대한수학교육학회지 <학교수학> 제 11 권 제 1 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.11, No.1, 17-37. Mar. 2009

배 개념에 기초한 자연수 곱셈 개념의 지도 방안[1)]

강 흥 규*

자연수 곱셈의 개념과 모델은 단일하지 않다. 곱셈의 개념으로는 동수누가, 배, 곱집합이 있으며, 곱셈의 모델로는 측정, 격자, 조합, 수직선 모델이 있다. 초등수학 교과서에서 곱셈 개념을 도입할 때 어떤 개념과 모델에 중심을 두어야하는가 하는 문제는 교수학적인 논점이 많은 문제이다. 이 논문에서는 먼저, 곱셈의 개념과 모델에 대한 수학적이고 교수학적인 분석을 하였고, 이어서 배 개념을 중심에 둔 곱셈 도입 방안을 구체적으로 구안하였으며, 마지막으로 이 지도안을 실제 학급에 적용하여 교수 실험하고 그 결과를 분석하였다. 5차시에 걸친 실험수업의 결과를 분석한 결과는 다음과 같았다. 첫째, 학생들의 배 개념의 이해도가 높지 않았다. 둘째, 단위량과 배 값이 주어졌을 때 전체량을 구하는 문항(전형적인 곱셈값 문제)보다 전체량과 단위량이 주어졌을 때 배 값을 구하는 문항의 정답률이 더 높았다. 셋째, 조합모델은 곱셈의 다양한 응용상황중의 하나로서 충분히 다루어질 수 있다. 넷째, 동수누가 계산 문항의 정답률은 매우 높았다. 전체적으로 볼 때, 배 개념을 중심으로 곱셈을 지도하는 방안은 기존 방법의 문제점을 보완할 수 있는 하나의 대안이 될 수 있음을 확인하였다.

I. 서 론

곱셈을 이미 이해하고 있는 교사의 입장에서는 곱셈은 동수누가(同數累加) 즉, 덧셈의 특수한 형태에 지나지 않는 것으로서, 덧셈을 충분히 익힌 아동은 그 연장선상에서 자연스럽게 학습할 수 있는 개념으로 여기기 쉽다. 그러나 수학적으로 볼 때, 곱셈은 덧셈과는 질적으로 구별되며 한 차원 높은 수 개념을 수반하는 추상적인 수준의 상승을 요구한다. 덧셈이 이산량의 집합으로 나타낼 수 있는 개수(個數) 혹은 기수(基數) 개념에 근거한다면, 곱셈은 그러한 기수 개념을 바탕으로 그 위에 이차적으로 건설되는 '배' 개념이다. 예를 들어 덧셈식 2+3=5에 등장하는 세 수 2, 3, 5는 이산량에 기초한 기수 개념으로서, 바둑돌과 같은 점의 모음으로 형상화할 수 있다. 그러나 2×3=6에서는 사정이 다르다. 2와 6은 기수 개념이지만 승수인 3은 '묶음', '횟수' 혹은 '배' 개념이다. 이 3을 ● ● ●와 같은 점 세 개의 그림으로 나타내는 것은 불충분하다. 그보다는 ●과 ● ● ●의 관계, ● ●과 $\begin{smallmatrix}\bullet&\bullet&\bullet\\\bullet&\bullet&\bullet\end{smallmatrix}$ 의 관계, ● ● ●과 $\begin{smallmatrix}\bullet&\bullet&\bullet\\\bullet&\bullet&\bullet\\\bullet&\bullet&\bullet\end{smallmatrix}$의 관계, … 등으로 나타내어야 한다. 즉, 곱셈식 2×3=6에서의 승수 3은 '하나의 이산량'을 가리킨다기보다는 '두 이산량 사이의 배 관계'를 가리킨다.

곱셈의 교수학적인 양상도 단순치 않다. 곱셈의 개념으로는 서로 명확히 구별되는 동수누

* 공주교육대학교(natin@gjue.ac.kr)
1) 이 논문은 2007학년도 공주교육대학교 초등교육연구과제비의 지원을 받아 연구되었다.

가, 배, 곱집합 개념이 있고, 이러한 개념을 구현하는 모델로는 측정, 격자, 조합, 수직선 모델이 있다. 이러한 다양한 개념과 모델 가운데 어느 것이 교수학적으로 중심이 되어야 하는가? 곱셈의 여러 개념과 모델이 이 중심적인 자리를 차지하고자 서로 경쟁했던 사실이 우리나라의 역대 초등수학 교과서의 변천과정 안에 잘 나타나있다.

현재 제 7차 교과서에서 곱셈 개념의 도입은 2학년 1학기의 마지막 곱하기 단원에서 이루어지고 있으며, 곱셈 구구단은 바로 다음 단원인 2학년 2학기 첫 단원인 곱셈구구에서 다루어지고 있다. 곱셈 계산 알고리즘을 중시하는 교사의 경우, 곱셈 개념 이해를 위한 곱하기 단원을 소홀히 하는 경우가 있을 수 있다. 왜냐하면 곱셈구구를 암송하고 있다고 전제하고 그것을 활용한다면 곱하기 단원은 쉽고 간단하게 처리할 수 있기 때문이다. 하지만 이러한 조치는 이후의 학습 계열에서 결함을 야기할 수 있다. 곱하기 단원은 단지 덧셈과 뺄셈에 이어서 곱셈이라는 새로운 계산을 배우는 것에 그치는 것이 아니라, 이후의 내용 즉, 나눗셈, 분수, 소수 등의 관건이 되는 '배' 개념이라는 2차적인 수 개념을 건설해야하는 단계이기 때문이다.[2)]

이 논문에서는 첫째, 수학적이고 교수학적인 측면에서 곱셈의 개념과 모델을 분석하고, 우리나라 역대 초등 수학교과서의 곱셈 도입 방식의 변천을 살펴볼 것이다. 둘째, 이를 바탕으로 기존의 여러 방식을 종합한 새로운 곱셈 지도 방안을 수립하고 실험 지도안을 구체적으로 구안한다. 셋째 우리나라 초등학교 2학년의 한 학급을 실험집단으로 선택하여 교수실험을 수행하고, 그 결과를 곱셈에 대한 학생의 전반적인 이해 실태라는 관점에서 파악함으로써 곱셈 지도에 시사점을 제공하고자 한다.

II. 곱셈에 대한 교수학적 분석

우리가 흔히 '3×4=12'라는 기호를 썼을 때 이것이 뜻하는 것과 가리키는 대상은 무엇인가? 이 장에서는 이 질문에 대한 대답을 개념과 모델이라는 두 차원으로 나누어 고찰할 것이다.[3)] 우선 곱셈의 여러 개념과 모델을 분류하고 명확히 변별한 다음, 각각에 관련된 교수학적인 논점을 짚어갈 것이다. 이 내용은 이후 역대 교과서의 곱셈 단원 내용을 분석하는 기준과 새로운 지도안을 구안하기 위한 토대가 될 것이다.

1. 곱셈의 개념

개념적 차원에서 곱셈은 동수누가, 배, 곱집합의 세 가지로 나눌 수 있다.

