대한수학교육학회지 <학교수학> 제 11 권 제 1 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.11, No.1, 71-91. Mar. 2009

사례 연구를 통한 분수 나눗셈의 연산 감각 분석

방 정 숙* · 이 지 영**

본 논문은 기본적인 계산능력이 뛰어난 초등학교 6학년 학생 2명을 대상으로 분수 나눗셈 문제를 해결하는 과정에서 나타나는 연산 감각을 분석하였다. 구체적으로 학생들이 분수 나눗셈의 다양한 의미와 모델을 어떻게 이해하고 있는지, 분수 나눗셈 알고리듬의 의미를 어떻게 이해하고 있는지, 그리고 이러한 연산의 의미와 성질을 어떻게 응용하는지에 대해 임상 면담을 통해 면밀하게 탐색하였다. 구체적인 에피소드를 바탕으로 연산감각의 구성요소별로 두 학생의 질적 차이를 분석하고, 이를 기초로 하여 초등학교 고학년에서 연산 감각 자체를 보다 집중적으로 조명해 볼 필요가 있다는 점을 강조하였다.

I. 시작하는 말

'수와 연산' 영역은 초 · 중 · 고등학교 전 과정에 걸쳐 수학의 기본 지식과 기능을 습득하는 기초적이고 핵심적인 영역일 뿐만 아니라 실생활에서도 기본이 되기 때문에 지속적으로 관심을 가져야 하는 영역이다. 그 중에서도 분수 나눗셈은 초등학교 '수와 연산' 영역의 최상위 내용으로, 학생들은 분수 나눗셈을 통해 비율에 의한 양의 비교와 같은 곱셈적 사고와 비례적 사고를 개발할 수 있고, 역연산과 역수[1] 개념을 다루면서 궁극적으로 대수적 사고를 개발하는 기회를 가질 수 있다(Flores, 2002).

한편, 분수 나눗셈에 대한 국내·외 연구가 다양하게 진행되었다는 것만으로도 분수 나눗셈의 중요성을 알 수 있다(예, 강흥규, 2005; 박교식, 송상헌, 임재훈, 2004; 박만구, 2002; 방정숙 & Li, 2008; 임재훈, 김수미, 박교식, 2005; 전평국, 박혜경, 2003; Flores, 2002; Ma, 1999; Siebert, 2002; Sinicrope, Mick, & Kolb, 2002). 이 연구들은 공통적으로 분수 나눗셈과 관련된 교수 · 학습의 어려움을 시사하고 있다.

특히 분수의 나눗셈은 여러 가지 지식을 복합적으로 이용해야 하고(Ma, 1999), 일상생활에서 그 예를 찾기가 어렵기 때문에 난해한 학습 주제이다(전평국, 박혜경, 2003). 또한, 분수 나눗셈에서 제수의 역수가 의미하는 것과 제수의 역수를 곱하는 이유를 이해하는 것은 예비교사들에게조차 매우 고차원적인 사고가 필요한 부분이다(방정숙 & Li, 2008).

이렇듯 분수 나눗셈이 학생들에게 매우 어려운 주제이므로 개념적 이해를 할 수 있는 기회

* 한국교원대학교(jeongsuk@knue.ac.kr)
** 한국교원대 대학원(ez038@naver.com)

1) 우리나라 초등학교 교과서에서는 역수 개념을 취급하지 않는다. 역수는 교육과정 상 <7-가>단계의 용어이다(교육인적자원부, 2007). 그러나, 면담도중 학생들이 '역수'라는 용어를 사용했으므로, 본 연구에서는 이를 나타내기 위해 편의상 '역수'를 사용한다.

를 다양하게 제공해야 하나, 대개는 절차적으로 지도하기 쉽다. 실제, 알고리듬을 이용하여 분수 나눗셈 계산을 충분히 할 수 있는 학생들도 제수의 역수의 의미와 제수의 역수를 곱하는 이유를 모르는 등 연산에 대한 감각이 부족한 경우가 많다(임재훈 외, 2005).

그러나 수 감각에 관한 연구에 비해(예, 방정숙, 2005; 선춘화, 전평국, 2005; 성승현, 정찬식, 노은환, 2008) 연산 감각의 의미를 심도 있게 다루거나 학생들의 연산 감각을 집중적으로 조사한 연구는 매우 부족하다. 물론, 수 감각을 다루는 선행 연구에서 부분적으로 연산 감각을 일부 포함하고는 있으나 수 감각을 강조하는 것에 비해 연산 감각의 비중은 낮기 마련이다(예, Sowder, 1992). 이에 Huinker(2002)는 연산 감각을 수 감각의 하위 요소로만 간주하기보다는 그 자체를 하나의 연구 주제로 강조하면서 분수 연산 감각의 구성 요소를 세분화하였다.

분수 나눗셈을 의미 있게 이해하기 위해서는 연산 감각이 핵심적임에도 불구하고, 분수 나눗셈과 관련된 연산 감각을 집중적으로 조명한 선행 연구는 거의 없다. 결과적으로, 분수 나눗셈과 같은 복잡한 연산을 수행할 때 필요한 다양한 연산 감각을 충분히 설명하기가 어렵다.

이에 본 논문은 Huinker(2002)가 제시한 연산 감각의 개괄적인 구성 요소를 분수 나눗셈에 적용하여 학생 2명의 연산 감각을 분석하였다. 구체적으로 학생들이 분수 나눗셈의 다양한 의미와 모델을 어떻게 이해하고 있는지, 분수 나눗셈 알고리듬을 어떻게 이해하는지, 그리고 이러한 연산의 의미와 성질을 어떻게 응용하는지를 면밀하게 분석하였다.

II. 이론적 배경

1. 수 감각과 연산 감각

가. 수 감각과 수 감각의 구성요소

수 감각은 수와 연산에 대한 직관적인 느낌을 의미한다(Baroody & Coslick, 1998). McIntosh, Reys와 Reys(1992)는 수 감각을 크게 세 가지로 나눠 수 개념(수에 대한 지식과 특성을 다루는 것), 연산(연산에 대한 지식과 특성을 다루는 것), 수와 연산의 응용(수와 연산에 대한 지식과 특성을 계산 상황에 적용하는 것)으로 구분하였다. 또한 Reys, Reys, McIntosh, Emanuelsson, Johansson과 Yang (1999)은 이를 보다 세분하여 수의 의미와 크기를 이해하기, 수의 동치표현을 이해하고 활용하기, 연산의 의미와 결과를 이해하기, 동치식을 이해하고 활용하기, 암산·지필계산·계산기 사용을 위해 융통성 있게 계산하고 세기 전략을 활용하기, 측정 기준척도를 활용하기로 정리하였다. 이는 수 감각의 핵심적인 양상 중의 하나가 연산 감각임을 드러낸 것이라고 볼 수 있다.

한편, Sowder(1992)는 수 감각을 크게 6가지로 구분하였는데, 구체적으로, 수를 자연스럽게 분해하는 능력, 100이나 $\frac{1}{2}$과 같은 특정한 수를 사용하여 수를 표현하는 능력, 문제를 해결하는 데 있어서 산술적인 연산 간의 관계를 활용하는 능력, 십진 체계를 이해하는 능력, 수를 어림하고 이해하는 능력, 수의 상대적 · 절대적인 크기를 인지하는 능력이다. 그러나 이들 중 연산에 관한 내용은 '문제를 해결하는 데 있어서 산술적인 연산 간의 관계를 활용하는 능력' 뿐이고, 나머지는 수의 이해와 더욱 관련되어 있다는 것을 알 수 있다.

이와 같이 기존의 수 감각 연구는 대개 연산 감각을 수 감각의 하위 구성요소로 분류함에

따라 연산 감각을 강조하는 비중이 낮았다.

나. 연산 감각과 연산 감각의 구성요소

연산 감각은 수 감각의 다른 중요한 측면이며, 사칙 연산이 수에 어떠한 영향을 주는가에 대한 느낌이다(Baroody & Coslick, 1998). Huinker(2002)는 연산 감각이 중요함에도 불구하고 수 감각만큼 관심을 받지 못해 왔다고 비판하면서, 연산 감각에 대한 보다 정밀한 연구가 필요하다고 주장하였다. 이에 분수 연산에서 나타나는 연산 감각의 구성 요소를 다음과 같이 7가지로 세분하였다.

첫 번째 구성 요소는 연산 감각의 기본으로써 연산의 다양한 의미와 모델을 이해하는 능력이다. 학생들은 분수 연산을 할 때 사칙 연산에 대한 다양한 의미를 이해해야 하고 이를 계속해서 정교화할 수 있어야 한다.

두 번째 구성 요소는 특정한 연산을 위한 실세계 상황을 인식하고 기술하는 능력이다. 학생들은 연산을 위한 다양한 상황에 정통해야 하고, 연산에 대한 문장제를 직접 만들 수 있어야 한다. 이는 단순히 기계적인 계산을 통해서 획득될 수 없는 연산 감각으로 수학적 상황과 원리의 이해가 필수적이다.

세 번째 구성 요소는 기호와 형식적인 수학 언어의 의미를 이해하는 것이다. 기호와 수학 언어의 의미는 학생들이 가진 개념적 이해와 비형식적인 언어와 각각 연결되었을 때 발달하게 된다. 학생들이 이미 알고 있는 것을 기록하기 위해서 기호를 사용할 때 기호는 사고를 위한 도구가 된다.

네 번째 구성 요소는 다양한 표현을 사용하는 능력이다. 이는 실세계, 구두 언어, 구체적·영상적·상징적 표현의 연결을 강조하면서 강화된다. 학생들은 하나의 표현 양식을 다른 표현 양식으로 자유롭게 변화시킬 수 있어야 한다.

다섯 번째 구성 요소는 연산들 사이의 관계를 이해하는 것이다. 학생들은 이미 자연수의 연산을 통해 덧셈과 뺄셈, 곱셈과 나눗셈 사이의 역관계가 성립한다는 것을 알고 있다. 이를 통해 분수의 연산에 대해서도 역관계를 이해할 수 있어야 한다.

여섯 번째 구성 요소는 수를 구성·분해하고 연산의 성질을 사용하는 것이다. 이는 학생들 스스로 전략을 고안할 수 있는 기초가 된다. 예를 들어, 학생들은 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙 등을 적용하여 자신만의 전략을 만들기도 한다.

마지막으로 일곱 번째 구성 요소는 수에 대한 연산의 결과를 인식하는 것이다. 이는 연산이 수에 어떠한 영향을 미치는가에 대한 직관적인 느낌을 말한다. 연산 감각은 수 감각과 상호작용하며 학생들로 하여금 결과가 합리적인지 아닌지에 대해서 사려 깊은 결정을 하도록 도와준다.

