이 특별히 이에 맞게 고안된 변환을 생각할 수도 있다.

본 연구에서는 그와는 다소 다른 관점이다. 본 연구에서 실용적 변환이란 실생활의 경험에 의해 교과 내용이 이해되도록 하는 (실용적)경험 중심의 변환을 뜻한다.

J. M. Keller(1999)는 자신의 ARCS이론을 통

해 A(주의), R(관련성), C(자신감), S(만족감)을 모두 충족시킬 수 있는 교수설계를 주장하면서 특히 R(관련성)과 관련하여, 교사는 수업을 가능한 학습자의 경험과 실생활에 연결시킬 것을 권고하고 있다. 우리는 교과서 서술 방식에 대해, 이를 문서화된 하나의 교수설계로 보고, 바로 그 권고에 따라 실용적 변환을 생각해 본 것이라 할 수 있다.

가령 y= $\frac{5}{2}\sin\frac{2}{5}x$의 주기를 구하는 문제를 생각해 보자. y=2.5w, x=2.5z라 하면 이 관계는 w, z가 인치 단위의 수일 때 x, y는 cm단위의 수라고 볼 수 있다. 그리고 주어진 식은 w=sinz와 같이 적힌다. 이 함수의 주기가 2π인치임을 미리 배웠다면 이것은 5πcm이기도 한 것은 초등학생도 알 수 있다. 즉 cm 단위의 표기로 적은 y= $\frac{5}{2}\sin\frac{2}{5}x$의 주기는 당연히 5πcm일 것이다. 이것을 f(x+p)=f(x)에 의해 설명하여 $\frac{2\pi}{(\frac{2}{5})}=5\pi$라고 설명하는 방식과 비교해 보면 두 방법은 어떻게 다른가? 학생들은 y=sinx의 주기만 안다면, 초등학교에서 배운 실생활 단위 변화 지식만으로 y=asinbx(a, b>0)의 주기를 생각하고 이해할 수 있는 것이다.

3. 원리중심의 변환

신현정(2000)은, 개념이란 사고의 단위로서, 관련된 경험을 통합하고 적절히 조정하면서 사고가 경제적이고 집약적으로 전개되는 것을 도와주고, 원리와 법칙의 이해, 나아가 추론과 문제해결의 바탕을 이루는 매우 중요한 사고 양식이라고 주장하였다.

또 J. S. Bruner et al.(1956)에 의하면 개념은 "제한된 능력을 가지고 있는 유기체가 개별적으로 다루어야 하는 사물과 사건들의 변이(다양)성을 축소시키는 능력"을 가지고 있다고 하였다.

즉 개념이란 인간의 기억과 이해에 있어서, 사고와 지식의 경제성, 효율성, 압축 등을 위한 계통적 구조의 한 원소임을 알 수 있게 해 주는 말이다. 수학교사가 수학 지식과 개념을 전달할 때, 이와 같은 관점의 교수학적 변환을 생각한다면, 문제 해결의 다양성은 더 넓고 학습량의 부담은 덜어 주는 방법, 즉 원리 중심의 변환을 생각할 것이다.

따라서 본 연구에서 뜻하는 원리 중심의 변환이란 교수학적 변환에 있어서 어떤 교과 내용을 서술하는 방식이 더 근본적이어서, 그 방식으로 이해될 때, 이 후의 다른 학습 내용에서, 이 원리가 적용되는 범위는 더 넓지만, 현재의 서술 방식 자체는 더 간단해 보여 이해나 기억이 더 용이한 방식을 말한다.

가령 사인법칙의 예를 생각해 보자. 사인법칙은 결국 삼각형의 한 내각과 그에 대응하는 변 사이에 변의 길이의 내각의 사인에 대한 비가 그 삼각형의 외접원의 지름과 항상(세 내각과 세 변) 같다는 것이다. 그런데 삼각형과 그의 외접원에서 삼각형의 세 변은 그 외접원의 서로 다른 세 현일 뿐이다. 따라서 반지름 R인 한 원에서 하나의 현(a)과 그 원주각(A) 사이의 관계($\frac{a}{\sin A}=2R$)만 설명해 주면 사인법칙은 그것을 세 번 반복 적용해 주면 된다. 이 경우 원리 중심의 서술방식은 한 원에서 현과 그 현의 원주각 사이의 관계만 설명해 주는 방식이 될 것이다. 이것은 삼각형의 모양(예각, 둔각 등)에 따라 달리 설명할 필요가 없어 설명이 간단하면서도 사인법칙 이외의 다양한 상황에서도 현의 법칙이라는 이름으로 기억하여 사용할 수 있을 것이다.

Ⅲ. 연구내용 및 절차

1. 연구내용

본 연구의 연구 내용은 앞 단원에서의 생각을 토대로 아래 표의 여러 설명의 관점에서 현재 사용 중인 우리나라 10-나 단계, 13종 교과서의 내용 서술 방식을 분석해 보려는 것이다.

가령 호도법과 부채꼴 단원에서는 이 단원의 학습목표가 호도법과 부채꼴의 넓이, 호의 길이에 관한 것인지 아니면 다른 어떤 것, 예를 들면 호도법과 부채꼴의 닮음과 같은 것인지에 대해 생각해 보고, 교수학습의 주안점이 어디에 놓인 교수학적 변환이 13종 교과서에서 활용되고 있는 지를 살펴보려는 것이다. 따라서 아래의 표는 본 연구에 있어서 교과서 분석의 틀(어떤 관점에서 무엇을 살피려는지)과 같은 역할을 하기 위한 것이라고 할 수 있다.

<표 III-1> 분석 단원의 내용

분석대상	분석의 관점
호도법과 부채꼴	부채꼴의 호와 넓이에 대한 공식의 반복 대신, 반드시 소개 되어야 할 다른 원리가 있는 지 알아본다.
삼각함수의 그래프	삼각함수의 그래프를 쉽게 설명할 수 있는 조작적 또는 교수공학적 환경개선 방법을 알아본다.
삼각함수의 주기	삼각함수는 주기와 관련하여 물리 등의 타 교과와 연관성이 높다. 그것은 주기라는 실용성을 가지고 있기 때문이다. 삼각함수의 실용적인 성격을 살리며 주기를 가르치기 위한 더 실용적인 방안을 모색 해본다.
삼각함수의 성질	삼각함수의 성질을 시각적인 그래프를 이용하여 가르칠 수 있는 방안을 알아보았다. 특히 그래픽 계산기와 같은 공학 도구를 활용할 수 있는 대안적 방법이 마련될 수 있는지 알아보았다.
사인법칙	사인법칙을 더 간단한 원리를 이용하여 소개할 수 있는지 알아보았다.

2. 연구절차

가. 13종 수학 10-나 교과서의 삼각함수 단원을 교수학적 변환의 시각에서 내용 배열순서, 설명방식의 차이를 위주로 비교 분석 해본다.

나. 13종 수학 10-나 교과서의 분석 결과를 토대로 여러 관련 이론을 접목시켜, 이론이 학교현장에 더 쉽게 뿌리 내릴 수 있는 대안적 교과서 서술방안을 제시한다.