동수누가(同數累加) 개념은 곱셈을 같은 수의 반복된 덧셈으로 규정하는 것으로서, 이 개념의 장점은 곱셈값을 구하는 간편한 알고리즘의 근거가 된다는 점이다. 예를 들면 $3\times4=3+3+3+3$이므로 12이다. 고등수학에서 본다면 동수누가 개념은 자연수의 피아노의 공리에서 곱셈을 귀납적으로 정의하는 것에 해당한다. 피아노의 공리에서는 $a\times1=a$ 를 출발점으로 하고 $a\times(b+1)=a\times b+a$로 곱셈을 정의한다(김응태, 박승안, 1989). 예를 들면 $3\times2=3+3=6$이고, $3\times3=3\times2+3=6+3=9$이고,

2) 분수의 개념은 자연수 곱셈과 함께 시작된 배 개념의 확장이다. 예를 들어 3×2=6이므로 6은 3의 2배이다. 그렇다면 8은 3의 몇 배인가? 2배보다는 크고 3배보다는 적다. 그것은 2와 3분의 2배이다.

3) 선행연구의 대부분은 개념과 모델로 나누지 않은 채, 단일한 차원에서 고찰하는 경우가 많았다. 예를 들면 장미라(2006)에서는 모델이라는 이름하에 곱셈의 여러 측면을 동수누가 모델, 정렬 모델, 측정 모델, 조합 모델, 수직선 모델, 수형도 모델, 순서쌍 모델 등 다양하게 분류하였다.

$3\times4=3\times3+3=9+3=12$가 된다.

동수누가는, 다시 말한다면, '귀납적인 방법을 통해서 곱셈을 덧셈으로 환원시키는 것'이다. Freudenthal(1973)에 따르면 이 방법은 곱셈 알고리즘의 획득이 목적이었던 전통적인 산술 교육에서 최고의 효율적인 수단이었다. 이러한 '곱셈의 덧셈화'로부터 곱셈 알고리즘을 익히는 탁월한 수단이 고안되었는데, 그것이 바로 '뛰어세기(systematic counting)'이다. 귀납적 정의로부터 $3\rightarrow6\rightarrow9\rightarrow12\rightarrow\cdots$ 와 같은 뛰어세기를 도출하는 것은 자연스럽다. 우리나라의 역대 교과서들은 이러한 뛰어세기를 통하여 동수누가를 이해시키는 것을 매우 중시하였다. 제 4차부터 제 7차까지의 모든 수학 교과서의 곱셈 도입 단원의 한결같은 공통점은 '뛰어세기를 통하여 동수누가를 이해하는 것'을 제일 처음에 중점적으로 연습한다는 것이다.

배(倍) 개념에서 본다면 3×4는 '3의 4배'이다. 배 개념은 기수, 서수와 함께 자연수의 대표적인 개념 중의 하나로서, 이산량에 기초한 기수 개념을 기초로 하여 2차적으로 건설되는 것이다. 예를 들어 '사과 6개는 사과 2개의 3배'이라는 진술에 대해서 생각해보자. 여기에는 낱낱의 이산량을 나타내는 구체적인 수준의 기수개념(6개와 2개)과 두 이산량 사이의 관계를 나타내는 추상적인 수준의 배 개념(3배)이 함유되어 있다. 배 개념으로서의 '3'은 '사과 2개와 6개', '3개와 9개', '4개와 12개', … 등의 모든 동치관계를 대표하는 개념으로서 '사과 3개'에서의 3과는 다른 것이다. '3'이라는 동일한 기호를 서로 다른 수준의 개념을 지칭하는데 혼용하고 있는 셈이다. 물론 교사는 맥락을 통해서 구별할 수 있지만, 처음 배우는 아동에게는 서로 다른 정신적 대상을 같은 기호로 지칭하는 것에서 비롯된 혼동이 있을 수 있다.

측정 활동의 맥락에서 본다면 기수 개념은 절대단위, 배 개념은 상대단위를 통한 측정에서 발생된다. '1개'라는 절대단위에 입각하여 측정한다면 사과 6개의 수 값은 언제나 '6'이며 다른 방법이 없다. 하지만 상대단위를 통한다면 사과 6개는 다양한 수 값으로 나타낼 수 있다. 사과 2개를 단위로 하면 3, 사과 3개를 단위로 하면 2, 사과 6개를 단위로 하면 1이다. 단위를 다양하게 택함으로써 하나의 양을 나타내는 수 값이 다양하게 변하는 것, 이것이 배 개념의 본질이다.

배 개념으로 곱셈을 정의하면 피승수는 기수 개념이고 승수는 배 개념이므로 그 성격이 서로 다르게 된다. 예를 들어 곱셈식 3×3에서 기호로 본다면 승수와 피승수는 똑같지만, 아동의 머릿속에 존재하는 개념이미지는 같을 수 없다. 이런 이유로 배 개념을 통한 곱셈에서는 $2\times3=3\times2$와 같은 곱셈의 교환법칙을 설명하는 일이 어려워지는 문제점이 생긴다.

곱집합 개념은 집합론에 근거한 곱셈 개념이다. 집합론에서는 두 자연수의 곱을 다음과 같이 정의한다. "두 자연수 a와 b에 대하여 $a\times b$는 집합 $A\times B$의 원소의 개수이다. 단 A의 원소의 개수는 a이고 B의 원소의 개수는 b이며 $A\times B=\{(a,b)|a\in A,\ b\in B\}$이다." 예를 들어 3×4는 $n(A\times B)$이다. 단 A={국어, 영어, 수학}, B={갑, 을, 병, 정}.[4)]

곱집합 개념의 특징은 승수와 피승수가 모두 개수(numerosity number) 개념으로서 같다는 점이다. Freudenthal(1973)에 따르면 학교 수학에서 자연수의 여러 측면 중 개수 측면은 매우 중요하며, 그 중요성이 효과적인 역할을 수행하는

4) '곱집합'이라는 용어와 $A\times B$ 라는 기호는 곱셈이라는 결과물에 치우친 이름이라고 생각된다. Freudenthal(1973)이 사용하는 쌍집합(pairs set)이라는 용어와 「A,B」와 같은 기호가 더 적절해 보인다(p.247).

때가 바로 곱집합 개념에 따른 곱셈의 응용 상황이라고 말하였다(p.189).

곱집합 개념은 곱셈의 교환법칙을 설명하기 용이하다는 장점을 가진다. 그 첫째 이유는 승수와 피승수가 개수 개념으로서 서로 성격이 같기 때문이다. 그리고 $n(A\times B)=n(B\times A)$를 직관적으로 이해하기가 용이하기 때문이다. 이와는 다르게 동수누가와 배 개념은 곱셈의 교환법칙을 설명하기 쉽지 않다. '3을 4번 더한 것'과 '4를 3번 더한 것'이 같다는 것, 혹은 '3의 4배'와 '4의 3배'가 같다는 것은 직관적으로 쉽게 받아들여지지 않는다.

2. 곱셈의 모델

개념 보다 구체적인 수준에서 곱셈을 구현하고 있으면서, 장차 개념으로서의 추상화를 가능케 하는 조작이나 활동을 모델이라고 한다. 곱셈의 모델은 측정, 격자, 수직선, 조합의 네 가지로 구분할 수 있다.

측정이란 단위량에 대한 측정량의 배 값을 계산하여 측정량을 수치로 표현하는 과정이다. 엄격히 말하면 측정 중에서 이중 단위에 의한 측정이 곱셈의 모델이 된다. 예를 들어 (1피트)=(12인치) 라는 단위 체계 하에서 3피트를 재었을 때, 이 측정값을 인치로 나타내는 과정은 $12\times3=36$으로 나타내어진다. 피트는 일차단위이고 인치는 이차단위이며, 3은 일차단위(피트)에 대한 측정량의 배 값이다.