다. 분수 나눗셈에서의 연산 감각

본 연구에서는 분수 나눗셈에서의 연산 감각을 분석하기 위한 기초로 McIntosh 외(1992) 및 Huinker(2002)의 연구를 활용하였다. 우선, 연산 감각을 크게 '연산의 의미 이해', '알고리듬의 의미 이해', '연산의 응용'으로 구분하였고, 분수 나눗셈에서 나타나는 학생들의 연산 감각을 보다 구체적으로 조사하기 위해 <표 Ⅱ-1>과 같이 연산 감각의 구성 요소를 분수 나눗셈을 예로 들어 세분하였다.

2. 분수 나눗셈 및 알고리듬의 의미

가. 분수 나눗셈의 의미

Sinicrope 외 (2002)는 자연수 나눗셈의 의미를 크게 측정나눗셈(포함제), 분할나눗셈(등분

제), 카테시안 곱(Cartesian product)의 역으로 분류하고, 이 의미를 확장하여 분수 나눗셈의 의미를 설명할 수 있다고 하였다. 그러나 분수 나눗셈의 의미를 보다 잘 분석하기 위해서는 단위 비율의 결정(determination of a unit rate)과 곱셈의 역으로서의 나눗셈을 추가해야 한다고 주장하였다. 이 5가지 의미를 간단히 정리하면 다음과 같다.

측정나눗셈은 한 수에 다른 수가 몇 번 들어있는지를 알아보는 상황으로 박교식 외(2004)는 몇 개, 몇 번, 몇 사람과 같이 몫이 이산량으로 주어지면 분수 나눗셈의 계산 결과와 일치하지 않는 상황이 발생할 수 있다는 점을 강조했다.

분할나눗셈은 분배로서의 나눗셈으로 분수를 자연수로 나눌 때 잘 해석된다. 예를 들어, 절반의 케이크를 학생 3명이 똑같이 나누는 상황에서 한 학생이 가지는 양을 구하기 위해 $\frac{1}{2}$을 세부분으로 똑같이 나누면, $\frac{1}{2}\div3=\frac{1}{6}$이 되고, 답은 전체의 $\frac{1}{6}$이 된다.

단위 비율의 결정 의미는 '철근 $\frac{2}{7}m$의 무게가 $\frac{3}{4}kg$일 때, 철근 $1m$의 무게는 몇 kg인가?'와 같이 단위 1에 대한 양을 구하는 것과 관련된다(임재훈 외, 2005). 단위가 되는 철근 $1m$의 무게를 구하기 위한 나눗셈 식은 '$\frac{3}{4}\div\frac{2}{7}=2\frac{5}{8}$'이며 분수 나눗셈의 계산 결과인 $2\frac{5}{8}$가 실제 문제의 해가 된다. 따라서, 단위 비율의 결정 상황은 측정 나눗셈과 달리 분수 나눗셈의 계산 결과와 실제 문제의 해가 그대로 일치한다는 장점이 있다(박교식 외, 2004).

곱셈의 역 의미는 하나의 인수가 빠진 상황에서 곱셈의 역 조작을 통해 답을 구할 수 있다. 예를 들어, 어떤 수에 $\frac{1}{2}$을 곱해서 $1\frac{3}{4}$이 되었을 때, $1\frac{3}{4}$을 $\frac{1}{2}$로 나누어 어떤 수를 구하는 것이다.

카테시안 곱의 역 의미는 직사각형의 넓이와 한 변의 길이를 알 때 다른 한 변의 길이를 구하는 상황이다. 이러한 양과 양의 곱 또는 차원과 차원의 곱은 동수 누가나 배와는 구분되는 상황이다.

나. 분수 나눗셈 알고리듬의 의미

분수 나눗셈 알고리듬 이해의 핵심은 '제수의 역수'의 의미를 이해하는 것이다(임재훈 외, 2005). 제수의 역수가 갖는 의미는 상황에 따라

<표 Ⅱ-1> 분수 나눗셈에서의 연산 감각

연산 감각 요소		분수 나눗셈의 예
연산의 의미 이해	연산의 다양한 의미 및 모델 이해	분수 나눗셈의 다양한 의미와 모델 이해
	연산과 실세계 상황의 관계 이해	분수 나눗셈을 다양한 문장제로 제시
알고리듬의 의미 이해	기호와 형식적 언어의 의미 이해	분수 나눗셈에서 역수의 의미와 역수를 곱하는 이유를 인식
	연산 사이의 관계 이해	나눗셈과 곱셈의 역연산 관계 이해
연산의 응용	다양한 표현으로 전환	분수 나눗셈을 다양한 표현으로 전환
	수를 구성·분해하는 능력과 연산의 성질을 사용하여 자신의 전략 개발	수를 구성, 분해하고 연산의 성질을 사용하여 자신의 전략을 개발
	수에 대한 연산의 결과 인식	분수의 나눗셈의 결과를 인식

다양하다. Siebert(2002)는 제수의 역수를 곱하는 규칙을 'IM(Invert and Multiply) 규칙'이라고 칭하면서, 이 규칙이 실제 나눗셈이라는 것을 강조했다. 또한 제수의 역수의 의미와, 제수의 역수를 곱하는 이유를 측정과 단위 비율의 결정 상황으로 구분하여 설명한다.[2] 예를 들어, '승재는 자전거로 트랙 길이가 $\frac{3}{4}$㎞인 공원을 돌고 있다. 만약 $2\frac{1}{2}$㎞를 돌려면 몇 번 돌아야 하는가?'와 같은 문제에서 분수 나눗셈 알고리듬의 의미는 '$2\frac{1}{2}$안에 $\frac{3}{4}$이 몇 번 들어있는가?'인 측정의 의미이다. 또한 $\frac{3}{4}$의 역수인 $\frac{4}{3}$는 1 안에 $\frac{3}{4}$이 $\frac{4}{3}$번 있다는 것을 뜻한다. 그러므로 제수의 역수를 곱하는 이유는 1안에 $\frac{3}{4}$이 $\frac{4}{3}$번 있기 때문에 $2\frac{1}{2}$안에는 $\frac{3}{4}$이 $2\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}$번 있다는 것으로 설명될 수 있다.

한편 '승진이는 자전거를 타고 $\frac{3}{4}$시간동안 $2\frac{1}{2}$㎞를 갔다. 같은 속도로 자전거를 타고 간다면, 1시간동안 승진이가 간 거리는 얼마인가?'와 같은 단위 비율 결정 맥락의 문제 상황에서 분수 나눗셈 알고리듬의 의미는 '어떤 전체의 $\frac{3}{4}$이 $2\frac{1}{2}$이라면, 전체는 몇 인가?'가 된다. 여기서 전체 1을 구하기 위해 우선 $\frac{3}{4}$대신에 $\frac{1}{4}$을 생각하고 여기에 4를 곱한다고 생각할 수 있다. 그러면 역수는 연산자의 의미로 $\frac{3}{4}$을 $\frac{1}{4}$로 줄인 후(즉, $\times\frac{1}{3}$), 다시 1로 늘리는 과정(즉, x4)으로 볼 수 있다. 결과적으로 역수를 곱하는 이유는 $\frac{3}{4}$을 1로 만들기 위해서 $\frac{4}{3}$로 줄이고 늘리므로, $2\frac{1}{2}$도 $\frac{4}{3}$로 줄이고 늘리기 위해서다.

한편, 임재훈 외(2005)는 분수 나눗셈 알고리듬의 의미를 좀 더 정교하게 구분하였는데 위에서 기술된 '측정', '단위 비율의 결정 맥락'을 포함하여 '비 또는 측정 단위의 세분 맥락', '곱셈의 역연산 맥락', '분수의 곱셈으로부터의 유추'를 추가하여 설명하였다. 그리고 각 맥락에서 역수의 의미가 드러나는지 논하면서[3] 역수의 의미가 보다 명확하게 드러나는 단위 비율의 결정 맥락에서 분수 나눗셈을 도입하여 학생들이 역수의 의미와 역수를 곱하는 이유를 맥락적으로 이해하도록 도와야 한다고 강조하였다.

본 연구의 목적 중 하나는 역수의 의미와 역수를 곱하는 의미 이해에 대한 학생들의 연산 감각을 자세하게 조사하는 것이므로 선행 연구를 토대로 '측정 상황'과 '단위 비율의 결정 상황'의 문제를 이용하였고[4], 이를 통해 학생들이 역수의 의미와 역수를 곱하는 이유를 어떻게 이해하고 있는지 살펴보고자 하였다.

---

2) Siebert(2002)는 역수의 의미와 역수를 곱하는 이유에 대해서 '측정(Measurement)'과 '분배(Sharing)'라는 용어를 사용하여 설명하고 있으나, 이때 '분배' 상황에서 제시된 문장제는 Sinicrope 외(2002)의 '단위 비율의 결정' 맥락과 일치하므로 본 연구에서는 '측정'과 '단위 비율의 결정'이라고 표현하였다.

3) 임재훈 외(2005)에 따르면, '비 또는 측정 단위의 세분 맥락'은 측정 단위를 같게 만들어서 제수가 분수인 나눗셈을 제수가 자연수인 나눗셈으로 환원하는 것으로, 제수의 분모와 분자의 의미, 피제수에 제수의 분모가 곱해지는 이유를 설명해 주지만, 제수의 역수 그 자체의 의미를 분명하게 드러내지는 못한다. 또한 '곱셈의 역연산 맥락'은 분수의 나눗셈을 곱셈의 역연산으로 바꾸어 문제를 해결하는 것인데, 이 과정에서 분수 나눗셈의 알고리듬을 이끌어 낼 수는 있지만, 제수의 역수를 곱하는 이유나 제수의 역수의 의미가 분명하게 드러나지 않는다. 마지막으로, '분수의 곱셈으로부터의 유추'는 분수의 곱셈 알고리듬과 유사하게 분모를 분모끼리 나누고 분자를 분자끼리 나누어서 제수의 역수를 곱하는 과정을 설명하는 것인데, 이 역시 제수의 역수가 갖는 의미를 잘 드러내지는 못한다.

4) 임재훈 외(2005)는 '단위 비율의 결정 맥락'은 역수의 의미와 역수를 곱하는 이유가 명확하게 드러나고, '포함제 맥락(측정)'에서도 제수의 역수는 나름대로의 의미를 가지고 있으며, 그 의미와 관련하여 역수를 곱

III. 연구방법 및 절차

1. 연구방법 개관

본 연구에서 적용한 방법론은 질적 사례연구이며, 이 방법론을 사용한 이유는 크게 두 가지로 요약할 수 있다. 첫째, 본 연구의 목적은 초등학교 6학년 학생들의 연산 감각에 대한 전반적인 실태조사가 아니라 일반적인 분수 나눗셈 문제 상황에서 나타나는 학생들의 연산 감각을 연산의 의미 이해, 연산 알고리듬의 이해, 연산의 응용 측면에서 자세하게 분석하는 것이므로 사례연구가 유용하다. 둘째, 연산 감각에 대한 선행연구가 거의 없기 때문에 이와 관련한 기초 정보를 제공하기 위해 사례연구를 택하였다.