Ⅳ. 연구결과 및 분석

1. 부채꼴의 호의 길이와 넓이에 관한 고찰

현재의 교과서에는 삼각함수 단원의 도입부에서 어떤 내용을 다루고 있는지 알아보기 위해 13종 교과서 수학 10-나 삼각함수 부분의 도입 단원인 “일반각과 호도법”의 구성을 살펴보았다. 이 단원에서는 각의 크기를 나타내는 새로운 단위인 라디안을 소개하고, 1라디안을 단위로 각의 크기를 나타내는 방법인 호도법을 다루고 있다. 이 내용의 다음으로 13종 대부분의 교과서에서 제시되는 것은 부채꼴의 호의 길이와 넓이를 구하는 공식에 대한 다음과 같은 내용이다(C교과서, p157).

<표 IV-1> 부채꼴의 호의 길이와 넓이

부채꼴의 호의 길이와 넓이
반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ(라디안)인 부채꼴의 호의 길이를 l, 넓이를 S라고 하면 $l=r\theta$, $S=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}rl$

그러나 이와 같은 내용은, 현재의 단계형 수준별 교육과정에 따라 내용의 반복이 억제되는 방향과는 다소 거리가 있어 보인다. 왜냐하면 수학 7-나의 대부분의 교과서에서 이미 부채꼴의 호의 길이와 넓이를 구하는 공식을 다루고 있기 때문이다. 물론 라디안이라는 새로운 각을 이용하여 호의 길이를 구하는 내용이 첨가되기는 하였으나, 그것은 각의 표현만 달라진 것 일뿐 수학적으로 중요한 의미를 찾기는 어렵다고 생각되는 데 비해, 이러한 반복은 자칫 학습의욕을 감소시킬 우려가 있다.

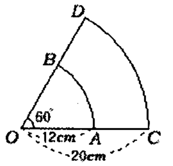
대신에 부채꼴 부분에서 다루어야 할 중요한 내용은 부채꼴의 닮음이라고 생각된다. 왜냐하면 호도법을 이용한 각의 표시에 있어서 닮음은 핵심적 개념이며, 나아가 삼각함수를 단위원을 이용하여 전개할 수 있게 하는 데 요긴해 보이기 때문이다. 이것을 위하여 다음과 같은 탐구문제를 생각해 볼 수 있다.

<표 IV-2> 탐구활동

탐구활동

다음의 그림은 중심각의 크기가 $60°$이고, 반지름의 길이가 각각 12cm, 20cm인 두 부채꼴을 겹쳐 놓은 것이다.

다음 물음에 답하여라.



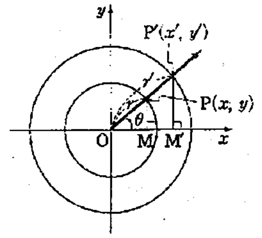
① $\widehat{AB}$와 $\widehat{CD}$의 길이를 각각 구하여라.

② 부채꼴의 반지름에 대한 호의 길이의 비, $\dfrac{\widehat{AB}}{12}$와 $\dfrac{\widehat{CD}}{20}$를 각각 구하여라.

③ 반지름의 길이가 r이고 중심각의 크기가 $60°$인 부채꼴에서 반지름의 길이에 대한 호의 길이의 비를 구하여라. 그 값은 ②에서 구한 값과 같은가?

삼각함수의 뜻

다음의 그림과 같이 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r, r'인 두 원과 한 반직선이 제1사분면에서 만나는 점을 각각 $P(x, y)$, $P'(x', y')$이라고 할 때, 다음을 알아보자.



위와 같은 탐구활동을 통하여 중심각이 같은 모든 부채꼴은 닮음이고 반지름과 호의 닮음비가 같다는 사실을 강조함으로써 호도법의 각 표시에 대한 정당성이 이해될 수 있다. 더욱 중요한 또 하나의 이유는 삼각함수의 정의를 더욱 명료하게 하기 위한 것이다. 현재의 교과서에서 삼각함수의 정의를 어떻게 소개하고 있는지 살펴보면, 대부분의 교과서에서는 반지름이 r인 원을 이용하여 삼각함수를 정의하고 있다.

반지름이 r인 원에서 삼각함수를 정의할 때, 이 설명이 명료해지려면 반지름 r과 관련한 보충설명이 필요하다. 삼각비는 세변의 길이가 이미 정해진 직각삼각형에서 한 예각에 대한 세 변 사이의 관계에 대한 것인 반면, 삼각함수는 원 운동하는 물체의 동경의 일반각과 좌표 사이의 관계이다. 따라서 삼각함수의 정의에 있어서의 핵심은 θ에 의해서 x, y의 좌표가 결정된다는 것이지만, 이것이 함수임을 분명히 하는 것도 중요하다. 그렇지 않으면 삼각비의 확장이라고 해야 하고, 이 경우 확장의 방법이 어려워지게(관련 삼각형을 만들 수 없음) 된다.

따라서 삼각함수는 일반각 θ에 따라 x, y의 좌표가 정해지는 것이 좋다. 왜냐하면 함수는

독립변수와 종속변수가 분명히(explicitly) 드러나는 것이 처음 배우는 학생에게는 더 쉬울 것이기 때문이다. 가령 일차함수의 매개변수 a, b에서 $y = ax+b$는 a, b에 따라 그래프 모양이 변하는 것처럼 매개변수 r에 따라 삼각함수의 그래프가 변할 것을 기대하게할 염려가 있다는 것이다. 즉 삼각함수를 정의하는 단계에서 한꺼번에 $y = a\sin bx + c$와 같은 것을 잘못 기대하게 하는 원치 않는 효과가 발생될 수 있다.

이것은 단순한 것부터 출발하고 단계적으로 학습내용을 구성한다는 원칙과는 상충된다. 따라서 반지름이 r인 원에서 삼각함수를 정의할 때, r은 또 하나의 매개변수(parameter)인 지, 그 정체가 분명치 않으며 처음 배우는 학생입장에서는 혼란의 원인이 될 수 있다. 물론 '반지름의 길이 r에 관계없이 θ에 따라 그 값이 일정하다'라고 언급되어 있지만 이를 분명히 하려면 도형의 닮음과 관련하여 다음과 같은 전제사항이 필요할 것이다(B교과서, p161).

<표 IV-3> 삼각함수의 뜻

위의 활동에서 $\triangle OPM \backsim \triangle OP'M'$ 이므로, $\frac{x}{r} = \frac{x'}{r'}$, $\frac{y}{r} = \frac{y'}{r'}$, $\frac{y}{x} = \frac{y'}{x'}$ 임을 알 수 있다. 그러므로 일반각의 크기를 θ라 하면 $\frac{y}{r}$, $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{x}$의 값은 반지름의 길이 r에 관계없이 θ에 따라 하나로 결정된다.