묶음 모델은 이중단위에 의한 측정 모델의 특수한 유형으로 분류할 수 있다. 예를 들어 사과가 한 접시에 3개씩 4접시 있어서 모두 12개가 있다고 하자. 일차단위는 사과 '한 접 시(3개)'이고 이차단위는 사과 '한 개'이다. 4는 일차단위(접시)에 대한 전체량의 배 값이다. 주변에서 묶음 상황은 매우 다양하다. 몇 묶음, 몇 봉지, 몇 상자, 몇 학급, … 등등. 묶음 모델은 현재 여러 교과서에서 곱셈을 도입할 때 사용하는 가장 흔한 맥락이다. 예를 들면 "초콜릿이 한 상자에 4개씩 모두 3상자가 있을 때, 초콜릿은 모두 몇 개인가?"와 같은 문제가 있다. 측정 모델은 동수누가와 배 개념을 잘 내포한다.

격자모델은 여러 사물을 가로 방향과 세로 방향으로 배열하여 일정하게 배열하여 전체적으로 직사각형 모양을 이루도록 한 것이다[그림 II-1].

생활에서 알아보기

윷가락이 한 상자에 4개씩 들어 있습니다. 3상자에는 모두 몇 개의 윷가락이 들어 있는지 알아보시오.

활동 1) 4×3은 얼마인지 알아보시오.

4개씩 묶어 보시오.

4개씩 몇 묶음입니까?

덧셈식으로 나타내어 보시오.

$4+\square+\square=\square$

곱하기로 나타내어 보시오.

$4\times\square=\square$

윷가락은 모두 몇 개입니까?

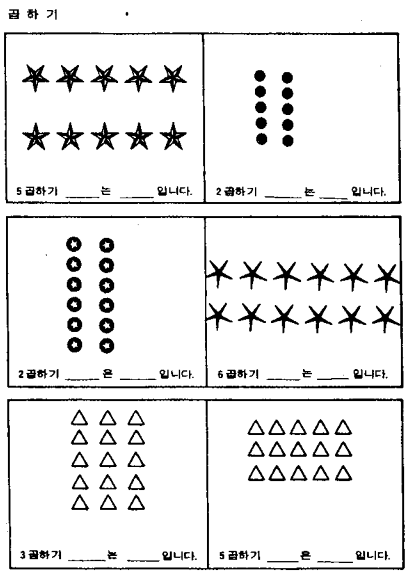
[그림 II-1] 제 7차 교과서 p.112

예를 들면 "다음 그림과 같이 상자에 들어있는 사과를 곱셈으로 나타시오." "2개의 직선을 날줄로, 3개의 직선을 씨줄로 놓았을 때 직선이 만나서 생기는 점은 모두 몇 개인가?" 등이 있다.

격자모델[5]은 학생들로 하여금 곱셈을 '보도

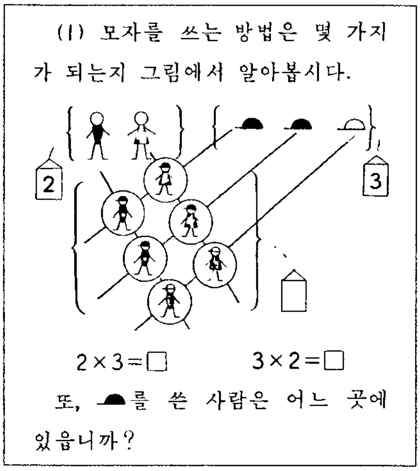
5) Freudenthal이 'rectangular pattern'이라고 부른 것을 '격자모델'로 번역하였다.

록' 도와줄 수 있는 직관적인 모델이다. 전통적으로 격자모델은 뛰어세기(systematic counting)와는 상충되는 측면이 있었고, 그 결과 계산 기능을 중시하는 풍조 속에서 다소 소홀히 취급되어 왔다. 예를 들어 3×6 자체보다도 그 값이 18이라는 것에 초점을 맞추다 보면, 3×6이 가지는 대칭성과 균형(직사각형 모델로 대변되는)은 파괴되기 때문이다. Freudenthal(1973)은 직사각형 모델을 통한 활동이 곱셈 도입 과정에서 비중있게 사용되어야만 한다고 주장하면서, '새수학'이 곱셈의 도입 부분에서 격자모델을 중용했던 점은 새수학의 장점이라고 말하였다[그림 II-2](p.248).

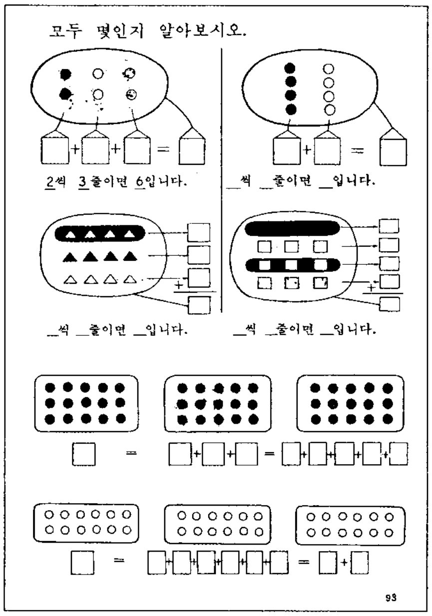


[그림 II-2] SMSG 수학1, p.146

격자 모델에는 동수누가, 배 개념뿐 아니라 곱집합 개념도 잘 함유되어 있다[그림 II-3]. 우리나라의 역대 교과서에는 각 개념을 구현하기 위하여 격자모델을 다양하게 사용하였다[그림 II-4].

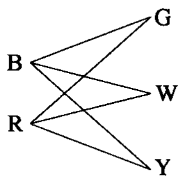


[그림 II-3] 제 3차 교과서, p.77



[그림 II-4] 제 5차 교과서, p.93

조합 모델은 일명 '짝짓기 상황'을 말한다. 예를 들면 "셔츠의 색깔이 2종류이고 바지의 색깔이 3종류일 때, 색깔을 달리하여 셔츠와 바지를 입을 수 있는 방법의 수", 혹은 " "빵이 3종류, 음료수가 4종류가 있을 때, 빵과 음료수를 각각 1개씩 주문하는 방법의 수"가 있다. 위의 첫째 문제의 해답은 곱집합 {(B,G), (B,W), (B,Y), (R,G), (R,W), (R,Y)}의 원소의 개수이다 [그림 II-5]. 조합모델은 곱집합 내념을 잘 내포한다. 제 3차 교과서에서는 이러한 조합 모델을 통해서 곱집합 개념으로 곱셈을 정의했었으나, 그 이후의 교과서에서는 조합모델을 철저히 배제하였다.