2. 연구대상

다양한 분수 나눗셈 문제 상황에서 초등학교 6학년 학생들이 보이는 연산 감각을 알아보기 위해서 수원시에 소재한 H 초등학교의 6학년 1개 반(37명)을 대상으로 분수 나눗셈 단원평가를 실시하였다. 단원평가는 20문항으로 절차적 지식과 분수 나눗셈 알고리듬을 적용하여 해결할 수 있는 문제로 구성되었다. 총 37명의 학생 중 6명의 학생이 100점을 받았으며, 학생들의 반응을 고려하여 이들 중 4명(남학생 3명, 여학생 1명)을 1차 연구 대상으로 선정하였다. 본 연구는 분수 나눗셈에 대한 연산 감각을 조사하는 것이 주목적이므로 분수 나눗셈 알고리듬이 이미 형식화되어 있는 학생들을 선정하였으며, 다양한 분수 나눗셈 문제 상황에서 나타나는 학생들의 연산 감각을 알아보기 위한 것이므로 식을 잘 세우고 다양하게 표현한 학생들을 선정하였다. 임상면담을 실시하는 도중, 남학생 1명은 자신의 의견을 말로 표현하는데 매우 소극적이었기 때문에, 학생의 사고를 자세하게 파악하기 어렵다고 판단되어 최종 연구대상에서 제외하였다. 한편, 면담 자료를 바탕으로 학생 3명의 연산 감각을 분석한 결과 남학생 2명이 보이는 연산 감각이 매우 유사하여 본 논문에서는 남학생 1명(백승), 여학생 1명(수연)에 대해서만 상세하게 비교분석하였다.

3. 자료 수집 및 분석

면담은 학생들에게 개별적으로 1회에 약 30분씩 총 3회에 걸쳐 실시되었다. 학습자의 연산 감각은 분수 나눗셈 문제를 해결하는 과정에서 나타날 수 있으므로, 면담은 학생이 먼저 문제를 해결한 후, 해결 과정을 설명하는 방법으로 이루어졌다. 면담자는 학생의 이해 정도를 면밀히 관찰하기 위해서 임상면담을 위한 다양한 지침을 활용하였다(Ginsburg, 1997). 주로 활용한 지침은 정당화하도록 요구하기, 학생이 자신의 사고과정을 반성하도록 요구하기, 학생의 반응에 따라 질문을 계속적으로 고쳐 말하기, 학생의 반응에 따라 과제 바꾸기, 되풀이해서 말하고 재검토하기, 반대되는 증거를 제시하기 등이었다. 면담은 비디오로 녹화하였으며, 각각의 면담이 끝난 후 학생들의 활동지, 비디오, 전사 자료를 이용하여 1차 분석을 하였고, 이를 후속 면담에 반영하여 학생의 사고가 자세히 드러나지 않은 부분을 중심으로 다시 면담하였다. 3차에 걸친 면담이 모두 끝난

하는 이유를 설명할 수 있다고 주장하였다. 따라서 본 연구에서는 Siebert(2002)의 연구와 임재훈 외(2005)의 연구를 종합하여 학생들이 다양한 역수의 의미를 이해할 가능성이 있는 상황을 모두 탐색하기 위해 학생들에게 익숙하고, 역수의 의미와 역수를 곱하는 이유가 잘 드러나는 '측정 상황'과 '단위 비율의 결정 맥락'의 문제를 제시하였다.

후 학생들의 면담 내용과 활동지에서 학생들의 사고가 잘 드러나는 부분을 중심으로 연산 감각의 구성요소별로 다시 상세하게 분석하였다.

4. 면담

면담은 각 구성요소별로 모두 3차례에 걸쳐 진행되었으나, 연산 감각의 구성요소들은 서로 밀접하게 연결되어 있으므로, 각 면담의 중점이 되는 구성요소 이외의 다른 구성요소들도 모든 면담에 걸쳐 지속적으로 관찰하였다. 1차 면담은 연산 감각의 구성요소 중 '연산의 의미 이해'를 조사하는 것이 주된 목적으로, 분수 나눗셈의 다양한 상황을 문장제로 제시할 수 있는지, 다양한 분수 나눗셈의 의미를 어떻게 이해하고 해결하는지에 대해 살펴보았다. 먼저, 분수 나눗셈의 다양한 모델에 대한 학생들의 연산 감각을 알아보기 위해 Ma(1999)의 연구를 참고로 하여 '$1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$' 분수 나눗셈을 해결하게 하고, 이에 적합한 문장제를 5개 정도 만들어 보도록 했다. 학생들에게 이와 같은 활동을 가장 먼저 제시한 이유는 여러 형태의 문장제를 경험하기 전에 학생들에게 이미 익숙한 분수 나눗셈의 의미가 무엇인지를 알아보기 위한 것이었다. 그 이후에 Sinicrope 외(2002)와 박교식 외(2004)의 연구를 참고로 하여 측정나눗셈, 분할나눗셈, 단위 비율의 결정, 곱셈의 역, 카테시안 곱의 역 상황의 문장제를 해결하게 하고, 이를 그림이나 말로 다시 표현하면서 그렇게 생각한 까닭을 상세하게 설명하도록 했다. <표 Ⅲ-1>에 제시된 문제들은 1차 면담 과제로 편의상 커피 문제, 파이 문제, 철근 문제, 피자 문제, 운동장 문제로 표현했으며, 이는 면담에서 기본적으로 사용한 문제이다.

<표 Ⅲ-1> 1차 면담내용 및 과제

<table>
<tr><th colspan="2">연산 감각</th><th>면담내용 및 과제</th><th>비고</th></tr>
<tr><td rowspan="6">연산의 의미 이해</td><td>분수나눗셈을 문장제로 제시하는 능력</td><td>• '$1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$'에 어울리는 문장제 5가지 제시하기</td><td>-</td></tr>
<tr><td rowspan="5">분수 나눗셈의 다양한 의미 이해</td><td>• <측정 나눗셈> 선생님이 커피 $1\frac{3}{4}\ell$를 가지고 있다. 한 잔에 $\frac{1}{5}\ell$씩 담아서 마신다면, 몇 잔을 마실 수 있나?</td><td>커피 문제</td></tr>
<tr><td>• <분할 나눗셈> 수빈이는 파이의 $\frac{12}{16}$을 가지고 있다. 3명의 친구에게 똑같이 나누어 준다면 친구 한 명이 받는 파이의 양은 얼마인가?</td><td>파이 문제</td></tr>
<tr><td>• <단위 비율의 결정> 철근 $\frac{2}{7}m$의 무게가 $\frac{3}{4}kg$일 때, 철근 1m의 무게는 몇 kg인가?</td><td>철근 문제</td></tr>
<tr><td>• <곱셈의 역> 효성초등학교 48명의 학생들은 피자를 좋아한다. 이것은 떡볶이를 좋아하는 학생 수의 $1\frac{1}{2}$배이다. 떡볶이를 좋아하는 학생들은 몇 명인가?</td><td>피자 문제</td></tr>
<tr><td>• <카테시안 곱의 역> 효성초등학교 운동장은 넓이가 $\frac{6}{20}m^2$인 직사각형 모양이다. 운동장의 가로의 길이가 $\frac{3}{4}m$일 때 세로의 길이는 얼마인가?</td><td>운동장 문제</td></tr>
</table>

1차 면담 분석 결과 학생들의 사고가 잘 드러나지 못한 부분이나 미진한 부분을 탐색한 후, 이를 2차 면담에서 다시 질문하였다. 또한, 1차 면담에서 '연산의 의미 이해' 외에 관찰된 학생의 '알고리듬의 의미 이해'에 관한 연산감각을 바탕으로 2차 면담의 과제와 질문 내용 등을 조정하였다. 2차 면담은 '알고리듬의 의미 이해'에 대한 학생들의 사고를 집중적으로 알아보기 위해 <표 Ⅲ-2>와 같은 과제를 제시하였다. 먼저, 역수의 의미와 역수를 곱하는 이유에 대한 이해를 알아보기 위해 Siebert(2002)를 참고하여 측정과 단위 비율의 결정 맥락의 문제를 해결하는 과정을 관찰하였으며, 곱셈과 나눗셈의 역연산 관계에 대한 이해를 알아보기 위해 Flore(2002)를 참고하여 곱셈의 역연산 맥락의 문제를 해결해보게 하였다. 이 문제 역시 편의상 '자전거 문제1', '자전거 문제 2', '빠진 인수 문제'로 표현하였다.

3차 면담은 우선 1, 2차 면담 분석 결과 드러난 부족한 부분을 확인한 후, 과제를 조금

<표 Ⅲ-2> 2차 면담 내용 및 주요 과제

연산 감각		면담내용 및 과제	비고
알고리듬의 의미 이해	분수 나눗셈에서 역수의 의미와 역수를 곱하는 이유 인식	• <기호식> $\frac{3}{7}\div\frac{4}{5}=\frac{3}{7}\times\frac{5}{4}$ - $\frac{3}{7}$을 $\frac{4}{5}$로 나눌 때, $\frac{3}{7}$에 $\frac{5}{4}$를 곱하는 이유는 무엇인가? - 이때 $\frac{5}{4}$는 무엇인가?	-
		• <측정 상황> 승재는 자전거로 트랙길이가 $\frac{3}{4}$㎞인 공원을 돌고 있다. 만약 $2\frac{1}{2}$㎞를 돌려면 몇 번 돌아야 하는가?	자전거 문제 1
		• <단위 비율 결정 상황> 승진이는 자전거를 타고 $\frac{3}{4}$시간동안 $2\frac{1}{2}$㎞를 갔다. 같은 속도로 자전거를 타고 간다면, 1시간동안 승진이가 간 거리는 얼마인가?	자전거 문제 2
	나눗셈과 곱셈의 역연산 관계 이해	• 어떤 수에 $\frac{1}{2}$를 곱했더니, $1\frac{3}{4}$가 되었다. 어떤 수는 무엇인가?	빠진 인수 문제