위의 설명에 따르면 중심각이 같은 두 부채꼴은 닮음이고, 그 부채꼴에서 수선의 발을 내려 만든 두 직각삼각형 역시 닮음이므로, 두 직각삼형의 닮음비는 일정하다. 그러므로 r의 값에 관계없이 θ에 따라 그 값이 하나로 결정된다. 이것은 삼각함수를 정의하기 위해서 반지름 1인 원을 사용해도 좋음을 허용함으로써 단위원에서 $x = \sin\theta$, $y = \cos\theta$의 정의가 가능해진다. 또 탄젠트함수는 합성함수인데 이를 위해서는 상황이 복잡해짐으로 함수를 정의하기 보다는 새로운 기초, 즉 $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ ($\cos\theta \neq 0$)로 하는 것이 더 바람직해 보인다. 삼각함수를 정의하는데 있어서 현재 4종의 교과서는 위와 같은 언급을 전혀 하지 않고 있어, 더욱 염려스러운 서술이라고 생각된다.

나머지 9종의 교과서는 닮음에 대한 내용을 간단히 삼각함수의 정의에 포함하여 제시함으로써 동시에 두 가지 내용을 다루고 있다. 즉, 삼각함수의 정의를 소개하면서 탐구활동으로 닮음에 대한 내용을 같이 제시하는 것이 더 일반적이다. 그러나 닮음을 삼각함수의 정의에 포함하여 다루는 것은 삼각함수의 정의가 길고 복잡해져서 이해를 어렵게 하며 삼각비와의 구분도 약해지므로 논리적 맥락이 흐려질 우려가 있다.

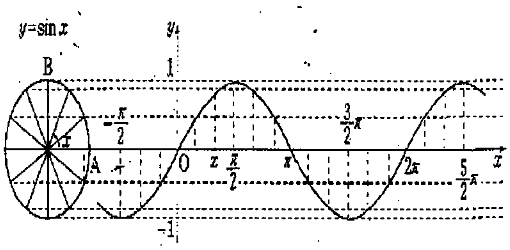
닮음에 대한 내용을 따로 떼어서 부채꼴 부분에서 닮음을 확실히 해놓으면, 삼각함수의 정의 부분에서는 부채꼴에서 배운 닮음의 내용이 이어지면서, 단위원에서의 정의만으로 충분할 수 있게 되는 것이다. 따라서 좀 더 쉽게 삼각함수의 정의를 받아들일 수 있을 것이라 생각된다. 그리고 다음단계에서 반지름 r인 원에서 x, y의 좌표는 닮음비만큼을 곱하여 x, y 좌표를 구하는 것은, 삼각함수 정의의 응용으로 처리할 수 있을 것이다.

2. $\sin\theta$, $\cos\theta$의 그래프 그리기

현재의 교과서에서는 삼각함수의 그래프를 어떻게 설명하고 있는지 알아보기 위해 13종 교과서 수학 10-나 삼각함수 단원 중 "삼각함수의 그래프"의 구성을 살펴보았다. $\sin\theta$의 그

래프를 제시하는 방식에 있어서는 8종의 교과서에서는 단위원에서 그래프로 바로 제시하는 방법을 택하였고, 3종의 교과서에서는 단위원에서 그래프를 제시하기 이전에 $\sin\theta$의 값을 $90°$의 간격으로 값을 구해놓고 그 사이 그래프의 모양을 화살표의 방향을 이용하여 대충의 개형을 알 수 있게 하였다. 2종의 교과서에는 교과서의 부록에 실려 있는 삼각함수표를 이용하여 $\sin\theta$ 값의 순서쌍을 구하게 하고, 그것을 좌표평면에 직접 점으로 찍어보게 하여 좀 더 정확한 개형을 추측하게 한 후, 단위원에서 그래프를 제시하고 있다. $\cos\theta$의 그래프 역시 대동소이 하였다. $\sin\theta$의 그래프를 중심으로 이들 각 경우의 대표적 설명방식은 아래와 같다.

가. 단위원에서 바로 그래프를 제시한 경우(I 교과서, pp165~166)



[그림 IV-1] 단위원 그래프

위는 단위원의 원운동을 펼쳐서 좌표평면에 나타내게 하는 것으로 단위원에서 바로 그래프를 도입하는 것인데, 삼각함수의 그래프를 위와 같은 방법으로 설명하는 것은 학생들에게는 생소한 방법이다. 학생들에게 그래프 그리기에 익숙한 형태는, 점을 찍어서 이어 붙이는 것이다. 위의 방법을 학생들에게 이해시키려면 결국 삼각함수의 정의에 대한 확실한 이해를 바탕으로 해야 한다. 삼각함수의 정의의 이해가 불충분한 학생에게는 여기부터 선수학습 부족이 문제를 일으키는 상황이 된다. 따라서 적어도 선수학습을 확인한 후에 이 방법에 대한 설명이 필요해 보이며 결국 어느 정도 삼각함수의 정의에 대한 학습이 반복될 수밖에 없다. 만약 삼각함수의 정의 후에 바로 그래프 그리기 수업이 이어진다면 문제되지 않겠지만 그렇지 않고 수업이 일단 삼각함수의 정의에서 끊어지고, 다음 수업 시간에 그래프 그리기로 이어진다면 삼각함수의 정의를 복습해야만 하는 수업 방법이 요구된다고 생각되며 따라서 수업의 효율성을 염려케 하는 측면이 있다. 그러나 단위원의 원운동을 이용한 [그림 IV-1]의 방법은 삼각함수의 특징적 측면으로서 독특한 장점을 지닌다. 따라서 어떤 형태로든지 이와 같은 방법이 소개될 필요는 있다고 생각된다. 다른 방법으로는 다음과 같은 경우이다.

나. 화살표의 방향을 이용하여 개형을 제시한 경우(D교과서, pp 178~179)

<표 IV-4> 개형을 제시한 경우

θ	…	0	…	$\frac{\pi}{2}$	…	π	…	$\frac{3}{2}$	…	2π	…
$\sin\theta$		0	↗	1	↘	0	↘	-1	↗	0	

위의 교과서에서는 그래프의 개형을 화살표의 방향을 이용해 눈으로 짐작할 수 있게 한 후에, 단위원에서 그래프를 제시하는 방식을 택하였다. 이러한 활동을 추가함으로써 처음부터 단위원에서 그래프를 바로 제시하는 방식보다는 좀 더 쉽게 그래프의 개형을 추측하게 할 수 있지만, $90°$의 간격으로 함수 값을 표시하고 있으므로 그 사이에 값들에 대해서는 설명이 충분치 못하다는 단점이 있다. 그 사이의

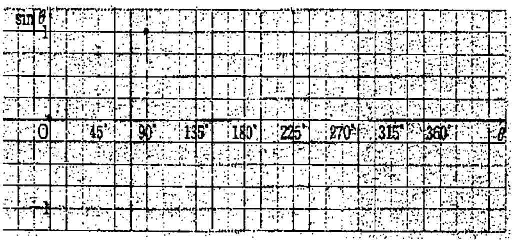
값들에 대해서는 삼각함수표를 보거나 잠시 값의 변화를 숙고하게 하는 과정을 필요로 한다. 이 과정은 평소 그래프 그리기에서 점을 찍어 잇는 방법과 근본 맥락은 같다고 보여 진다. 이를 보완하여 우리는 다음과 같은 가장 평범한 방법을 제안한다.