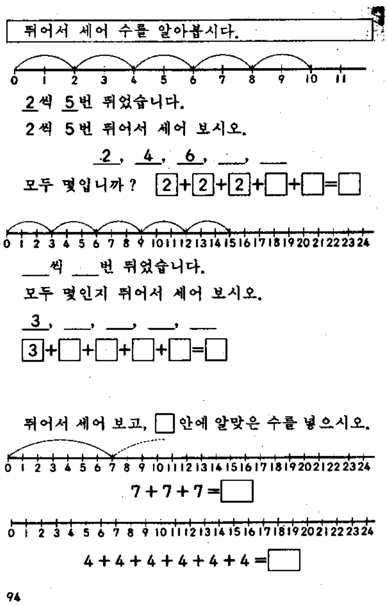


[그림 II-5] 조합모델의 구조도

조합모델 문제를 곱셈으로 해결하는 방식은 중학교 수학에서는 '곱의 법칙'이라는 이름으로 형식화된다. "두 사건 A가 일어나는 경우의 수를 m이라 하고 사건 A의 각각의 경우에 대하여 사건 B가 일어나는 경우의 수를 n이라 하면, (A, B가 동시에 일어나는 경우의 수)=m×n 이다(박두일 외 4, 2002)." 예를 들어 동전 한 개와 주사위 한 개를 던졌을 때 나오는 모든 경우의 수는 2×6=12이다. 이런 부류의 간단한 문제들이 초등 6학년의 경우의 수 단원에서 등장한다. 하지만 곱의 법칙이라는 이름은 사용되지 않는다.

수직선 모델은 반직선을 일정한 간격으로 구획하고 아래에 범자연수를 기입한 후, 위에 일정한 호를 그려서 곱셈을 구현하는 모델이다.

[그림 II-6]에 나타나있듯이, 수직선 모델은 동수누가와 뛰어세기를 설명하기에 매우 적합한 모델이다. 이런 장점으로 인해서 수직선 모델은 3차부터 6차 교과서까지 비중있게 널리 사용된 모델이었으나, 7차 교과서에서는 어떤 이유에서인지 배제되었다.



[그림 II-6] 제 6차 교과서, p.94

3. 곱셈의 교수학

지금까지 살펴보았듯이 곱셈의 개념은 단일하지 않다. 그렇다면 여러 개념 중에서 어느 것이 주된 것이고 어느 것이 보조적인 것인가? 논쟁은 주로 동수누가를 둘러싸고 벌어졌다.

현대적인 추상수학의 관점에서 동수누가에 반대했던 사람들은 수학교육현대화 운동가들이었다. 그들은 "나중에 배우게 될 추상적인 체(field)의 구조에서 곱셈은 덧셈과는 독립된 것이다. 따라서 이것은 이른 시기부터 설명되어져야만 한다"고 말하였다. 이에 대하여 Freudenthal (1973)은 다음과 같이 비판한다.

> 이러한 주장은 전적으로 그릇되다. 일반적인 체의 개념에서 곱셈은 덧셈으로부터 '분리되어' 있다. 이것은 완전히 옳다. 그러나 일반적인 체의 집합은 빈 상자이다. 그것을 채우기 위해서는 체의 사례가 적어도 하나는 필요하다. 일단 어떤 집합이 덧셈과 곱셈을 갖추기 위해서는, 그리고 당신이 유한체로 자신을 제한하기를 원

하지 않는다면, 유리수체야말로 당신이 그 전에 만들어야만 하는 바로 그것이다. 그러나 만약 이 유리수체에서 곱셈이 정의되어야만 한다면, 그 어떤 교리(dogma)도 초등산술에서 늘 해왔던 것과 같은 방법, 즉 곱셈을 덧셈으로 귀납적으로 환원시키는 문제로부터 당신을 구할 수 없다(p.248).

이와는 다르게 곱셈을 덧셈으로 환원시키는 방식을 심리학적인 관점에서 비판한 사람이 J. Dewey이다. Dewey(1895)는 곱셈을 동수누가, 즉 덧셈으로 환원시키는 것은 아동으로 하여금 덧셈과 구별되는 곱셈의 본질, 즉 배 개념을 획득하지 못하게 만들고, 그 결과 배 개념이 본질인 분수를 이해하는데 장애를 유발한다고 말한다.

곱셈은 단순한 세기활동에 함축되고, 그것의 기원이 덧셈에 있지만, 그것은 단순한 세기가 아닐뿐더러 덧셈과 같지도 않다. $2+$2+$2+$2=$8 이 가리키는 조작은, 8=4×2를 인식함이 없이 수행될 수 있다. 후자는 전자에 함의되며, 멀지 않아 그것으로부터 진화한다. 그러나 바로 이러한 이유에 의해서 그것은 더 나중의 더 복잡한 개념이고, 따라서 매우 심한 의식적인 주의 집중을 요구한다. 집성(集成)의 과정은 사물을 통해서 상대적으로 쉽게 만들어진다. 그것은 '관계된' 사물의 지각에 지나지 않는다. 곱셈 과정은 모든 수의 추상적인 요소인 비 혹은 배를 실제적으로 사용할 것을 요구하고 다소간에 의식적으로 파악할 것을 요구하는 것이기 때문에 더욱 복잡하다. 그것은 사물을 '관계짓는' 개념이다. 우리는 여러 개의 둘, 셋 혹은 넷을 계속해서 더하는데 있어서, 일련의 가수(加數)를 증가하는 집성체에 즉시 합병하고 난 후 다시는 '가수에게로 돌아오지 않는' 방식으로 할 수 도 있으며, 이전에는 일어나지 않았던 매우 추상적인 배 개념이 없이도 상대적인 '합'들을 정확하게 얻을 수도 있다. 즉 '합'은 '가수'의 반복횟수를 인자중의 하나로 가지는 '곱'이라는 것을 결코 의식하지 못한 채 말이다. 확실히 이런 추상적인 관념은 아동에게서나 종족에게서는 수 관념의 발달의 초기에는 일어나지 않는다(pp.98-99).

곱셈 지도에서 동수누가와 관련된 쟁점의 근원은 '개념의 이해'와 '계산 기능의 숙달'이라는 서로 대립되는 일반적인 수학교육 목적의 차이이다. 계산 기능의 숙달에 앞서 자연수의 덧셈에서부터 분수까지 적용될 수 있는 포괄적인 수 개념의 이해를 추구했던 Dewey에게 있어서 덧셈과 구별되는 곱셈다움은 바로 '배' 개념이고, 이것은 곱셈의 도입시기부터 다루어져야만 하는 것이었다.

동수누가 관점은 계산 기능의 숙달이라는 전통적인 수학교육의 목표가 곱셈 개념에 투영된 결과이다. 그 이유는 '뛰어세기(systematic counting)'[6] 때문이다. 곱셈의 효과적인 계산 알고리즘은 뛰어세기인데, 이것은 곱셈을 동수누가로 보는 견해를 알고리즘화한 것이다. 이것은 현재 아동이 곱셈구구를 훈련할 때 의지하는 원리이며, 컴퓨터가 작동할 때 사용하는 원리이다. 계산 능력의 관점에서 뛰어세기와 동수누가를 강조하는 것은 우리나라의 역대 교과서들의 한결같은 공통점이다.