<표 Ⅲ-3> 3차 면담 내용 및 주요 과제

연산 감각		면담내용 및 과제	비고
연산의 응용	분수 나눗셈을 다양한 표현으로 전환	• 1, 2차 면담 과제로 제시된 여러 가지 분수 나눗셈 문제를 다양한 표현으로 나타내기	-
	자신의 전략을 개발	• 1, 2차 면담 과제로 제시된 여러 가지 분수 나눗셈 문제를 다른 방법으로 설명하기	-
	분수 나눗셈의 결과 인식	• 나눗셈의 결과를 $4\frac{2}{3}$보다 크게 하려면 □안에 어떤 수를 넣으면 되는가? $4\frac{2}{3}\div\square$	어림 문제 1
		• 다음을 어림했을 때, 그 값이 가장 큰 것은 무엇일까요? ① $3\frac{3}{5}\div\frac{13}{14}$ ② $3\frac{3}{5}\div\frac{9}{19}$ ③ $3\frac{3}{5}\div1\frac{1}{11}$ ④ $3\frac{3}{5}\div\frac{25}{24}$	어림 문제 2

달리하여 다시 질문하였다. 또한, 1, 2차 면담에서 관찰된 '연산의 응용'과 관련 있는 연산감각을 추가로 탐색한 후, 주로 관찰되지 않은 "분수 나눗셈의 결과 인식"관련 연산감각에 초점을 두어 진행하였다. 3차 면담에서 제시한 과제는 <표 Ⅲ-3>과 같다. 이때, 분수 나눗셈을 다양한 표현으로 전환하는 능력과 분수 나눗셈의 의미와 성질을 사용하여 자신의 전략을 개발하는 능력은 특정한 문제에서만 드러나는 것이 아니므로 모든 면담 과제에서 전반적으로 관찰되었다. 수에 대한 연산의 결과를 어떻게 인식하는지를 알아보기 위해서는 선춘화와 전평국 (2005)의 연구를 참고하여 '어림 문제1'과 '어림 문제2'를 제시하였다.

Ⅳ. 연구결과

1. 분수 나눗셈의 의미 이해

가. 학생들이 만든 분수 나눗셈 문장제 유형

'$1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$'에 어울리는 문장제를 만들어 보게 하자, 학생들은 모두 포함제 의미의 문장제를 4가지씩 제시했다. 학생들이 만든 포함제 의미의 문장제는 '$1\frac{3}{4}$안에 포함된 $\frac{1}{2}$의 개수 알아내기', 또는 '$1\frac{3}{4}$은 $\frac{1}{2}$의 몇 배인지 알아내기' 형태였는데, 자주 오류를 보이기도 하였다.

백승이가 만든 포함제 상황의 문장제는 <표 Ⅳ-1>과 같다. ①번 문장제는 개념적으로 옳은 포함제 맥락의 문장제이며, 분수 표현이 실제 상황의 답과 그대로 일치하는 '몇 배' 상황으로 잘 만들어진 문장제라고 볼 수 있다. 하지만, 단위를 적지 않는 부분적인 오류를 보였으며, '더 많습니까'의 표현은 이 상황에서 적절하지 못하다. 나머지 ②, ③, ④번 문장제는 '몇 배인가?' 라는 말 때문에 외형상 포함제의 형태로 보이나 자세히 살펴보면, $1\frac{3}{4}$을 $\frac{1}{2}$로 나누는 것이 아니라 $1\frac{3}{4}$을 $\frac{1}{2}$로 곱하는 상황이 포함되어 있다. 실제 백승이가 만든 문제의 결과와 이러한 분수의 곱셈 결과가 일치하지는 않지만 이는 문맥상 Ma(1999)가 관찰한 '$\frac{1}{2}$로 나누기'를 '$\frac{1}{2}$을 곱하기'로 오해한 상황으로 해석할 수 있다. 또한, '형의 키가 $1\frac{3}{4}$', '아빠의 몸무게가 $1\frac{3}{4}$'이라고 표현하는 등 각각의 수치에 단위를 기재하지 않는 부분적인 오류를 범했고, 더욱

<표 Ⅳ-1> 백승이가 만든 문장제

문장제 유형	백승이가 만든 문장제	비고
포함제 '몇 배'	• $1\frac{3}{4}$짜리 우유하고 $\frac{1}{2}$우유가 있습니다. 어느 우유가 몇 배 더 많습니까?	①
오류	• 형의 키가 $1\frac{3}{4}$이고, 동생이 형의 반입니다. 형은 동생의 몇 배 입니까?	②
	• 아빠의 몸무게가 $1\frac{3}{4}$이고 아들이 아빠의 $\frac{1}{2}$입니다. 아빠의 몸무게는 아들의 몇 배 입니까?	③
	• 외계인의 마법가루가 $1\frac{3}{4}$ 있습니다. A 외계인은 B 외계인의 반 밖에 없는데 B 외계인의 마법가루가 A 외계인의 마법가루의 몇 배인가? 라고 했는데, B외계인은 $3\frac{1}{2}$배라고 하고, A 외계인은 $2\frac{1}{2}$배라고 하였습니다. 어느 외계인이 맞을까요?	④

이 키와 무게에 대한 실제적인 양감이 부족함을 드러낸다.

수연이가 만든 4개의 문장제는 <표 Ⅳ-2>에 제시되어 있다. 이 중에서 ①, ②번은 '몇 배'의 의미를 갖는 포함제 상황으로 개념적으로 옳은 문장제이다. 그러나 수연이는 '사탕 $1\frac{3}{4}$개, $\frac{1}{2}$개'와 같이 이산량을 분수로 표현하는 오류를 범했으며, '$1\frac{3}{4}$초 또는 $\frac{1}{2}$초 만에 달리는 것'과 같이 시간에 대해 양감이 부족하였다. 또한 ③번 문장제는 '몇 명'의 형태인 포함제인데, 계산의 결과가 분수 형태라서 실제 결과가 일치하지 않게 된다. 마지막 ④번 문장제는 구조적으로 ③번 문장제와 유사해 보이지만, 실제로는 전체를 $\frac{1}{2}$씩 나눈 것이 아니라 '전체 중 $\frac{1}{2}$'이라고 표현함으로써 '$1\frac{3}{4} \times \frac{1}{2}$'에 어울리는 상황을 포함하고 있다.

두 학생들이 분수 나눗셈 상황을 문장제로 제시하는 과정에서 보인 몇 가지 공통점은 다음과 같다. 첫째, 두 학생 모두 공통적으로 분수 나눗셈을 포함제 의미로만 제시하였다. 이는 여러 선행연구(Ma, 1999; 박교식 외, 2004)의 결과와 일치하며, 현행 수학 교과서에 제시된 문장제가 대부분 포함제 맥락이라는 것과 연결해 볼 수 있다. 둘째, 분수 나눗셈 상황을 분수 곱셈 상황과 혼동하는 오류를 보였다. 이는 학생들이 분수 나눗셈 상황과 실생활을 연결하여 생각하기 어려워하며, 이러한 기회가 자주 주어지지 않았기 때문에 나타나는 현상일 수 있다. 마지막으로 분수가 갖는 실제적인 양에 대한 이해가 부족하다. 이는 분수를 하나의 양으로 인식하지 않기 때문에 범하게 되는 오류라고 생각할 수 있다.

나. 분수 나눗셈의 다양한 의미와 모델 이해 능력

학생들에게 분수 나눗셈의 5가지 의미를 각각 반영하는 문제를 제시하고 이를 해결하게 했을 때, 두 학생 모두 옳게 해결하였다. 그러나 해결 과정을 설명하는 과정에서 연산 감각의 질적 차이가 드러났다. 백승은 제시된 5가지의 문장제를 분수 나눗셈 알고리듬을 이용하여 해결하였고, 이러한 식을 다양한 분수 나눗셈의 의미에 부합되게 표현하였다. 예를 들어, <표 Ⅲ-1>의 '커피 문제'를 해결하기 위해 '$1\frac{3}{4} \div \frac{1}{5} = 8\frac{3}{4}$'이라고 식을 쓰고 이를 측정 나눗셈의 의미인 '$1\frac{3}{4}$안에 $\frac{1}{5}$가 얼마나 들어있는지'로 설명하였다. 이때, 분수 나눗셈의 결과는

<표 Ⅳ-2> 수연이가 만든 문장제

문장제 유형	수연이가 만든 문장제	비고
포함제 '몇 배'	• 형과 동생이 사탕을 가지고 있다. 형은 $1\frac{3}{4}$개 가지고 있고 동생은 $\frac{1}{2}$개 가지고 있다. 형은 동생보다 몇 배 더 가지고 있는가?	①
	• 봄이와 단비가 달리기를 했다. 단비는 $1\frac{3}{4}$초만에 달리고 봄이는 $\frac{1}{2}$초만에 달렸다. 봄이는 단비보다 몇 배 더 빠르게 뛰었는가?	②
포함제 '몇 명'	• 포도를 $1\frac{3}{4}$만큼 가지고 있다. $1\frac{3}{4}$만큼 있는 포도를 $\frac{1}{2}$개씩 나누어 주면 몇 명에게 나누어 줄 수 있는가?	③
오류	• 다휜이는 $1\frac{3}{4}$만큼 방울 토마토가 있다. 다휜이가 가지고 있는 방울 토마토 중 $\frac{1}{2}$만 친구들에게 나누어 준다면 몇 명에게 나누어 줄 수 있는가?	④

'$8\frac{3}{4}$'이었지만, 이산량의 형태로 물은 문제 맥락에 따라 '8잔'이라고 답하여, 분수 나눗셈의 결과와 문제에서 구하고자 하는 값을 구분하였다. 또한, <표 Ⅲ-1>의 단위 비율의 결정 맥락인 '철근 문제'에 대한 해결과정을 설명하는 도중 연산자로서의 역수의 의미를 스스로 발견하기도 하였다(<에피소드 2> 참조). 연구자가 '왜 5개의 문제를 모두 다르게 설명하는지'를 질문하자, '문장제 5개의 구조가 모두 다르기 때문'이라고 표현하였다.

반면에 수연은 분수 나눗셈 알고리듬을 사용하여 올바른 답을 구하였으나, 그 의미를 설명하라고 하자 '큰 수를 작은 수로 나누기', '앞에 나온 수를 뒤에 나온 수로 나누기', '구하고자 하는 것을 피제수로 두기' 등 부족한 연산 감각과 옳지 않은 절차적 지식을 드러냈다. 예를 들어, 수연은 <표 Ⅲ-1>의 '철근 문제'와 '피자 문제'를 해결하기 위해 각각 '$\frac{3}{4}\div\frac{2}{7}=2\frac{5}{8}$', '$48\div1\frac{1}{2}=32$'로 올바른 분수 나눗셈 식을 세워 해결하였다. 그러나 왜 그러한 식을 이용하여 해결하였는지 질문하자 문제의 구조에 따라 절차적인 방법으로 암기한 내용을 <에피소드 1>과 같이 설명하였다.