다. 함수 값의 순서쌍을 구해 좌표평면에 찍어보게 한 경우(L교과서, pp 192~194)

<표 IV-5> 함수 값의 순서쌍

θ	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°
$\sin\theta$	0	0.26	0.50	0.71	0.87	0.97	1	0.97	0.87	0.71	0.50	0.26

θ	180°	195°	210°	225°	240°	255°	270°	285°	300°	315°	330°	345°
$\sin\theta$		-0.26				-0.97			-0.87	-0.71		



[그림 IV-2] 함수 값의 좌표평면

위의 방법은 삼각함수표를 통해 사인함수의 순서쌍을 구하여 좌표평면에 찍어보게 한 후, 단위원에서 그래프를 제시하는 방식을 택하였다. 학생들은 과거 일차함수나 이차함수의 그래프를 그릴 때에 함수의 순서쌍을 구하여 그것을 좌표평면에 점으로 찍어서 그 개형을 추측해보는 활동으로 시작하여 그래프를 완성하도록 배워왔다. 이것은 유리함수나 무리함수의 그래프를 그릴 때에도 마찬가지이다. 어떤 함수에 대한 그래프를 처음 배운다면 당연히 함수 값에 대한 순서쌍을 구하고 그것을 좌표평면에 한 점씩 적당한 간격으로 찍어가며 그래프의 개형을 추측하는 가운데 진정한 그래프의 개형이 완성될 수 있는 것이다. 이것은 그래프를 그리기에 있어 가장 기본이 되는 방법이고, 그동안 다른 그래프들을 이런 방식으로 배워왔던 학생들에게 더욱 친숙한 방식이라는 장점을 가지고 있다. 따라서 삼각함수의 그래프 또한 순서쌍을 구하여 좌표평면에 점찍어 보게 하는 것이 가장 쉽고, 효과적인 방법이 될 것이다. 그러나 현재 교과서 중에서 2종의 교과서가 이러한 방법을 택하고 있다.

삼각함수의 그래프는 과거 6차 교육과정에서 예각에 대한 그래프를 중학교 3학년 삼각비에서 다루었는데, 7차 교육과정에서는 이 부분이 완전히 수학 10-나 단계로 넘어왔다. 즉 학생들은 삼각함수의 그래프를 10-나에서 처음 배우게 되는 것이다. 따라서 삼각함수의 그래프를 어렵게 느낄 수 있다. 그러므로 교과서에서는 가능하면 학생들에게 더욱 친숙하고 쉬운 방식으로 지도하는 것이 바람직하다. 앞서의 방법들이 지닌 여러 가지 장점들을 추가한 다른 접근 방식은 저자의 의도에 따라 추가의 그래프 학습과정에서 가감할 수 있을 것이다.

3. 삼각함수의 주기에 관한 고찰

현재의 교과서에는 삼각함수 그래프의 주기에 관하여 어떤 내용을 다루고 있는지 알아보기 위해 수학 10-나 13종 교과서 삼각함수 단원의 "삼각함수의 그래프"의 구성을 살펴보았다. 삼각함수의 주기에 대하여는 13종의 교과서들이 별다른 차이점을 보이지 않았다. 대부분의 교과서들이 사인함수, 코사인함수의 그래

프의 개형을 설명하면서 삼각함수의 그래프가 가지는 주기성에 주목하여 $f(x+p)=f(x)$가 성립하는 것을 그래프 상에서 눈으로 확인하게 하고, 이 식을 만족시키는 최소의 양의 값을 주기라고 설명하는 방식이 일반적이었다. 그리고 이후에도 주기를 구하기 위해 그래프를 그려서 시각적으로 구하는 방법이 이용되는 교과서도 있다. 그러나 간편성을 위해 대수적 방법으로 $f(x+p)=f(x)$ 임을 이용하여 풀이하는 다음과 같은 방식이 많았다.

<u>보기: $y=\sin 2x$의 주기를 구하여라.</u>

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin 2x \\ &= \sin(2x+2\pi) \\ &= \sin 2(x+\pi) \\ &= f(x+\pi) \end{aligned}$$

이므로 함수 $y=\sin 2x$의 주기는 π이다. (A교과서, p 158)

그런데, 이 과정은 설명의 비약으로 인해, 충분한 검토가 없으면 학생들에게 오해를 불러일으킬 여지가 있다. $\sin 2x=\sin 2(x+\pi)$라고 한 후, 곧바로 그리하여 $y=\sin 2x$ 의 주기가 π라고 제시되는 것은 다소 성급한 결론으로 보인다. 물론 제한된 지면에서 f(x+p)=f(x)인 최소의 양수 p가 π임은 스스로 알아보기를 기대한 것으로 해석되지만, 학생들에게 π가, 가능해 보이는 p의 최소 양수임을 확인하는 과정은 생략해도 되는 듯한 오해를 불러일으킬 수 있다는 것이다.

<표 IV-6> $y=\sin 2x$의 주기

$\sin 2(x+\pi)=\sin 2x$ $\sin 2(x+2\pi)=\sin 2x$ $\sin 2(x+3\pi)=\sin 2x$ .... 이 중에서 $\sin(x+p)=\sin x$를 만족하는 최소인 양수는 π이므로, $y=\sin 2x$의 주기는 π이다.

한편, 삼각함수의 그래프를 설명하면서 주기를 도입하는 위의 설명 방법과는 달리, 실용성을 위주로 하여 주기의 개념을 좀 더 직관적으로 설명할 수 있는 방안은 없는지 생각해 보았다. 아래의 탐구활동은 일차함수적 변환에 따른 주기의 변화를 논의함에 있어서, 일차함수적 변환을 측정단위의 변화로 파악하여 직관적으로 설명해 보려는 것이다. 즉 주기가 2 π inch이면, 1 inch를 약 2.5cm라 할 때, 5 π cm라고 설명하는 방식이다.

탐구활동
어느 나라에서는 파동의 방정식을 $w=\sin z$ 라고 적을 때, w와 z의 단위는 모두 인치(inch)라고 한다. 이것을 1인치 $\fallingdotseq$2.5 cm 임을 고려하여, $y=2.5w$, $x=2.5z$로 하자. 이때, $w=\sin z$는 $\frac{y}{2.5}=\sin\frac{x}{2.5}$로 나타낼 수 있다. 즉, $y=\frac{5}{2}\sin\frac{2x}{5}$이다. 다음 물음에 답하여라. ①. $w=\sin z$에서 이 함수의 주기는 몇 인치인가? 또, w의 최댓값과 최솟값을 말하여라. ②. ①의 주기와 최댓값, 최솟값을 cm로 말하여라.