동수누가에 근거하여 계산능력을 추구하는

6) '뛰어세기'와 유사한 용어로서 '묶어세기'가 있다. 이 둘은 같은가, 다른가? 4차 교사용 지도서(1986)에서는 이 두 가지가 본질적으로 같은 것이라고 말하고 있다. "두 번째 것은 묶여져 있는 것을 보고 그 총수를 알아보는 것이다. 이때도 3개짜리가 4묶음이므로 3, 6, 9, 12 하고 묶어세어 답하게 한다. 세 번째 것은 뛰어세기다. 이것은 수 계열을 이해하고 있는가를 확인하는 것도 된다. 수직선상에서도 이러한 활동은 가능하여야 한다. 실제로 이 두 활동의 묶어세기와 뛰어세기는 같은 것이다. 묶어 셀 수 있어야 뛰어세기가 가능하며, 또 뛰어 셀 수 있어야 묶어세기가 가능한 것이다(p.128)", 그러나 필자가 보기에 위의 활동은 '뛰어세기'라는 이름이 적합하며, '묶어세기'는 다음과 같이 규정하는 것이 타당하다고 생각한다. 어떤 사물 6개가 2개씩 3묶음으로 되어있을 때, 이것을 2→4→6으로 세는 것이 뛰어세기라면, 묶음을 '하나'로 인식해서 1→2→3으로 세는 것, 즉 6개의 사물을 3으로 규정하는 과정이 묶어세기이다.

것은 곱셈의 모델에도 영향을 미쳤다. 모든 모델들이 동수누가 관점에서 다루어졌다. 특히 격자모델의 경우 그 본질은 형상이나 대칭성임에도 불구하고, 뛰어세기와 동수누가를 위한 관점에서 주로 사용된 결과 그 게슈탈트적 본질을 잃어버리게 되었다.

곱셈의 개념과 모델과 관련된 추가적인 교수학적 쟁점들은 다음 장에서 우리나라 역대 교과서를 분석하면서 병행하여 다룰 것이다.

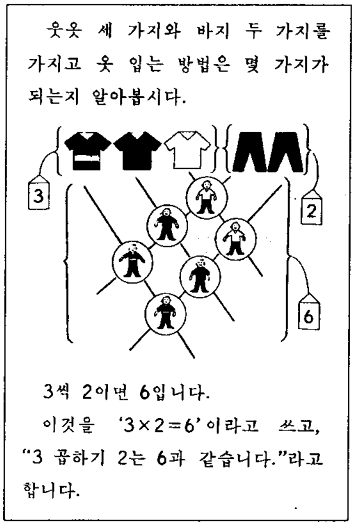
III. 교과서 분석

이 장에서는 곱셈에 대한 지금까지의 수학적 분석을 바탕으로 우리나라 역대 교육과정 중에서 두드러진 특징을 가진 몇몇 교육과정을 선별하여 해당 초등수학 교과서의 곱셈 도입 단원의 내용을 분석하여 특징을 추출하고, 현재까지 이르는 과정 가운데서 형성된 전체적인 경향성을 도출할 것이다.

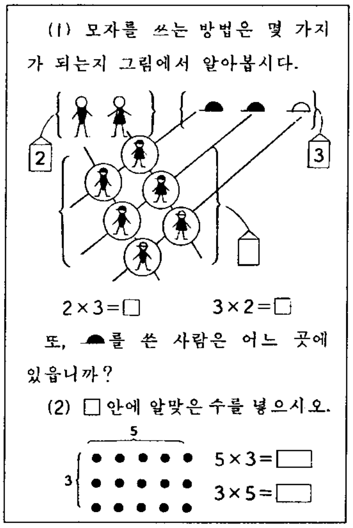
1. 제 3차 교육과정에 따른 교과서

제 3차 교과서는 2학년 1학기의 5단원 '곱셈의 기초'에서 곱셈을 도입하고 있다. 3차 교과서의 가장 큰 특징은 곱집합 개념으로 곱셈을 정의한다는 점이다. 제 3차 교육과정은 이른바 '학문중심 교육과정'으로 불리며 수학적 구조와 집합론 등과 같은 현대수학을 중시했음을 상기할 때, 이는 당연한 현상으로 보인다[그림 III-1].

제 3차 교과서의 두드러진 또 하나의 특징은 곱셈의 교환법칙이 매우 이르게 다루어진다는 점이다. 곱셈의 교환법칙은 곱셈을 정의한 직후에 격자모델을 통하여 도입하고 있다[그림 III-2].



[그림 III-1] 제 3차 교과서, p.76



[그림 III-2] 제 3차 교과서, p.77

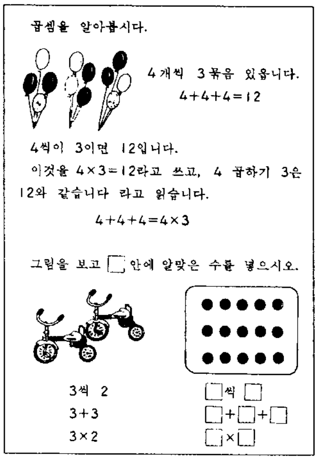
학문중심 교육과정의 교육학적, 심리학적 기초를 닦은 Bruner는 그의 저서 「교육의 과정」에서 수학의 구조의 사례로서 교환법칙, 결합법칙, 배분법칙을 제시하고 있음을 볼 때, 3차 교과서의 이러한 현상 또한 당연한 귀결로 보인다. 현재의 제 7차 교과서는 3-가 단계에서 (두 자리수)×(한 자리수)를 계산하는 곱셈 알고리즘과 함께 곱셈의 교환법칙을 다루고 있다.

2. 제 4차 교육과정에 따른 교과서

4차 교과서는 곱셈의 도입을 위하여 두 단원을 할애하고 있다. 2학년 1학기의 9단원인 '곱셈의 기초'와 10단원인 '곱셈'이 그것이다. 곱셈의 기초 단원은 곱셈을 정의하기에 앞서 다양한 모델을 통하여 곱셈의 개념을 형성시키는 활동으로 이루어져 있다.

> 곱셈을 도출시킬 수 있는, 역으로 말한다면, 곱셈이 적용되는 여러 가지 장면을 학생들이 경험할 수 있도록 구성하고 있다. … 그 여러 가지 장면이란 동수누가, 묶어세기, 뛰어세기, 정렬, 곱집합 만들기, 배 개념 등이다. 이들 여러 가지 장면에 대한 경험을 두루 부여하자는 것이 이 단원의 궁극적 목표인 것이다(문교부, 1986, p.126).

이렇듯 곱셈의 개념을 형성할 수 있는 구체적인 활동들을 충분히 수행 한 후, 다음 단원에서 곱셈의 정의가 이루어진다. 이 부분에서 4차 교과서의 가장 큰 특징이 나타난다. 4차 교과서는 3차 교과서에서 취했던 정의 방식 즉 곱집합을 통하여 곱셈을 정의하는 것을 포기하고, 그 대신 동수누가로 곱셈을 정의하였다. 그러나 전적으로 동수누가에만 의존하는 것은 아니며 묶음 모델이 수반된다[그림 III-3].



[그림 III-3] 제 4차 교과서, p.102

당시 교사용 지도서를 보면 곱집합 개념에서 동수누가 개념으로의 변화에 대한 근거가 기술되고 있다.

> 곱셈은 여러 가지 측면에서 도입할 수 있다. 그 측면의 하나는 동수누가라는 것이고, 또 하나는 곱집합이며, 또 하나는 배 개념인 것이다. 그러나 이들은 모두 동수누가라는 하나의 측면으로 환원될 수 있는 것이다. 그렇기 때문에 2학년에서의 곱셈 정의는 동수누가로써(단원 10에서) 하게 된다(문교부, 1986, p.126).