<에피소드 1 : 분수 나눗셈에 대한 절차적 지식>

연구자 : ('철근 문제'에서 수연이가 세운 식 '$\frac{3}{4}\div\frac{2}{7}=2\frac{5}{8}$'을 가리키며) 이 문제에서 왜 $\frac{3}{4}$을 $\frac{2}{7}$로 나눴어?

수　연 : 무게를 물어봤으니까요.

연구자 : 아~ 무게를 물어봤으니까?

수　연 : 무게를 물어봤으니까요. 일단은 이것(철근 $\frac{2}{7}m$의 무게인 $\frac{3}{4}kg$을 가리키며)을 이거(철근의 길이인 $\frac{2}{7}m$를 가리키며)로 나눠요.

연구자 : 그 이유를 설명해줄래?

수　연 : 저는 수학책 같은데서 외울 때요. 무게를 물어보면, 무게 나누기 m하면 나왔어요.

연구자 : 아~ 무게를 구할 때는 무게를 앞으로 보낸다? 항상 그런가?

수　연 : (확실하지 않다는 듯)아니요.

(중략)

연구자 : ('피자 문제'를 가리키며) 그럼 이거는 어떻게 풀었어?

수　연 : 이거는 몇 배냐고 물어봤잖아요. 이거 계산한 거 외울 때요. 큰 거 나누기 작은 수로 했어요.

연구자 : 아~ 큰 거 나누기 작은 거를 했구나. 그런데 여기서 문제는 몇 배라고 했잖아. 몇 배는 곱하기인데 왜 나누기를 했어?

수　연 : 모르겠어요. 음... 48명의 $1\frac{1}{2}$이니까요...

연구자 : 48명의 $1\frac{1}{2}$이야? 그럼 48명의 $1\frac{1}{2}$하면 식이 어떻게 되지?

수　연 : $48\div1\frac{1}{2}$요.

위와 같이 수연은 '단위 비율의 결정'의 의미와 '곱셈의 역' 의미를 고려하지 않은 채, 단지 자신이 암기한 절차적 지식에 의존하여 문제를 해결하는 모습을 보였다. 단위 비율의 결정 맥락인 '철근 문제'와 같이 다른 두 종류의 양이 제시된 문제 상황에서는 구하고자 하는 양(예, 무게)을 피제수로 두고, 다른 종류의 양(예, 길이)을 제수로 두고 계산하는 절차적 지식을 사용하였다. 하지만, 연구자가 이어서 질문한 곱셈의 역 맥락은 이와 문제의 구조가 다르기 때문에 또 다른 절차적 지식을 사용하여 문제를 해결하였다. 곱셈의 역 맥락인 '피자 문제'에서는 48, $1\frac{1}{2}$과 같이 양의 차이가 크기 때문에 큰 수에서 작은 수로 나누는 오류를 보였는데, 이는 학생들이 분수 나눗셈과 관련하여 경험하는 전형적인 오류 중 직관에 기초한 오류에 해당한다(Tirosh, 2000). 또한, 수연이는

'$48 \div 1\frac{1}{2}$'과 '$48 \times 1\frac{1}{2}$'을 혼동하여 사용하는 것을 볼 수 있는데 이는 <표 Ⅳ-2>에서 보듯이 수연이가 문장제를 만들 때 범한 오류(예, '$\frac{1}{2}$로 나누기'를 '$\frac{1}{2}$을 곱하기'로 오해)와 일치한다.

요약하면, 두 학생에게 분수 나눗셈의 다양한 의미를 포함하고 있는 문장제를 제시하였을 때, 그것을 계산하여 답을 구하는 능력은 차이가 없었지만 그 과정을 설명하게 했을 때 나타나는 연산 감각에는 많은 차이가 있었다. 백승은 계산 절차와 분수 나눗셈의 의미를 연결하여 설명함으로써 다양한 의미에 대한 이해와 높은 연산 감각을 보인 반면, 수연은 계산 절차와 분수 나눗셈의 의미를 연결하지 못하고 과도하게 분수 나눗셈 알고리듬만 암기하여 부정확하게 기억하는 모습을 보였다.

2. 분수 나눗셈 알고리듬에 대한 이해

가. 역수의 의미와 역수를 곱하는 이유에 대한 이해

학생들에게 분수 나눗셈 알고리듬에서 가장 어려운 부분은 역수의 의미를 알고 역수를 곱하는 이유를 이해하는 것이다. 초등학교 교육과정에서 '역수'라는 용어를 도입하고 있지 않으나, 두 학생 모두 '역수'라는 용어를 알고 있었다. 분수 나눗셈 알고리듬을 학생들이 어떻게 이해하고 있는지를 알아보기 위해서 먼저 '$\frac{3}{7} \div \frac{4}{5} = \frac{3}{7} \times \frac{5}{4}$'와 같이 식만 제시하고 역수의 의미와 역수를 곱하는 이유를 설명하도록 요구하자 두 학생 모두 대답하지 못했다.

그러나 백승은 Siebert(2002)가 제시한 측정 나눗셈 맥락과 단위 비율의 결정 맥락의 문장제를 제시하고 그 상황에서 역수의 의미를 설명하게 했을 때 그 의미를 설명할 수 있었다. 특히 특이한 점은 단위 비율의 결정 맥락의 문제에서 두 가지 역수의 의미(측정의 의미, 연산자의 의미)를 모두 설명했다는 것이다. <표 Ⅲ-2>의 '자전거 문제 2'는 단위 비율의 결정 맥락의 문제로, 이에 알맞은 분수 나눗셈 알고리듬은 '$2\frac{1}{2} \div \frac{3}{4}$'이다. 이 때, 제수의 역수인 $\frac{4}{3}$가 갖는 의미는 $\frac{3}{4}$을 1로 만들기 위해서 3으로 나누고 4를 곱하는 연산자의 의미이다. <에피소드 2>는 백승이가 '자전거 문제 2'에서 자신이 세운 식 '$2\frac{1}{2} \div \frac{3}{4}$'을 설명하는 과정에서 제수의 역수인 $\frac{4}{3}$를 연산자의 의미로 표현하는 과정이다.

<에피소드 2 : 제수의 역수를 연산자의 의미로 설명>

백 승 :('자전거 문제 2'에서 자신이 세운 식을 보면서) $\frac{5}{2}$ 나누기 3을 하면은...[$\frac{5}{2} \div 3$이라고 적고 다시 $\frac{5}{2} \times \frac{1}{3}$이라 적는다.] 다시 한 시간을 채워야 하니까 한 시간이 되려면 4가 되어야 하니까...

연구자 :그게 무슨 말이야? $\frac{3}{4}$이 $\frac{4}{4}$가 되어야 한다고?

백 승 : (제수인 $\frac{3}{4}$에서 3을 가리키며) 여기에 3이 있잖아요. 그러니까 우선 3으로 나누면요.

연구자 : 거기까지 하면 뭐가 나와?

백 승 : $\frac{5}{6}$요.

연구자 : 여기서 $\frac{5}{6}$는 뭘 의미하지? 뭐에 해당하는 거야?

백 승 : $\frac{1}{4}$시간이요.

연구자 : 그래서?

백 승 : 1시간을 구해야 하니까요 곱하기 4를 해요. [$\frac{5}{2} \div \frac{3}{4} = \frac{5}{2} \div 3 = \frac{5}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \times \frac{4}{1} = \frac{20}{6}$이라고 쓴다.]

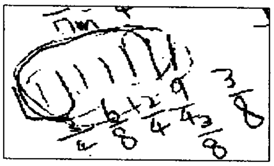
위에서 백승은 $\frac{5}{2} \div \frac{3}{4} = \frac{5}{2} \times \frac{4}{3}$라고 직접 쓰지

않았으며 등호 사용에 오류를 보이기는 했지만, 백승이가 쓴 수식과 설명은 $\frac{4}{3}$의 연산자로서 명확하게 이해하고 있음을 드러냈다.

또한 백승은 또 다른 단위 비율의 결정 맥락의 문장제인 <표 Ⅲ-1>의 '철근 문제'에서 이 문제를 해결하기 위해 '$1\div\frac{2}{7}\times\frac{3}{4}$'이라고 식을 적었다. 연구자가 이를 설명하게 하자, 백승은 <에피소드 3>과 같이 단위 비율의 결정 맥락의 문제임에도 불구하고 포함제 맥락에서의 역수의 의미인 측정의 의미로 설명하였다.

<에피소드 3 : 제수의 역수를 측정의 의미로 설명>

백　승 : ($1\div\frac{2}{7}\times\frac{3}{4}$을 설명하기 위해 7칸을 그리고 2칸씩 묶으면서) 이게 $\frac{3}{4}$이니까... 이게 한 개, 두 개, 세 개가 있고, 9이고[$\frac{3}{4}$씩 세 개가 있으니까 $\frac{9}{4}$라는 의미임] (7칸 중 나머지 한 칸을 가리키며) 하나는 ... 8분의...그리고 나머지는 $\frac{6}{8}$이니까 나누기 2를 해야 하니까 $\frac{3}{8}$이예요.



연구자 : 왜 $\frac{6}{8}$이야?

백　승 : 이게 ($\frac{3}{4}$에서 3을 가리키며) 2로 안 나눠지니까요.

연구자 : 아~ 3이 2로 안 나눠지니까 $\frac{6}{8}$으로 다시 해 준거야?

백　승 : 네. (2칸씩 3묶음을 가리키며) 여기까지가 $\frac{9}{4}$이고 이건 $\frac{18}{8}$이고, 이만큼(남은 1칸을 가리키며)은 $\frac{3}{8}$이니까 $\frac{21}{8}$이예요.

연구자 : (백승이가 세운 식 '$1\div\frac{2}{7}\times\frac{3}{4}$'을 가리키며) 그럼 여기는 왜 이렇게 구했지? $1\div\frac{2}{7}\times\frac{3}{4}$?

백　승 : 이게... 여기가... (그린 그림 7칸을 모두 가리키며) 전체가 1이면 (7칸 중 2칸을 가리키며) 여기가 $\frac{2}{7}$이니까 이것을 나누면은...

연구자 : 왜 나눴지? 아까 한 거랑 비슷한데.

백　승 : 음.... 어... 나누면은... 몫이랑 이거랑 같아요.

연구자 : 몫은 거랑 똑같은 거야? 그러면 뭐 나와? $1\div\frac{2}{7}$해서 뭐 나왔어?

백　승 : 음... 3... 3.5!