위의 문제에서 1인치가 단위인 $w=\sin z$의 파동 방정식을 1센티미터가 단위인 x, y에 관한 파동 방정식으로 나타내면 $\frac{y}{2.5}=\sin\frac{x}{2.5}$ 라고 할 수 있다. 즉 $y=2.5\sin\frac{x}{2.5}$의 주기는, $w=\sin z$의 주기가 2 π inch임으로, 5 π cm 라고(최댓값, 최솟값도 y에 대한 단위 변화로 설명할 수 있다.) 설명하는 것이다. 이에 대한 일반화 과정에서는 a,b>0에 대하여 y=asinbx의 주기는 그러므로 $\frac{2\pi}{b}$라고 한 후에, a 또는 b가 음수인 경우는, 즉시 더 일반화하여 y=asin(bx c)+d의 그래프와 y=|a|sin|b|x의 그래프와의 평행 또는 대칭이동 관계를 상상하게 하거나, 공학적 도구를 통해 보여 주어 주기의 변화, 최대 최솟값의 변화를 생각해 보게 함으로써 가능해 질 것으로 생각된다.

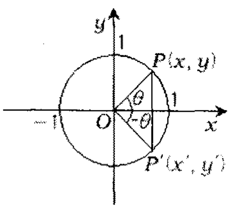
4. 삼각함수의 성질에 대한 설명방식

현재의 교과서에서는 삼각함수의 성질을 어떻게 설명하고 있는지 알아보기 위해 13종 교과서 수학 10-나 삼각함수 단원의 "삼각함수의 성질"의 구성을 살펴보았다. 13종 교과서를 분석해 보면 9종의 교과서에서 삼각함수의 성질이 먼저 전개되고, 그래프가 그 다음에 전개되었으며, 나머지 4종의 교과서에서는 그래프가 먼저 전개되고, 성질이 그 다음에 전개되었다. 이와 같은 구성순서의 차이와는 무관하게 13종 모두의 교과서는 삼각함수의 성질을 설명하기 위하여 단위원에서 대칭이동을 이용하는 방식을 택하였다. 대표적인 예는 다음과 같다.

가. 단위원에서 대칭이동을 이용한 설명

$-\theta$의 삼각함수를 θ의 삼각함수로 어떻게 나타낼까?

아래 그림과 같이 각 θ의 동경과 각 $-\theta$의 동경이 단위원과 만나는 점을 각각 $P(x, y)$ $P'(x', y')$이라고 하면 점 P와 점 P'은 x축에 대하여 대칭이므로



$x' = x$, $y' = -y$이다. 이 때,

$x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$

$\sin(-\theta) = y' = -y = -\sin\theta$

$\cos(-\theta) = x' = x = \cos\theta$

$\tan(-\theta) = \frac{y'}{x'} = -\frac{y}{x} = -\tan\theta$

따라서 다음과 같은 공식이 성립한다. (D교과서, p 173)

<표 IV-8> $-\theta$의 삼각함수

$-\theta$의 삼각함수
$\sin(-\theta) = -\sin\theta$, $\cos(-\theta) = \cos\theta$, $\tan(-\theta) = -\tan\theta$

위의 방법은 단위원에서 대칭이동을 이용하여 $-\theta$의 삼각함수를 설명한 것인데, 이 경우 θ는 일반각이므로 θ가 어떤 사분면의 각이냐에 따라 각기 다른 그림이 모두 제시되어야 완전한 증명이 될 수 있다. 그러나 위의 설명에서는 θ가 1사분면에 있는 각일 경우의 그림만을 제시하고 있으므로 θ의 값이 2, 3, 4분면에 있을 경우에 대한 설명이 불충분하다. 일반각 θ에 대해서 성립함을 보이기 위해서는 몇 개의 그림이 추가로 제시되고, 각 사분면에 있을 때 모두 성립한다는 것을 각각 설명해주어야 한다. θ가 1사분면에 있는 각일 경우의 그림은 θ가 4사분면에 있는 경우의 그림과 비슷하고, 2사분면에 있는 각일 경우의 그림은 3사분면에 있는 경우의 그림과 유사하다는 것을 감안하더라도, 적어도 두 개의 그림이 있어야 하고, 그림은 두 개일 지라도 설명은 각 사분면에 대해서 따로 해주어야 하는 것이 바람직할 것이다. 그러나 이렇게 설명 하다보면 비슷한 그림과 설명이 반복되어 그 과정에서 학생들이 지루해하고 흥미를 잃을 우려가 있다. 이에 대한 대안으로 삼각함수의 그래프를 이용하여 다음과 같은 방법을 생각해 볼 수 있다.

나. 삼각함수 그래프를 이용한 대안적 설명방법

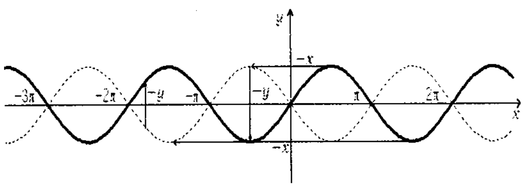
교과서의 구성순서에 있어 삼각함수 그래프

를 먼저 배웠다면, 삼각함수의 성질을 좀 더 효율적으로 이해하기 위해서 그래프를 이용할 수 있다. 특히 삼각함수의 그래프가 갖는 주기성(사인함수가 평행이동을 하여 코사인함수가 될 수 있음)이나 대칭성을 활용한다면 더욱 효과적이다. 그래프를 이용하여 삼각함수의 성질을 설명하기 위해 다음과 같은 예를 생각해 볼 수 있다.

<표 IV-9> - x의 삼각함수

-x의 삼각함수
삼각함수를 대칭이동 하면 어떤 변화가 생기는가?

다음 그림은 $y=\sin x$의 그래프와 $y=\sin x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동 한 $y=\sin(-x)$의 그래프 및 x축에 대하여 대칭이동 한 $y=-\sin x$의 그래프를 함께 나타낸 것이다.

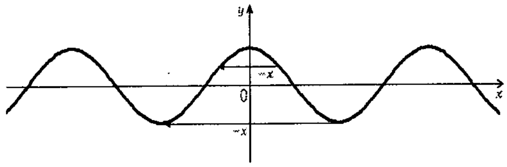


[그림 3] $y=-\sin x$의 그래프

$y=\sin x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동 한 $y=\sin(-x)$의 그래프와 x축에 대하여 대칭이동 한 $y=-\sin x$의 그래프가 서로 일치하는 점선의 그래프임을 알 수 있다.

따라서 일반적으로 $\sin(-x)=-\sin x$가 성립함을 알 수 있다.

또, 다음 그림에서 $y=\cos x$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 $y=\cos(-x)$의 그래프와 $y=\cos x$의 그래프가 같다. 따라서 $\cos(-x)=\cos x$가 성립함을 알 수 있다.



[그림 IV-3] $y=\cos x$의 그래프

또, $\tan(-x)=\dfrac{\sin(-x)}{\cos(-x)}=\dfrac{-\sin x}{\cos x}=-\tan x$ 이므로 $\tan(-x)=-\tan x$임을 알 수 있다. 이상을 정리하면 다음과 같다.