이 글에 의하면 곱집합을 통한 정의를 포기한 근거는 곱집합 개념과 배 개념은 모두 동수누가 개념으로 환원시킬 수 있다는 것, 즉 수학적인 이유 때문이다. 그러나 같은 교사용 지도서의 다른 부분에서는 이와 상치되는 주장이 기술되어 있다.

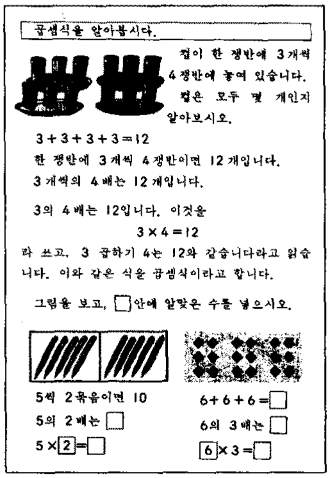
> 1973년도 교육 과정에 의하여 만들어진 교과서에서는 곱셈의 정의를 곱집합을 써서 하고 있다. 그것은 수학적으로 타당한 것이었으나 매우 난해한 것이었다. 그래서 이번 교과서에서는 곱집합의 원소의 수가 결과적으로 동수누가로 번안될 수 있기 때문에 그렇게 정의한 것이다(문교부, 1986, p.142).

이 글에 의한다면 곱집합을 통한 정의를 포기한 이유는 그것이 아동들이 이해하기에 어렵다는 것, 즉 실제적인 이유 때문이지 곱집합을 통한 정의 자체가 수학적인 면에서 불충분하기 때문은 아니다. 하나의 현상에 대한 서로 상충되는 두 근거를 어떻게 이해해야 할까? 앞서 살펴보았듯이 곱셈의 수학적 기초는 곱집합과 동수누가 모두 가능하다. 따라서 4차 교과서에서 곱집합 개념을 버리고 동누수가 개념을 채택한 근거는 아동들이 이해하기 어렵다는 점, 즉 실제적인 이유 때문으로 보아야할 것 같다. 곱집합 개념은 4차 교과서에서 삭제된 이후 현재의 7차 교과서

에 이르기까지 전혀 사용되지 않았다. 곱집합 개념을 구현하는 조합 모델도 마찬가지이다.

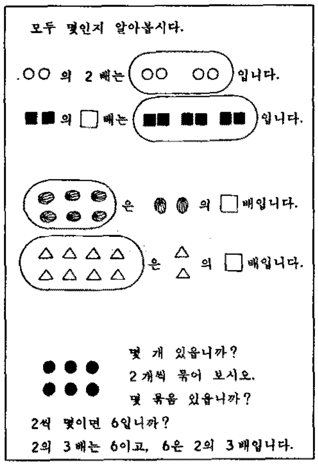
3. 제 6차 교육과정에 따른 교과서

6차 교과서에서는 곱셈개념의 도입과 정의가 2학년 1학기에서 곱셈의 기초라는 한 단원에서 통합되어 이루어졌다. 6차 교과서의 가장 큰 특징은 배 개념을 통하여 곱셈을 정의하고 있다는 점이다. 물론 전적으로 배 개념만 사용하는 것이 아니라 동수누가와 협력하고 있기는 하지만, 다른 교과서와는 크게 다른 점이다[그림 III-4].



[그림 III-4] 제 6차 교과서, p.97

동수누가와 협력했다는 점에서 불완전한 측면이 있지만, 배 개념을 통한 곱셈의 정의 방식을 택한 것은 6차 교과서가 처음이며 유일하다. 6차 교과서에서는 곱셈을 정의하기에 앞서서 배 개념을 형성하기 위한 많은 활동을 수행하고 있고 이를 토대로 곱셈을 정의하고 있다. 곱셈을 정의하기에 앞서서 배 개념 형성을 위한 활동을 많이 수행하는 것은 4차와 5차 교과서도 마찬가지이다[그림 III-5]. 단지 4차와 5차 교과서는 배 개념을 곱셈의 정의에서 사용하지 않았을 뿐이다. 그러나 7차 교과서에서는 사정이 크게 달라진다.

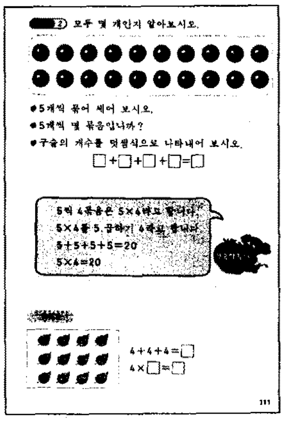


[그림 III-5] 제 4차 교과서, p.96

4. 제 7차 교육과정에 따른 교과서

곱셈 도입과 관련하여 7차 교과서는 6차 교과서와는 많은 차이를 보인다. 우선 수직선 모델이 삭제되었다. 수직선 모델은 곱셈을 정의하기 이전에 뛰어세기나 묶어세기를 통해서 동수누가를 이해시키기 위한 기반으로 4차부터 6차까지 꾸준히 사용되었던 모델이었다

둘째, 배 개념을 사용하지 않고 묶음과 동수누가 만으로 곱셈을 정의한다[그림 III-6].



[그림 III-6] 제 7차 교과서, p.111

더구나 이전의 교과서들이 곱셈을 정의하기 이전에 배 개념을 형성하는 많은 활동을 수행한 것과는 달리, 7차 교과서에는 곱셈을 정의한 이후에 배 개념을 다룬다. 이 점은 이전 교과서들과 크게 구별되는 점이다. 한 가지 주목할 것은 7차 교과서의 이러한 면이 7차 교육과정 해설서의 곱셈 관련 지침과 상충한다는 점이다.

> 생활 주변의 경우에서 배의 개념을 이해하게 하고, 동수누가와 관련시켜 몇의 몇 배는 얼마인지 알아보게 한다. 이들을 곱셈식으로 나타내어 곱셈식과 곱을 정의하고 묶어세기, 뛰어세기, 동수누가로 곱을 구하게 한다(교육인적자원부, 1998, p.48).

교과서가 어떤 연유로 교육과정 해설서와 상치되게 되었는지 알기는 어렵다. 하지만 결과적으로는, 7차 교과서의 이러한 모습은 동수누가 개념이 그의 경쟁자였던 곱집합개념이나 배 개념을 제치고 곱셈의 개념의 도입 영역의 중심부를 차지한 것을 보여준다. 곱집합 개념은 그것을 구현하는 조합 모델과 함께 4차 교과서부터 자취를 감추었고, 배 개념은 7차 교과서에 이르러서는 곱셈을 정의한 이후에 곱셈을 보완하는 보조 개념 정도로 치부되고 있기 때문이다.

4차부터 7차 교과서의 곱셈 단원을 관통하는 원리를 한마디로 말한다면 '동수누가에 의한 동수누가를 위한' 것이다. 곱셈의 도입 단계는 다양한 모델(묶음, 격자, 수직선, 조합)을 기반으로 묶어세기와 뛰어세기 활동을 수행함으로써 동수누가를 이해시키는 활동으로 이루어지고, 곱셈의 정의는 동수누가로 이루어지고, 곱셈의 연습 단계는 계산 알고리즘으로서의 동누수가를 훈련하는 것이다. 이렇듯 동수누가가 중시된 이유는 수학적인 이유에서라기보다 시대적인 교육사조 때문이라고 생각된다. 산업화 시대의 요구에 부응하여 산술적인 계산 기능을 함양하기 위해서는 곱셈값 계산의 알고리즘의 기반이 되는 동수누가를 중시하지 않을 수 없기 때문이다.