연구자 : 3.5나왔어. $3\frac{1}{2}$나왔어. 그럼 $3\frac{1}{2}$는 뭘 의미할까?

백　승 : 여기($\frac{3}{4}$를 가리키며)에 곱해야 하는거요.

(중략)

연구자 : 다시 한 번 설명해줄래?

백　승 : 여기서요. $\frac{2}{7}$가 나눠졌으니까요 이게 3.5잖아요. 그러니까요. 어.... 1이 $\frac{3}{4}$이니까 3.5는 3.5에 $\frac{3}{4}$를 곱해야 해요.

백승이가 단위 비율의 결정 상황의 문장제에서 역수의 의미를 측정의 의미로 설명한 것은 매우 특이해 보인다. 백승이는 $1m$의 무게를 구하기 위해서 $1m$안에 $\frac{2}{7}m$가 몇 번 들어있는지 구한 후, 한 번 들어갈 때마다 $\frac{3}{4}kg$씩 무게가 나가므로 $1\div\frac{2}{7}$를 하고 몫에 $\frac{3}{4}$을 곱하였다. 이것은 Siebert(2002)가 주장한 측정 나눗셈 맥락에서의 역수의 의미와 역수를 곱하는 이유와 같은 것이며 임재훈 외(2005)가 제시한 포함제 맥락에서 제수의 역수에 피제수를 곱하는 순서와 일치한다.

한편, 수연이는 백승이와 달리 문장제를 제시한 후에도 역수의 의미를 설명하지 못하였다. 또한 역수에 대한 개념적 이해 없이 단지 시각적인 특성만을 고려하여 분자와 분모를 뒤집은 수가 역수라고 생각하고 있었다.

이렇듯 역수의 의미와 역수를 곱하는 이유를 이해하는 측면에서 두 학생들 간 개인차는 있었으나, 둘 다 역수의 의미와 역수를 곱하는 이유를 형식적으로 완벽하게 이해하고 있지는 못했다. 이는 우리나라 교과서에서 분수 나눗셈 알고리듬을 도입하기 전에 역수 개념을 다루지 않는 것과 동분모 분수 나눗셈을 통해 이 알고리듬을 도입하지만, 역수의 의미와 역수를 곱하는 이유에 대해서는 지도하지 않는다는 것과 연결하여 이해할 수 있다(임재훈 외, 2005).

나. 분수 나눗셈과 곱셈의 역연산 관계 이해

백승이는 곱셈의 역 상황의 문제에서 분수의 나눗셈과 곱셈 간의 관계를 잘 이해하고 이를 활용하여 문제를 해결하였다. <표 Ⅲ-1>의 '피자 문제'에서 백승이는 이 문제를 해결하기 위해 '$48 \div 1\frac{1}{2} = \frac{48}{1} \times \frac{2}{3} = 32$'라고 식을 썼다. 이와 관련하여 <에피소드 4>는 백승이가 곱셈과 나눗셈의 역연산 관계를 어떻게 이해하고 있는지 나타낸다.

<에피소드 4 : 곱셈과 나눗셈의 역연산 관계 이해>

연구자: ('피자 문제'를 가리키며) 여기서는 왜 $48 \div 1\frac{1}{2}$ 했어?

백 승: 1.5배니까 나누기 48하면 되잖아요.

연구자: 왜?

백 승: 어떤 수가요. 거기서 1.5를 곱해야 하니까요. (□×1.5=48이라고 적으면서) 곱하기 1.5가 48이니까요. 48 나누기 1.5 하면 돼요.

연구자: 그렇게 해서 구했어? 그런데, 왜 여기서(□×1.5=48이라고 적은 식을 가리키며)는 곱하기인데 여기서($48 \div 1\frac{1}{2}$이라는 식을 가리키며)는 나눴지?

백 승: 여기서 이걸(□×1.5=48의 1.5를 가리키며) 곱하기 하니까요. 다시 나누기 하면 원래 이 수(□를 가리키며)가 나와요.

연구자: 왜 이 수가 나올까?

백 승: 1.5를 곱해서 48이 나왔으니까요. 다시 1.5로 나눠주면 다시 원래 수가 나와요.

<에피소드 4>를 통해 백승이가 곱셈과 나눗셈이 역연산 관계에 있다는 것을 이해하고 있다는 것을 알 수 있다. 백승이의 사고 과정은 대수적으로 '□×1.5÷1.5=□'와 같이 나타낼 수 있고, 이를 통해 나눗셈이 곱셈을 취소하는 역관계임을 이해하고 있다는 것을 알 수 있다. 또한, '□×1.5=48'에서 우항의 48에도 똑같은 연산을 취함으로써 결과를 구하였다. 여기까지를 식으로 정리하면 '□×1.5÷1.5=48÷1.5'이며, 이는 다시 '□=48÷1.5'로 설명할 수 있다. 물론 백승이가 곱셈과 나눗셈의 역연산 관계를 위와 같이 완전한 식으로 자세하게 표현한 것은 아니지만, 곱셈과 나눗셈의 역연산 관계를 충분하게 이해하고 있었으며 자신의 방식으로 표현할 수 있다는 점을 알 수 있다.[5)]

백승에 비해 수연은 곱셈과 나눗셈의 역연산 관계 역시 절차적으로 이해하고 있었다. <표 Ⅲ-2>의 '빠진 인수 문제', 즉 어떤 수에 $\frac{1}{2}$을 곱했을 때 $1\frac{3}{4}$이 되는 곱셈의 역 상황 문장제

5) 초등학교 교육과정에서는 '$\square \times 1.5 = 48$'과 같은 문제 상황에서 미지수를 구할 때, "두 수의 곱을 한 수로 나누면, 다른 한 수가 된다(예, $2 \times 5 = 10$이라면, $10 \div 2 = 5$ 또는 $10 \div 5 = 2$가 된다)."는 사실을 통해 곱셈과 나눗셈의 역연산 관계를 이해한다. 그러나 면담을 통해 백승은 이보다 확장된 사고를 하며, 등식의 성질을 다소 이해하고 있다는 것을 알 수 있다.

를 제시하였을 때 수연이는 곱했기 때문에 거꾸로 $\frac{1}{2}$로 나누어야 한다고 하였다. 이에 연구자가 문제해결 과정을 더욱 정당화할 것을 요구하자 설명하기 매우 어려워했고 결국은 "그렇게 배웠기 때문"이라고 답하였다. 즉 수연은 곱셈과 나눗셈의 역관계에 대한 의미를 절차적으로 이해하고 있음을 알 수 있었다.

3. 연산의 의미와 성질 응용

가. 다양한 표현 사용 능력

다양한 표현을 사용하는 능력은 면담을 통해 지속적으로 관찰되었다. 학생들은 구두, 문장제, 기호 등을 이용하여 분수 나눗셈 과정을 설명하는 모습을 보였지만 그림 표현을 사용하는 부분에 있어서는 다소 차이가 드러났다.

백승은 분수 나눗셈 해결과정에 대한 자신의 설명을 정당화하기 위해 여러 가지 다양한 표현을 사용하여 설명하였다. 특히 분수를 소수로 전환하는 능력이 뛰어났으며, 분수나 소수를 각 상황에 맞게 효율적으로 선택하여 자유자재로 사용하는 모습을 볼 수 있었다. 기호 표현을 사용하여 문제에 알맞은 식을 세우고 포함제의 의미를 갖는 문장제를 만들 수 있었으며, 필요하다면 그림을 사용하여 설명하는 모습을 보였다. 백승이가 사용한 그림 표현의 대표적인 예는 앞의 <에피소드 3>에 제시된 것으로써, 백승은 <표 III-1>의 '철근 문제'의 $\frac{2}{7}$를 설명하기 위해 7개의 칸을 그리고 각각을 2개씩 묶으면서 암산을 이용하여 간단하게 문제를 해결하였다.

한편, 수연은 분수 나눗셈의 다양한 문제의 해결과정을 설명하는 도중 그림 표현을 사용하지 않았다. 이에 연구자가 그림과 연결하여 설명하게 하자 분수 나눗셈 알고리듬을 이용하여 쉽게 해결할 수 있었던 문제도 그림 표현을 이용하여 해결하는 과정에서 몇 가지 오류가 나타났고 많은 시간이 걸렸다. 예를 들어, <에피소드 5>는 <표 III-1>의 '철근 문제'를 그림과 연결하여 해결하는 과정에서 수연이가 보인 오류를 나타낸다.

<에피소드 5 : 분수 나눗셈과 그림 표현의 연결 과정에서 범한 오류>

연구자 : ('철근 문제'를 가리키며) 그림으로 한 번 생각해볼까? 여기서 구하고자 하는 것은 뭐지?

수 연 : 이게 철근이고 전체 철근에서 이만큼 ($\frac{2}{7}$를 가리키며)의 무게가 $\frac{3}{4}$kg일때 이만큼($\frac{1}{7}$을 가리키며)의 무게를 구하는 거예요. [실제 문제에서 구하고자 하는 것은 1m의 무게를 구하는 것이다.]

연구자 : 아, 그만큼이야? 1m는 얼마지?

수 연 : 아 이만큼이요.

연구자 : 근데 왜 처음엔 이거라고 생각했지?

수 연 : $\frac{1}{7}$로 잘못 생각했어요.

(중략)

연구자 : 그래 $\frac{1}{7}m$의 무게는 얼마야?

수 연 : ($1m$에 해당하는 답인 $2\frac{5}{8}$을 가리키며) 이거요. ($\frac{1}{7}$을 가리키며) 이거 하나가 $2\frac{5}{8}$이에요. [계속적으로 $\frac{1}{7}$과 1을 혼동하는 모습을 보인다.]

연구자 : 그래?

수 연 : 아닌데. 그럼 이거보다 큰데... [한참을 생각한다.]

(중략)

연구자 : 근데 우리가 $\frac{1}{7}m$에서 $1m$를 구하려면 뭐 곱해야지?

수 연 : (자신있게) $\frac{7}{7}$이요

연구자 : 그럼 똑같이 $\frac{3}{8}$ 나오네? 그럼 전체도 $\frac{3}{8}$인가?

수 연 : (확실하지 않다는 듯)곱하기 7?

'철근 문제'에서 그림을 통해 설명하게 하고 $\frac{1}{7}m$의 무게를 묻자, $1m$ 철근의 무게인 $2\frac{5}{8}kg$으로 대답하였고, 그 이후에도 지속적으로 $1m$와 $\frac{1}{7}m$를 구분하지 못하였다. 또한 $\frac{1}{7}m$를 $1m$로 만들기 위해서 7을 곱하는 것이 아니라 $\frac{7}{7}$을 곱해야 한다고 생각하고 $\frac{1}{7}$에 $\frac{7}{7}$를 곱한 값이 원래 $\frac{1}{7}$과 같자, 7을 곱해야한다는 것을 알게 된다. 수연은 분수 나눗셈을 그림과 연결하면서 단위 비율인 $\frac{1}{7}$과 기본 단위인 1을 계속적으로 혼동하였다. 이를 통해 수연은 분수 나눗셈을 다양한 표현으로 전환하는데 어려움이 있다는 것을 알 수 있었다.