<표 IV-10> -x의 삼각함수

-x의 삼각함수
$\sin(-x)=-\sin x$ $\cos(-x)=\cos x$ $\tan(-x)=-\tan x$

위와 같은 방법은, 증명하는 방법에 비해 더 직관적인 방법이라고 할 수 있는데, 수학적 시각화를 통한 삼각함수단원의 효율적 지도방안에 관한 이종엽(2006)의 연구에 따르면, 학생들은 수식으로 길게 표현된 것 보다 시각적으로 제시된 수학적 개념이나 정리에 대하여 더욱 강한 확신을 갖게 된다고 하였다. 또한 삼각함수 단원 이전에 이미 함수 그래프의 대칭이동과 평행이동을 배운 학생들에게 더 친숙한 방법이며 "그래프의 이동" 학습에 대한 강화 효과도 기대할 수 있다.

또한 위와 같이 그래프를 이용하여 삼각함수의 성질을 설명하는 것은 단위원을 이용하여 설명하는 것보다 그래픽 계산기와 같은 공학적 도구를 사용하기에 더 적합하다. 가령 그래픽 계산기에서 $y=\sin x$ 와 $y=\cos(x-\frac{\pi}{2})$의 그래프를 함께 그리게 한 후, 그래프가 한 개만 그려

진 이유를 생각하게 하여 $\sin x = \cos(x - \frac{\pi}{2})$임을 이해시킬 수 있다. 교육인적자원부가 2007년에 고시한 수학과 교육과정(대한교과서주식회사, p 43)에 제시된 유의사항을 보면 계산 능력 배양을 목표로 하지 않는 경우의 복잡한 계산 수행, 수학적 개념, 원리, 법칙의 이해, 문제해결력 향상 등을 위하여 계산기, 컴퓨터, 교육용 소프트웨어 등의 공학적 도구와 다양한 교구를 확보하여 활용할 것을 권고 하고 있다. 이를 위하여 삼각함수의 성질을 그래프를 이용하여 설명한 후에 교과서에 제시된 그래프를 학생이 그래픽계산기를 이용하여 직접 눈으로 확인하게 하는 활동을 덧붙이는 것은 좋은 예가 될 수 있다. 그러나 단위원에서 대칭이동을 이용하여 성질을 설명한 경우에는 그래픽계산기를 사용하려면 그 방법이 쉽지 않아 보인다. 공학 도구 사용을 단순히 권장하기 보다는 공학 도구를 쓸 수 있는 여러 환경 여건을 갖추는 것이 필요하며 여기에는 교과서의 서술형식도 중요한 부분이라고 생각한다. 따라서 삼각함수의 성질을 그래프를 이용하여 설명하고, 그래픽 계산기를 활용하여 교과서에 나온 그래프를 확인하게 하는 방법을 제안해 본 것이다.

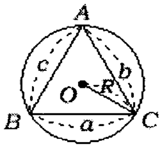
5. 사인법칙의 설명방식

현재의 교과서에서는 사인법칙을 어떻게 설명하고 있는지 알아보기 위해 13종 교과서 수학 10-나 삼각함수 부분의 응용 단원인 “삼각형에의 응용”을 살펴보면 13종의 교과서 중 12종에서 삼각형의 외접원을 이용하여 각 A의 크기를 예각, 직각, 둔각으로 나누어서 각 A의 경우에 대한 증명을 해보이고, 같은 방식으로 각 B와 C에 대해서도 일반화시키고 있다. 그 대표적인 설명은 아래와 같다.

<표 IV-11> 사인법칙

사인법칙

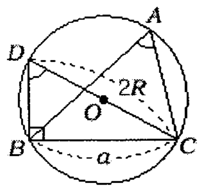
다음 그림과 같이 △ABC에서 각의 크기를 각각 $\angle A, \angle B, \angle C$ 또는 A, B, C로 나타내고 이들의 대변의 길이를 각각 a, b, c로 나타내기로 한다.



$\triangle ABC$의 접원의 중심을 O, 반지름의 길이를 R라 할 때, $\frac{a}{\sin A} = 2R$ 가 성립함을 알아보자.

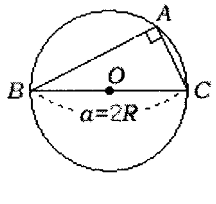
$\angle A$의 크기에 따라 다음과 같이 세 가지 경우로 나누어 생각한다.

(i) $\angle A$의 크기가 예각일 때,



점 C 에서 중심 O를 지나 지름 $\overline{CD}$를 그리면 $\angle A = \angle D$, $\triangle DBC$ 에서 $\angle DBC = 90°$ 이므로 $\sin D = \frac{a}{2R}$ 따라서 $\sin A = \frac{a}{2R}$, $\frac{a}{\sin A} = 2R$이다.

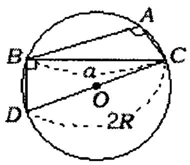
(ii) $\angle A$가 직각일 때,



$\sin A = \sin 90° = 1$, $a = 2R$

따라서, $\frac{a}{\sin A} = \frac{2R}{1} = 2R$ 이다.

(iii) $\angle A$가 둔각일 때,



점 C에서 중점 O를 지나는 지름 $\overline{CD}$를 그으면 ABCD는 원에 내접하므로 $\angle D + \angle A = 180°$, $\angle D = 180° - \angle A$,

$\therefore \sin D = \sin(180° - A) = \sin A$

$\triangle BDC$에서 $\angle D = 90°$이므로 $\sin D = \frac{a}{2R}$

따라서, $\sin A = \frac{a}{2R}$, $\frac{a}{\sin A} = 2R$이다. (i), (ii), (iii) 으로부터 $\angle A$의 크기와 관계없이 $\frac{a}{\sin A} = 2R$ 이다.

$\angle B$와 $\angle C$에 대해서도 이와 같은 방법으로 생각하면, $\frac{b}{\sin B} = 2R$

$\frac{c}{\sin C} = 2R$ 임을 알 수 있다. 이상으로부터 다음과 같은 사인법칙을 얻는다. (B 교과서, pp 190~192)

<표 IV-12> 사인법칙

사인법칙 - 임의의 $\triangle ABC$의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면
$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

이와 같이 대부분의 교과서에서는 사인법칙을 증명하는 하나의 방법으로 삼각형의 외접원에서 원주각을 이용하는 방식을 택하고 있다. 위의 증명에서는 삼각형의 세 각 중에 한각 A에 대해서 이 각을 예각, 직각, 둔각으로 나누어 A의 크기에 관계없이 공식이 성립하는 것을 보이고, 이것을 각 B, C의 경우로 일반화시키고 있다.

그러나 학생들이 수학을 어려워하는 이유 중 하나인 증명(이지현, 2006) 특히, 사인법칙의 증명에서 각 A를 예각, 직각, 둔각인 경우로 나누어야 생각해야 하는 것은 번거로운 일이며, 또한 각 B와 각 C에 대해서도 '이와 같은 방법으로 생각하면 각 B와 C에서도 공식이 성립함을 알 수 있다'와 같이 설명 없는 일반화 과정은 학생의 입장에서는 앞에서와 비슷한 얘기의 반복으로 흥미를 잃거나, 건너뛰는 것 같은 설명이 불가피해 지는 것이다. 이에 관한 한 가지 대안은 사인법칙을 좀 더 경제적이고, 원리 중심적으로 가르칠 수 있는 방안을 찾아보는 것이다.