이러한 동수누가와 대비되는 것이 배 개념이다. 배 개념은 7차 교과서에서는 주변으로 밀려났지만, 6차 교과서에서는 곱셈 정의에 채용되었고, 곱셈 정의에 앞서서 형성되어야할 중요 개념이었다. 2006년 개정 교육과정 해설서에는 배 개념이 곱셈의 도입에서 가장 우선시되어 형성해야할 곱셈의 본질적인 의미라고 말하고 있다.

> 곱셈의 본질적인 의미는 배의 개념이다. '나의 나이는 동생 나이의 2배이다'와 같이 생활 장면에서 곱셈이 사용되는 예를 찾고, 이를 통해 곱셈의 의미를 이해하게 한다. 이전 학년에서 학습한 묶어세기, 뛰어세기, 동수누가 등의 방법을 사용하여 '~의 ~배'를 곱셈식으로 나타내고 곱을 정의한다. (교육과학기술부, 2007, p.75)

동수누가는 곱셈을 덧셈으로 환원시켜버리지만, 배 개념은 곱셈다움 즉, 덧셈과 구별되는 곱셈만의 본질을 대변한다. 또한 배 개념은 곱셈에만 그치는 것이 아니라 나눗셈과 분수의 핵심 개념인 비(比)개념으로 확장되는 기반이다. 다음 장에서는 이러한 배 개념에 기초한 곱셈의 새로운 지도 방안과 그에 따른 교수 실험을 분석할 것이다.

Ⅳ. 교수실험

1. 실험 지도안의 구성

가. 일반적인 구성 방향

실험적 지도안의 일반적인 구성 방향은 다음과 같다.

첫째 곱셈의 개념과 곱셈값의 계산 알고리즘을 명확히 구분하고 개념 형성을 계산 알고리

즘보다 앞세운다. 곱셈의 중심 개념은 배 개념이며, 계산 알고리즘은 동수누가이다. 이렇게 된다면 역대 교과서에서 제일 앞에 등장했던 묶어세기와 뛰어세기를 통한 동수누가를 다루는 활동이 뒷부분으로 옮겨지고, 그 자리에는 배 개념을 형성하는 활동으로 채워진다. 종전의 6차 교과서에서도 배 개념 형성을 위한 활동을 수행하고 배 개념을 통해서 곱셈을 정의했다. 하지만 6차 교과서에서는 배 개념 형성 활동과 함께 동수누가도 같이 다룬 반면, 본 실험 지도안에서는 동수누가를 곱셈을 정의한 이후로 완전히 이동시켰다.

둘째 배 개념을 형성하는 활동은 고정된 전체량이 주어졌을 때 어떤 일정한 크기의 묶음으로 묶고 그 묶음의 개수를 세는 활동, 즉 묶어세기 활동이다. 예를 들어 6개를 2개씩 묶어세면 수 값은 3이고, 3개씩 묶어세면 수 값은 2이다. 이러한 묶어세기 활동은 본질적으로 측정활동이다. 단위량을 정하고 전체량 속에 속하는 단위량을 개수를 셈으로써 전체량은 어떤 수 값으로 표현된다. 이때의 수 값은 단위량에 대한 전체량의 배 값으로서, 단위량을 어떻게 정하느냐에 따라서 배 값은 여러 가지가 될 수 있다.

이러한 묶어세기 활동은 가르기(분석)와 모으기(종합)조작을 통하여 모호한 전체를 명확한 전체로 변환시키는 과정이다. 종전의 동수누가 활동은 단위량과 배 값이 주어지고 전체량을 구하는 것이었다면, 묶어세기 활동은 전체량과 단위량이 주어지고 배 값을 구하는 활동이다. 실험 지도안에서는 전체량을 구하는 활동이 더 복합적인 활동이라고 보고 배 값을 구하는 활동을 그보다 앞서 배치하였다.[7)]

셋째 배 개념을 형성하는 활동 가운데 고무줄을 몇 배로 늘이는 상황을 그림으로 표현하는 활동을 포함시킨다. 이 활동은 전통적인 수직선 활동의 변형이다.

넷째 곱셈의 정의하고 동수누가에 의한 계산법을 다룬 후에 응용으로서 조합 모델을 다룬다.

나. 실험 지도안의 내용

위와 같은 지침을 따라서 총 5차시의 실험적 지도안을 작성하였다. 각 차시별 주제와 각 차시별 중심적인 모델과 개념을 표로 정리하면 다음과 같다<표 IV-1>.

2. 실험 지도안의 적용

본 연구자는 이렇게 구안한 실험 지도안을 충청남도의 G시에 소재하는 G초등학교 2학년 2반 학생 27명에게 적용하여 실험 수업을 실시하였다. G시의 인구수는 약 13만 명으로서, 인구규모 면에서 충청남도에서 5번째 도시이다. G초등학교는 G시의 중심부에 위치하고 있다.

실험 수업은 2-가 단계의 곱하기 단원의 전체 8차시 중에서 1차시부터 5차시까지의 내용을 실험 지도안으로 수행하였다. 학생들에게는 실험 지도안이 차시별로 제공되었으며, 기존의 교과서는 전혀 사용되지 않았다. 6차시에는 연구자가 직접 제작한 평가지에 의한 사후 검사를 실시하였다. 총 5차시의 수업 가운데 2차시는 연구자가 직접 수업을 담당하였고, 나머지 4개 차시 수업은 당시 G초등학교에서 교육실습 중이던 G교대의 수학심화과정 4학년 학생 4명이 담당하였다. 실험 수업을 담당할 실습생은 사전에 연구자와의 협의회를 통해서 실험 지도안의 취지와 의도를 이해하고 그에 적합한 구체적인 수업 계획을 공동으로 수립하였다.[8)]

상세한 실험 수업 일정은 다음 표에 요약하였다.

---

7) 이런 활동은 나눗셈에 속하는 것이므로 곱셈을 도입하는 활동으로서는 부적절하지 않은가하는 반론이 제기될 수 있다. 그러나 실험 지도안을 적용해본 결과, 학생들은 전체량을 구하는 동수누가 활동보다 배 값을 구하는 묶어세기 활동을 더 쉽게 수행하였다.

3. 사후 검사

총 5번의 실험 수업이 끝난 직후에 연구자가 제작한 평가지를 통해서 사후 검사를 실시하였다. 평가 문항별 내용을 요약하면 다음 표와 같다. 구체적인 평가 문항은 부록으로 첨부하였다.