나. 자신의 전략을 고안하는 능력

수를 분해하거나 구성하고, 연산의 성질을 사용하여 자신의 전략을 만드는 연산 감각에 있어서도 백승과 수연은 큰 차이를 나타냈다. 백승에게 <표 Ⅲ-1>의 '철근 문제'에서 자신의 해결과정을 설명하게 하자, 덧셈에 대한 곱셈의 분배법칙을 이용하여 설명하였다. 백승은 '철근 문제'의 값을 구하기 위해서 $1\div\frac{2}{7}\times\frac{3}{4}=3\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}$이라고 식을 세운 후, $\frac{2}{7}$의 역수인 $\frac{7}{2}$, 즉 $3\frac{1}{2}$에 $\frac{3}{4}$를 곱할 때 $\frac{3}{4}$이 3개 있는 값($\frac{3}{4}\times3$)과 $\frac{3}{4}$의 반($\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}$)을 더하여 쉽게 해결하는 모습을 보였다. 백승이의 사고과정을 대수적으로 '$3\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=(3\times\frac{3}{4})+(\frac{1}{2}\times\frac{3}{4})=\frac{9}{4}+\frac{3}{8}=\frac{21}{8}=2\frac{5}{8}$'과 같이 나타낼 수 있다. 물론, 실제적으로 '$3\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=(3\times\frac{3}{4})+(\frac{1}{2}\times\frac{3}{4})$'과 같이 기호로 표현하지는 않았지만, 분수의 나눗셈 알고리듬을 사용하지 않고도 덧셈에 대한 곱셈의 분배법칙과 암산을 이용하여 쉽게 해결할 수 있었다.

또한 백승이는 덧셈 전략으로 문제를 해결하는 모습을 보였는데 예를 들어, <표 Ⅲ-2>의 '자전거 문제 2'에서 다양한 방법으로 설명하도록 요구하자, <에피소드 6>과 같이 덧셈적 사고를 통해 답을 구하는 모습을 보였다.

<에피소드 6 : 백승이가 고안한 전략>

백 승 : ('자전거 문제 2'의 '$\frac{3}{4}$시간'을 가리키며)이게 45분이라서 1시간 가려면 15분만 더 채우면 돼요.
연구자 : 아~ 한 시간 가려면 15분만 더 채우면 되니까?
백 승 : 네.
연구자 : 그런데 왜 15분은 $\frac{5}{6}$야?
백 승 : [$2\frac{1}{2}km$를] 나누기 3하면... 3만큼이 45분이니까 나누기 3하면 15분 나와요.
연구자 : 나누기 3해서 15분짜리를 만들었어?
백 승 : 네. [문제에 제시된 45분만큼 간 거리 $2\frac{1}{2}km$에 $\frac{5}{6}km$만 더해서 문제를 쉽게 해결한다.]

백승은 계산을 수행하기 위한 다양한 방법이 있다는 것을 인식하고 있는 것으로 보인다. '$\frac{3}{4}$시간+$\frac{1}{4}$시간=1시간'을 '45분+15분=1시간'으로 바꾸고 이를 이용하여 '45분 동안 간 거리+15분 동안 간 거리=1시간동안 간 거리'를 구하였다. 이때 '45분 동안 간 거리'는 문제에 제시되어 있는 $2\frac{1}{2}km$이고, 이를 이용하여 '15분 동안 간 거리'를 쉽게 구하였고($2\frac{1}{2}\div3=\frac{5}{6}$), 이를 서로 더해서 암산으로 문제를 해결하였다. 이때 백승이의 사고과정은 대수적으로 '$2\frac{1}{2}+(2\frac{1}{2}\div3)=\frac{5}{2}+\frac{5}{6}=\frac{20}{6}=3\frac{1}{3}$'과 같이 표현할 수 있다. 이와

같이 백승은 분수 나눗셈의 여러 문제에서 다양한 전략을 유연하게 이용하였고, 적절한 전략을 발견할 수 있었다.

백승이가 수를 구성·분해하고 연산의 성질을 이용하여 자신의 전략을 개발하는데 비해 수연은 여러 분수 나눗셈 문제를 해결하는 과정에서 절차적 지식에만 의존하였을 뿐 백승이의 경우처럼 융통성 있는 연산 감각을 드러내지 않았다.

다. 분수 나눗셈의 결과 이해

학생들이 분수 나눗셈의 결과를 어떻게 이해하고 있는지 살펴보기 위해 '$4\frac{2}{3}\div\square$'를 제시하고 나눗셈의 결과가 $4\frac{2}{3}$보다 크게 나오게 하기 위해서 제수에 어떤 수를 넣어야 하는지 질문하였다. 백승은 직관적인 느낌을 이용하여 연산의 결과를 어림할 수 있었다. 백승은 1을 기준척도로 생각하고 1보다 작은 분수로 $\frac{9}{10}$, $\frac{8}{10}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{6}{10}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{4}{10}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{1}{10}$을 제시하였다. 자신의 생각을 정당화하도록 요구하자 하나의 반례로 '2'를 대입해 보면서 1보다 더 큰 값으로 나누면 몫이 피제수보다 작게 나온다고 설명하였다. 백승은 연산의 결과를 정확하게 비교할 수 있었고 대부분 자신들의 사고과정을 타당하게 설명하는 연산 감각을 가지고 있음을 알 수 있다.

이에 비해 수연은 연산의 결과를 예측하기 위해 기준척도를 이용하여 문제를 해결하기 보다는 알고리듬을 적용하여 직접 여러 가지 수를 대입하여 계산하는 성향을 보였다. 1보다 큰 제수를 대입하는 몇 번의 실수를 거듭한 후, 우연하게 1보다 작은 제수를 대입하여 피제수보다 몫이 더 큰 결과를 구했다. 그러나 결과를 구한 후에도 피제수와 제수의 관계를 인식하지 못하였고, 몇 개의 경우로 한정하여 생각하는 모습을 보였다.

연구자가 분수 나눗셈의 결과 이해 능력을 알아보기 위해 제시한 <표 Ⅲ-3>의 '어림 문제 2'는 피제수가 같고 제수가 다른 나눗셈에서 몫이 가장 큰 값을 알아내는 것이었다. 백승은 기준척도를 사용하지 않고 분자와 분모의 차를 통해 제수의 크기를 비교하였다. 4개의 제수 중 3개의 제수($\frac{13}{14}$, $1\frac{1}{11}$, $\frac{25}{24}$)는 공통적으로 다른 하나의 제수($\frac{9}{19}$)와 비교했을 때 구분되는 점이 있는데, 이는 분수의 분모와 분자의 차가 1이 된다는 것이다. 백승은 이러한 차이점을 이용하여 $\frac{9}{19}$만 분모와 분자의 차이가 크므로, 가장 작은 분수라는 결론을 내리고 그에 따라 분수 나눗셈의 결과는 가장 클 것이라고 말했다. 분모와 분자의 차가 큰 분수가 더 작은 분수라는 백승이의 생각이 항상 옳은 것은 아니나,[6)] 백승은 문제 상황에 따라 자신의 지식, 암산, 어림을 적절하게 이용하고 응용하였으며, 답을 어림하는 데에도 여러 가지 방법이 있음을 알고 있었다.

한편, 수연은 '어림 문제 2'에서 단지 $\frac{24}{25}$의 분자와 분모가 크고 피제수의 분자, 분모와 서로 약분이 되지 않기 때문에 이때의 몫이 가장 클 것이라고 생각하였다. 이와 같이 수연은 분수 나눗셈 문제는 잘 해결하였으나, 자신이 알고 있는 지식을 응용하여 해결해야 하는 문제에서는 매우 혼란스러워 했다. 직접 계산해보지 않고 몫이 가장 큰 분수의 나눗셈을 찾는 과정에서 처음에 당황하는 모습을 보였고, 그

6) 예를 들어, $\frac{1}{2}$과 $\frac{6}{10}$과 같은 분수인 경우에는 $\frac{1}{2}$보다 $\frac{6}{10}$의 분모와 분자의 차가 더 크지만, $\frac{6}{10}$이 $\frac{1}{2}$보다 더 크다.

로 인해 잘못된 설명을 하였다.

V. 논 의

본 연구는 계산능력이 뛰어난 2명의 초등학교 6학년 학생들을 대상으로 다양한 분수 나눗셈 문제를 해결하는 과정에서 나타나는 연산 감각을 분석하였다. 분수 나눗셈이라는 학습 주제에 맞춰 연산 감각을 크게 '분수 나눗셈의 의미 이해', '분수 나눗셈 알고리듬의 의미 이해', '연산의 응용'으로 나누어 면밀하게 분석하였다. 연구 결과 계산능력에서는 차이가 없던 두 학생들이 연산 감각의 구성 요소별로 질적인 차이를 드러냈다. 연구 결과를 통해 얻을 수 있는 시사점을 논의해보면 다음과 같다.

첫째, 연산 감각 중 '분수 나눗셈의 의미 이해' 측면에서 본 연구의 학생들은 공통적으로 포함제의 문장제만 만들었다. 개념적으로 옳은 포함제라고 할지라도 실제 문제 상황의 해(자연수)와 계산 결과(분수)가 일치하지 않거나 부분적인 오류를 지닌 문장제를 만들었다. 이는 박교식 외(2004)의 연구와 일치하며 현행 6-나 교과서에서 '(분수)÷(분수)'를 포함제로 도입하고, 제시된 문장제도 대부분 포함제의 의미를 갖는다는 것과 연결해 볼 수 있다. 그러나 수와 연산에 관한 교수·학습 활동에서 절차적 지식의 숙달 못지않게 그와 관련된 개념적 지식의 이해가 중요하다면(교육과학기술부, 2008), 분수 나눗셈을 다루는 단원 전반에 걸쳐 다양한 맥락의 문제 상황을 제시해야 하고, 학생들은 그 맥락의 의미를 탐구하면서 문제를 해결하는 경험을 많이 가질 필요가 있다. 이러한 경험은 학생들의 연산 감각 신장의 기초가 될 것이다.