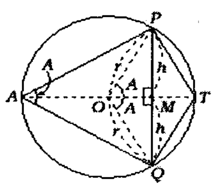
다음 방법을 생각해 보자.

<표 IV-13> 탐구활동 - 사인법칙이란 무엇인가?

탐구활동 - 사인법칙이란 무엇인가?
종이 위에 반지름의 길이가 5인 원을 그리고, 현 PQ를 긋는다. 현의 작은 쪽 원주각 A의 크기와 현 PQ의 길이를 잰 다음, 다음 물음에 답하여라. ① $\overline{PQ} = a$라고 할 때, 계산기를 사용하여 $\frac{a}{A}$ 와 $\frac{a}{\sin A}$의 값을 각각 구하여라. ② 이 두 값을 다른 학생의 값들과 비교하여라.

다음 그림과 같이 반지름의 길이가 r이고, $\overline{PQ} \perp \overline{AT}$, $\overline{PM} = \overline{MQ} = h$인 원이 있다.

이때, 직선 AT는 원의 중심 O를 지나고 $\overline{PQ} = a$ 라고하면 $a = 2h$이다.



$\angle PAQ = A(A < 90°)$라고 하면 $h = r\sin A$
$a = 2h = 2r\sin A$ 이다. 또,
$\angle PTQ = T$라고 하면 $T = \pi - A$ 이므로
$2r\sin T = 2r\sin(\pi - A) = 2r\sin A = a$이다.

즉, $a = 2r\sin T$ 이다. 한편, $A = \frac{\pi}{2}$라고 하면 현 PQ는 지름이므로

$a = 2r = 2r \cdot 1 = 2r\sin A$ 이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

<표 IV-14> 현의 법칙

현의 법칙
반지름이 r인 원에서 원주각이 θ인 현의 길이는 $2r\sin\theta$ 이다.

우리는 사인법칙을 가르치기 이전에 현과 원주각에 대한 고찰로부터 시작할 것을 제안한다. 삼각형의 사인법칙 이라는 것은 현의 법칙으로부터 응용될 수 있는 공식이다. 왜냐하면 현의 법칙에서 현과 원주각에 대한 원리를 알게 되면, 사인법칙에서의 삼각형의 세 변과 세 각이라는 것은 결국 세 개의 현이 삼각형을 이루었을 때, 세 개의 현과 세 개의 원주각으로 이해할 수 있기 때문이다. 사인법칙이란 결국 현의 법칙에서 유도되는 따름정리이고 현의 법칙의 응용일 뿐인 것이다.

앞의 대안적 과정에서 살펴본 현의 법칙의 증명은, 한 개의 그림을 제시하여 예각, 직각, 둔각의 경우를 모두 보일 수 있으므로 더 경제적이고, 원주각이라는 한 각에 대하여 생각을 하는 것이므로 삼각형의 세 각을 각각 증명하는 것보다 간결하여 이해하기 쉽다. 또 현의 공식은 사인법칙의 공식보다 짧고 간단하여 외우기도 쉽다. 이와 같이 사인법칙을 강조하는 대신에 현에 관한 일반법칙으로 접근하게 되면 사인법칙은 덤으로 배우면서 더 근원적이고 중요한 원리를 쉽게 깨우칠 수 있다. 삼각함수 단원과 같이 외워야 할 공식이 많은 단원에서 기억해야할 공식의 수를 줄여주고 간단하게 만들어 주는 것은 학생의 부담을 줄여줄 수 있는 방법이다.

또한 수학을 배우는 가장 큰 이유는 원리를 이용해서 다양하게 나타나는 현상을 더 근원적인 원리 하나로 해석하는 것이다. 이러한 수학적 태도를 조성하기 위해서 보다 유용하고 더 적은 지식을 가지고 응용력을 키울 수 있는 방법이 모색되어야 한다. 현의 법칙이라는 원리를 확실하게 이해시키고, 사인법칙은 스스로 끌어내도록 지도하는 방법은, 쉽고 간단한 일반적인 원리로 학생의 부담은 줄이면서 응용력은 높이는 한 가지 방안이 될 수 있을 것으로 생각된다.

V. 결 론

본 연구의 결과로 얻은 결론은 다음과 같다.

첫 째, 현재의 수학 교과서는 대부분 삼각함수 단원의 도입부에서 호도법의 소개에 이어 부채꼴의 호의 길이와 넓이를 구하는 공식을 제시하고 있으나, 이런 유사하게 반복되는 공식 대신에 부채꼴의 닮음을 강조할 필요가 있다. 이것은 호도법을 이용한 각의 표시에 있어서 핵심적 개념이며, 나아가 삼각함수를 단위원을 이용하여 전개할 수 있게 해 주기 때문이다.

둘 째, 삼각함수의 그래프를 설명하는 방식은, 학생들이 그래프를 그릴 때에 함수의 순서쌍을 구하여 그것을 좌표평면에 점으로 찍어서 그 개형을 추측해보는 활동으로 시작하여 그래프를 완성하도록 배워 왔으므로, 삼각함수의

그래프 또한 순서쌍을 구하여 좌표평면에 점찍어 보게 하는 것이 가장 쉽고, 효과적인 방법이 될 것이다. 그러나 단위원의 원운동을 이용한 기존의 방법이 지닌 장점(동적 상상력에 의한 추론)도 있으므로 이 방법 역시 어떤 형태(예; 익힘문제, 탐구활동 등)를 빌어서라도 소개될 필요는 있다고 본다.

셋 째, 일차 함수적으로 변환된 삼각함수 y=asin(bx+c)+d의 주기를 소개하는 방식은, 일차함수적 변환을 단위의 변화라는 관점으로 이해하여, 실용성을 위주로 도입하는 방법을 고려해 볼 필요가 있다. 이는 학생들이, 수학의 실용성에 대한 분명한 인식을 전달하기 편리하기 때문이다.

넷 째, 현재의 수학 교과서가 삼각함수의 성질을 설명하는 방식을 살펴보면, 13종 대부분의 교과서가 단위원에서 좌표의 대칭이동을 이용하여 삼각함수의 성질을 설명하고 있어 학생들이 지루해하고 흥미를 잃을 우려가 있다. 삼각함수의 성질을 그래프의 대칭이동과 평행이동 등을 이용하여 가르칠 것을 제안하는데, 이는 더 직관적인 방법임으로, 학생들이 이해하기가 쉽고, 삼각함수 단원 이전에 이미 함수 그래프의 대칭이동과 평행이동을 배운 학생들에게 더 친숙한 강화의 과정이 될 수 있으며, 그래픽 계산기 등의 공학 도구를 이용하기에도 더 용이하기 때문이다.

다섯 째, 사인법칙의 증명과 관련하여서는 사인법칙을 가르치기 이전에 현과 원주각에 대한 고찰로부터 시작할 것을 제안한다. 현의 법칙의 증명은 모든 현이 예각과 둔각의, 두 개의 원주각을 가지므로(현이 지름인 경우는 별도로 논의한다면) 삼각형의 세 각을 각각 증명해야 하는 사인법칙의 증명 보다 간단하여 이해하기가 쉽고, 현의 공식은 사인법칙의 공식보다 짧고 간결하여 기억하기도 쉽다. 이와 같이 사인법칙을 강조하는 대신에 현에 관한 일반법칙으로 접근하게 되면 현의 법칙의 응용인 사인법칙은 이 정리의 따름정리로 배우면서, 더 근원적 원리를 간단히 적용하는 응용력을 기르는 데도 도움이 될 것이다.