둘째, 본 연구에서 두 명의 학생들은 모두 분수 나눗셈 단원 평가에서 100점을 받았고, 계산 능력이 뛰어났다. 하지만 이 학생들은 '알고리듬의 의미 이해'에 관한 연산 감각에서는 많은 차이를 보였고, 이것은 능숙한 계산기능이 높은 연산 감각을 보장하지는 못한다는 것을 반영한다고 볼 수 있다. 능숙한 계산 기능과 높은 연산 감각을 보인 백승이에 비해 수연이는 전형적인 분수 나눗셈 알고리듬을 적용하여 문제를 해결하는 것에는 능숙한 반면, 분수 나눗셈 알고리듬의 의미를 이해하는 것에는 취약하였다. 이는 현행 수학 교과서에서 역수 개념을 도입하지 않고, 분수 나눗셈 알고리듬을 지도할 때 역수의 의미와 역수를 곱하는 이유에 대해 설명하지 않는다는 것과 연결하여 생각해 볼 수 있다.

따라서 학생들은 분수의 나눗셈을 학습할 때 왜 제수의 역수를 곱하는지 맥락적으로 이해해야 하며, 이를 위해서는 분수의 역수가 지니는 의미가 보다 명확하게 드러나는 상황에서 그 의미를 생각해보게 해야 한다(임재훈 외, 2005). 본 연구에서 백승이는 단위 비율의 결정 맥락의 문제에서 측정과 연산자로서의 역수의 의미를 설명할 수 있었다는 점은 이러한 주장에 대한 경험적 토대가 될 수 있다.

셋째, 연산 감각 중 '연산의 응용' 측면에서 높은 연산 감각을 보인 백승은 다양한 표현을 통해 수학적 개념과 관계를 이해하였고, 자신의 문제해결 과정을 명료하게 설명하였다. 그 과정에서 보다 고차원적인 사고를 하게 되고, 어려운 수학적 개념이나 알고리듬도 쉽게 이해하는 것을 볼 수 있었다. 또한 백승은 덧셈에 대한 곱셈의 분배법칙이나 덧셈적 사고를 이용하여 자신의 전략을 만들기도 하였고, 이를 통해 문제를 더욱 쉽게 해결하기도 하였다. 이와 같이 학생들이 수학적 아이디어를 탐구

하면서 만들어내는 표현들은 학생들이 문제를 이해하고 해결하는 데 도움이 되며, 해결 방법을 다른 사람에게 의미 있게 기술하는 데 중요한 역할을 할 수 있음을 알 수 있다(NCTM, 2000).

한편, 본 연구에서 수연에게 계산하지 않고 분수 나눗셈의 결과를 어림해보도록 하자, 매우 당황하며 쉽게 답을 구하지 못하였고 결국 실제로 계산해 봄으로써 옳은 답을 구하였다. 이는 학생들이 익숙한 알고리듬을 이용하여 문제를 해결하는 데에는 능숙한 반면, 주어진 문제 상황을 고려하는 데에는 익숙하지 못하다는 것을 드러낸다. 이를 통해 계산 결과의 타당성을 어림해보는 기회를 제공하여 주어진 문제 상황을 충분히 고려하도록 하는 것이 연산 감각을 신장시키는 데에 매우 중요하다는 것을 알 수 있다.

넷째, 분수 나눗셈과 관련된 연산 감각을 신장시키기 위해 교사가 먼저 연산 감각의 중요성을 이해하고 이를 구체적인 맥락에서 적극적으로 지도할 필요가 있다. 본 연구에서 두 학생들에게 분수 나눗셈 식만 제공하고 분수 나눗셈 알고리듬의 의미를 설명하게 하자, 두 학생 모두 절차적으로만 대답하였다. 그러나 식 대신에 문장제로 제시하고 이에 비추어 알고리듬의 의미를 설명하게 하자, 백승은 문제 상황과 연결하면서 다양한 표현 양식을 사용하여 설명할 수 있었다. 이와 같은 측면에서 교사는 학생들에게 의미 있는 맥락을 제시하고, 학생들이 사용하는 표현과 전략에 대해 논의하게 함으로써 연산 감각을 신장시킬 수 있다.

한편, 교사는 학생들이 개념적 이해와 절차적 기능을 충분히 익히도록 균형을 유지해야 한다. 수연과 면담을 하는 과정에서 수연은 '그렇게 배웠기 때문이다.', '교과서에 그렇게 나와 있기 때문이다.'와 같은 표현을 자주 사용하였는데, 이는 수연에게 절차적 지식과 개념적 이해를 연결할 수 있는 기회가 많이 제공되지 않았음을 반영한다고 볼 수 있다. 학생들은 기초 개념에 대한 이해와 더불어 기능을 구축하고 새로운 학습 내용과 이전의 학습 내용을 연결함으로써 점차 복잡한 수준의 연산 감각을 개발해야 한다(Huinker, 2002; NCTM, 2000). 분수 나눗셈과 관련하여 현행 6-나 교과서에 제시된 것처럼 알고리듬을 제시하고 맥락이나 의미에 대한 고려 없이 알고리듬만을 반복적으로 적용하는 방법으로는 학생들의 연산 감각의 신장을 추구하기가 어렵다. 따라서 교사는 학생들의 연산 감각과 연계하여 교과서 내용을 재구성하여 지도할 수 있어야 한다.

마지막으로, 초등학교 수학교육에서 수와 연산 감각을 개발하는 것이 매우 중요한 목표로 대두되고 있는 만큼, 연산 감각에 대한 연구가 보다 적극적으로 이루어져야 한다. 본 연구는 분수 나눗셈에서 나타나는 연산 감각을 조사한 것이지만, 이를 다른 주제로 확대하여 연산 감각에 대한 전반적인 연구와 실태 조사가 이루어질 필요가 있다.

본 연구의 의도는 수 감각과 연산 감각을 따로 구분하여 다루어야 한다는 점을 시사하는 것이 아니다. 실제 연산 감각은 수 감각의 핵심적인 구성 요소이고, 특히 초등학교 고학년에서는 연산이 중심이 되기 때문에 연산 감각 자체를 보다 집중적으로 조명해 볼 필요가 있다는 점을 경험적 근거를 토대로 강조한 것이다. 본 연구를 통해 분수 나눗셈을 지도할 때 연산 감각과 관련된 풍부한 경험을 제공하여 어려운 알고리듬을 개념적으로 이해하게 하는 데 기여하기를 기대한다.

참고문헌

강홍규(2005). 분수 개념과 알고리듬 지도 양상 비교 : McLellan, MiC, 한국의 교재를 중심으로. **수학교육학연구, 15**(4), 375-399.

교육과학기술부 (2008). **수학 6-나.** 서울: 두산

교육인적자원부 (2007). **초·중등학교 교육과정.** [교육인적자원부 고시 제 2007-79호, 별책 1]. 서울: 대한교과서주식회사.

박교식·송상헌·임재훈(2004). 우리나라 예비 초등 교사들의 분수 나눗셈의 의미 이해에 대한 연구. **학교수학, 6**(3), 235-249.

박만구(2002). 왜 $\frac{3}{4}\div\frac{2}{5}=\frac{3}{4}\times\frac{5}{2}$인가? **수학교육논문집, 13**, 39-54.

방정숙(2005). 초등학교 학생들의 계산 능력과 수 감각(Number sense)연구. **한국학교수학회논문집, 8**(4), 423-444.

방정숙·Li(2008). 예비 초등 교사들의 분수 나눗셈에 대한 지식 분석. **수학교육, 47**(3), 291-310.

선춘화·전평국(2005). 초등학교 6학년 학생의 수감각 실태 조사. **수학교육, 44**(4), 587-602.

성승현·정찬식·노은환(2008). 수 감각 증진 프로그램의 개발 및 적용에 대한 효과 분석. **수학교육, 47**(1), 61-74.

임재훈·김수미·박교식(2005). 분수 나눗셈 알고리즘 도입 방법 연구: 남북한, 중국, 일본의 초등학교 수학 교과서의 내용 비교를 중심으로. **학교수학, 7**(2), 103-121.

전평국·박혜경(2003). 분수 나눗셈의 개념적 이해를 위한 관련 지식의 연결 관계 분석. **수학교육논문집, 15**, 71-76.

Baroody, A. J. & Coslick, R. T. (1998). *Fostering children's mathematical power: An investigative approach to K-8 Mathematics instruction.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Flores, A. (2002). Profound understanding of division of fractions. In B. Litwiller & G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions* (pp. 237-246). Reston, VA: NCTM.

Ginsburg, H. (1997). *Entering the child's mind: the clinical interview in psychological reserch and practice.* Cambridge university press.

Huinker, D. (2002). Examining dimensions of fraction operation sense. In B. Litwiller & G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions* (pp. 72-78). Reston, VA: NCTM.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics.* Mahwah, MJ: Lawrence Erlbaum Associates.

McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics, 12,* 2-8.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: The Author.

Reys, R., Reys, B., McIntosh, A., Emanuelsson, G., Johansson, B., & Yang, D. C. (1999). Assessing number sens of students in Australia, Sweden, Taiwan, and the United States. *School Science and Mathematics, 99*(2), 61-70.

Siebert, I. (2002). Connecting informal thinking and algorithms: The case of division of fraction. In B. Litwiller & G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions,* *ratios, and proportions* (pp. 247-256). Reston, VA: NCTM.

Sinicrope, R., Mick, H. W., & Kolb, J. R. (2002). Interpretations of fraction division. In B. Litwiller & G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions* (pp. 153-161). Reston, VA: NCTM.

Sowder, J. T. (1992). Making sense of numbers in school mathematics. In G. Leinhardt, R. Putman, & R. A. Hattrup (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (pp. 1-51). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teacher's knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(1), 5-25.

An Analysis of Operation Sense in Division of Fraction Based on Case Study

Pang, Jeong Suk (Korea National University of Education)
Lee, Ji Young (Graduate School of KNUE)

The purpose of this study was to analyze operation sense in detail with regard to division of fraction. For this purpose, two sixth grade students who were good at calculation were clinically interviewed three times. The analysis was focused on (a) how the students would understand the multiple meanings and models of division of fraction, (b) how they would recognize the meaning of algorithm related to division of fraction, and (c) how they would employ the meanings and properties of operation in order to translate them into different modes of representation as well as to develop their own strategies. This paper includes several episodes which reveal students' qualitative difference in terms of various dimensions of operation sense. The need to develop operation sense is suggested specifically for upper grades of elementary school.

* key words : Operation sense(연산감각), Division of Fraction(분수 나눗셈), Reciprocal(역수), Inverse operations(역연산), Measurement division(포함제), Partitive division(등분제), Determination of a unit rate(단위 비율 결정)

논문접수 : 2009. 1. 25
논문수정 : 2009. 3. 2
심사완료 : 2009. 3. 9