참고문헌

강 완(1990). **수학적 지식의 교수학적 변환.** 한국수학교육학회지 <수학교육> 제 30권 제 3호 71-89.

____(2001). **원의 넓이 공식에 대한 교수학적 변환 분석.** 서울교육대학교 과학과 수학 논문집27. 37-68.

강 완 · 백석윤(2002). **초등수학 교육론.** 서울: 동명사.

강행고 외 6인(2002). **고등학교 수학 10-나.** 서울: 동화사

교육인적자원부(2007) **수학과 교육과정.**

김신자 외 5인 (2006) **21세기 교육방법 및 교육공학.** 서울: 교육과학사

김세진(2002). **중등수학의 시각화 자료 연구.** 중앙대학교 교육대학원 교육학 석사 학위 논문.

김수환 외 6인(2002). **고등학교 수학 10-나.** 서울: (주)지학사

김 연(2004). **초등학교 수학교과서에 나타난 나눗셈 지도 방법에 대한 분석.** 서울 교육대학교 대학원 교육학 석사학위논문.

김은실(2007). **삼각함수 단원에 대한 인식 조사 및 학습 자료의 개발.** 한국교원대학교 교육대학원 교육학 석사학위 논문.

김진욱(2002). **방법서설.** 서울: 범우사

김현웅(2001). **호도법과 주기함수에 대한 오개념과 오류에 관한 연구.** 한국교원대학교 교

육대학원 교육학 석사학위 논문.

나병채(2002). **고등학교 2학년 학생들의 삼각함수 단원에 대한 이해 실태 분석.** 충북대학교 교육대학원 교육학 석사학위 논문.

박규홍 외 3인(2002). **고등학교 수학 10-나.** 서울: (주)교학사

박배훈 외 4인(2002). **고등학교 수학 10-나.** 서울: 법문사

박세희 외 3인(2002). **고등학교 수학 10-나.** 서울: 동아서적(주)

박수정(2001). **예비교사와 현직교사의 극한개념에 관한 교과 내용적 지식과 교수 학적 지식.** 이화여자대학교 석사학위논문.

박애숙(2001) **삼각비 단원의 학습이 삼각함수 단원의 학습에 미치는 영향에 관한 연구.** 경북대학교 교육대학원 교육학 석사학위 논문.

박지용(2002). **수학 수업에서 교사에 의한 교수학적 변환 연구.** 서울대학교 대학원 교육학 석사학위논문.

박치환(2000). **일차분수함수의 컴퓨터시각화.** 부산대학교 교육대학원 교육학 석사 학위 논문

박혜숙(2006). **문자와 식 영역의 교수학적 변환에 관한 연구.** 한국교원대학교 대학원 교육학 석사학위논문.

신현정(2000). **개념과 범주화.** 서울: 아카넷

신형성 외 1인(2002). **고등학교 수학 10-나.** 서울: (주)천재교육

양승갑 외 8인(2002). **고등학교 수학 10-나.** 서울: (주)금성출판사

우정호(2002). **수학 학습-지도 원리와 방법.** 서울: 서울대학교출판부.

우정호 외 3인(2002). **고등학교 수학 10-나.** 서울: 대한교과서(주)

윤종관(2002). **고등학교 학생들의 삼각함수에 대한 이해 실태 분석 및 오류 지도에 관한 연구.** 공주대학교 교육대학원 교육학 석사학위 논문.

이경화(1993). **학교수학의 교수학적 변환에 관한 연구.** 서울대학교 대학원 교육학 석사학위논문.

이광복 외 3인(2002). **고등학교 수학 10-나.** 서울: 새한교과서(주)

이종엽(2006). **수학적 시각화를 통한 삼각함수 단원의 효율적 지도방안.** 경북대학교 교육대학원 교육학 석사학위 논문.

이지요(1993). **수학교육에서 시각화에 관한 연구.** 한국교원대학교 대학원 교육학 석사학위 논문.

이혜원(2004). **그래프를 중심으로 한 함수개념 지도에 관한 연구.** 경희대학교 교육대학원 교육학 석사학위 논문.

임재훈 외 7인(2002). **고등학교 수학 10-나.** 서울: (주)두산

장건수 외 4인(2002). **고등학교 수학 10-나.** 서울: 지구문화사

장영수(2006). **삼각함수 개념의 이해 실태 분석 및 지도 방안에 관한 연구.** 한국교원대학교 교육대학원 교육학 석사학위 논문.

최봉대 외 6인(2002). **고등학교 수학 10-나.** 서울: (주)중앙교육진흥연구소

최상기 외 3인(2002). **고등학교 수학 10-나.** 서울: (주)고려출판

최온정(2003). **학습지를 이용한 삼각함수의 지도방법 개선에 관한 연구.** 고려대학교 교육대학원 교육학 석사학위 논문.

최종용(2006). **함수 개념의 교수학적 변환에 관한 연구.** 한국교원 대학교 대학원 교육학 석사학위논문.

J. S. Bruner et al (1956), A study of Thinking, New York, Wiley

H. Freudenthal(1981), Major Problems of Mathematics Education, Educational Studies in Mathematics, vol 12, No 2, pp133-150

J. M. Keller(1999), Using the ARCS Motivational Process in Computer-Based Instruction and Distance Education, New Directions for Teaching and Learning, n.78, p39-47, Summer 1999

A Practical Study on Didactical Transposition in the Highschool Trigonometric Function for Closer Use of Manipulative, and for More Real, Principle Based

Lee, Young Ha (Ewha Womans University)
Shin, Jung Eun (Ewha Womans University)

This paper is about didactical transposition, which is to transpose academic knowledge into practical knowledge intended to teach. The research questions are addressed as follows.

1. Are the 13 mathematics textbooks of the 10-Na level indisputable regarding with the didactical transposition, in terms that the order of arrangement and the way of explaining the knowledge of trigonometric functions being analyzed and that its logical construction and students' understandings are considered?

2. Can some transpositions for easier use of didactical manipulative, for more practical and for more principle based be proposed?

To answer these questions, this research examined previous studies of mathematics education, specifically the organization of the textbook and the trigonometric functions, and also compared orders of arranging and ways of explaining trigonometric functions from the perspective of didactical transposition of 13 versions of the 10-Na level reorganized under the 7th curriculum. The paper investigated what lacks in the present textbook and sought a teaching guideline of trigonometric functions(especially about sector and graph, period, characters of trigonometric function, and sine rule).

* key wards : textbook analysis(교과서 분석), trigonometric function(삼가함수), didactical transposition(교수학적 변환)

논문접수 : 2009. 1. 27
논문수정 : 2009. 3. 6
심사완료 : 2009. 3. 13