<표 IV-1> 실험지도안의 개요

	주제	주요활동	개념	모델
1차시	묶음으로 세어보자	• 묶음 구조를 말로 표현하기 • 같은 사물 여러 개의 모임을 같은 크기의 여러 묶음으로 가르기 • 같은 사물 여러 개의 모임을 다양한 크기의 묶음으로 가르기 • 생활 주변에서 묶음 구조를 찾아서 말로 표현하기	몇 개씩 몇 묶음	묶음
2차시	몇 배입니까?	• 묶음 상황으로부터 몇 개의 몇 배를 정의 • 사과 18개를 다양하게 몇 개의 몇 배로 나타내기 • 몇 개의 몇 배를 격자 형태로 배열하기 • 고무줄을 몇 배 늘인 상황을 통해서 기수개념과 다른 것으로서의 배 개념 형성	배	격자 수직선
3차시	곱셈을 알아봅시다.	• 배 개념으로부터 곱셈을 정의 • 곱셈을 동수누가로 나타내고 값을 구하기 • 배를 동수누가로 나타내고 값을 구하기(수직선 모델의 변형) • 격자모델로 제시된 사물, 묶음으로 묶고, 몇 배인지 설명하고, 곱셈식으로 나타내고, 동수누가로 전체값을 구하기	배 동수누가	격자 수직선
4차시	곱셈을 활용하여 봅시다(1)	• 조합모델에 관한 문제를 선 그리기로 해결하고 곱셈식으로 표현하기 • 격자모델(묶음모델)에 관한 문제를 곱셈식으로 나타내고 동수누가로 전체값 구하기	곱집합 배 동수누가	조합 격자 묶음
5차시	곱셈을 활용하여 봅시다(2)	• 성냥개비로 삼각형(사각형)을 여러 개 만든 후 그것을 덧셈식과 곱셈식으로 나타내기 • 2×3×4와 같은 세 수의 곱셈으로 나타낼 수 있는 묶음 구조를 곱셈으로 파악하고 나타내기	세수의 곱셈	삼중 묶음

<표 IV-2> 실험 수업 일정

차시	주제	담당	일시
1차시	묶음으로 세어보자	김한별	2008년 6월 24일 4교시
2차시	몇 배입니까?	연구자	2008년 6월 30일 3교시
3차시	곱셈을 알아봅시다.	최보람	2008년 7월 1일 2교시
4차시	곱셈의 활용(1)	연혜진	2008년 7월 2일 2교시
5차시	곱셈의 활용(2)	이재은	2008년 7월 2일 4교시
6차시	평가	최보람	2008년 7월 4일 4교시

8) 비록 연구자와의 협의회를 통해서 예비교사들이 실험지도안의 취지를 충분히 이해하도록 했다고 할자라도, 서로 다른 예비교사들이 참여했다는 것은 수업의 일관성을 파괴할 수 있다는 점에서 본 실험 설계의 제한점이라고 인정하지 않을 수 없다.

V. 실험 결과 분석

이 장에서는 실험집단에 대하여 실시했던 사후 검사의 결과를 분석할 것이다. 일차적으로는 다섯 가지의 분석 기준을 설정한 다음 정량적 측정치(정답률과 변별도)를 산출하였고, 이를 근거로 정성적인 판단을 진술하였다. 기본 통계량은 <표 V-1>과 같다.

1. 전체량을 구하는 문제와 배 값을 구하는 문제의 비교

단위량과 배 값이 주어졌을 때 전체량을 구하는 문제와 전체량과 단위량이 주어졌을 때 배 값을 구하는 문제 중 어느 것이 더 곱셈 도입기의 아동에게 적합한가?

전체량을 구하는 문항은 개념과 모델에 따라 서로 다른 4가지 문제를 제시하였다. 각각의 정답률과 그들의 평균은 <표 V-2>와 같다.

<표 IV-3> 사후 검사 문항 요약

번호	평가내용	사용된 모델
1	몇 개의 몇 배를 곱셈식으로 쓰고, 격자모델을 통해서 구하기	격자
2	몇 개의 몇 줄을 곱셈식으로 쓰고, 격자모델을 통해서 구하기	격자
3	몇 개의 몇 배를 수직선 위에 나타내고 곱셈식으로 쓰기	수직선
4	몇 개의 몇 묶음을 곱셈식으로 쓰고 전체량 구하기	묶음
5	조합 문제	조합
6	수직선 모델에서 두 고무줄의 배 관계를 구하기	수직선
7	몇 상자인지 구하기	격자
8	물건을 다양한 크기로 묶고 다양하게 곱셈식으로 나타내기	묶음
9	몇 개의 몇 줄을 동수누가로 구하고 곱셈식으로 나타내기	격자
10	고무줄 늘리기에서 몇 배 늘렸는지 구하고 배를 비교하기	수직선
11	곱셈식을 덧셈식으로 쓰고 값 구하기	계산 문제
12	삼중 곱셈 문제	삼중 묶음

<표 V-1> 기본 통계량

실험집단	인원수	평균(100점 기준)	표준편차
G 초등학교 2학년 2반	27	62.8	23.9

<표 V-2> 전체량을 구하는 문항의 정답률

문항번호	1.(1)	2.(1)	3.(1)	4.(1)	평균
특징	배 개념	격자 모델	배 개념+수직선	묶음 모델	
정답률(%)	77.8	81.5	59.3	88.9	76.9

반면 배 값을 구하는 7번 문항의 정답률은 85.2%로서 위의 76.9%보다 더 높았다.

주어진 전체량을 다양한 곱셈식으로 나타내는(단위량이 달라지는 것에 따라 전체량을 다양한 배 값으로 나타내는) 8번 문항의 정답률은 다음 <표 V-3>과 같다.

흔히 배 값을 구하는 문제는 나눗셈에 더 가까운 문제로서 곱셈의 도입기에는 부적합한 것으로 여기기 쉽지만, 실제는 이와 달랐다. 그 이유는 심리적인 차원에 있는 것 같다. 전체량을 구하는 문제는 전체량을 생성해야만 하지만, 배 값을 구하는 문제는 이미 주어진 전체량 가운데서 분류 작업만을 수행하면 되기 때문에 후자가 심리적으로 더 단순하다. 배 값을 구하는 활동이 곱셈 도입 활동으로서 부적절하지 않은 것으로 여겨진다.

2. 배 개념의 이해

배 개념의 이해에 관한 10번 문항의 정답률은 18.5%이다. 이 수치는 12번 문항(세수의 곱셈 문제)의 정답률을 제외한다면 검사지 전체를 통틀어서 가장 낮은 기록으로서, 실험 수업 2차시에 이 문항과 유사한 활동을 이미 수행했음에 비추어 본다면 이는 특이한 현상이다. 제시된 상황을 곱셈식으로 표현하는 문항에서도, 배 개념은 조합모델보다는 높았지만 격자모델이나 묶음 모델보다는 더 낮았다<표 V-3>.

배 개념 형성을 중심으로 작성된 지도안으로 수업을 받았음에도 불구하고 배 개념 형성에 관한 문항의 정답률이 낮았던 것은 그만큼 배 개념의 형성이 쉽지 않음을 의미한다. 10번 문항에서 '동건'이라고 답을 함으로써 여전히 가법적인 기수 개념 차원의 오답을 답한 학생이 51.8%에 달한 것도 '두 자연수의 관계로서의 배 개념' 이해가 그만큼 쉽지 않음을 보여준다.

상위 학생들보다는 하위 학생들이 배 개념을 더 어려워하는 것으로 나타났다. 제시된 상황을 곱셈식으로 표현하는 문항에서, 묶음모델에서는 맞았지만 배 개념 상황에서는 틀린 학생이 하위 13명 가운데에서는 6명이지만 상위 13명 가운데는 1명 뿐 이었다.

3. 여러 모델에 대한 이해도

모델을 이해하고 곱셈식으로 표현하는 문항의 정답률은 <표 V-3>과 같다. 정답률이 낮은 모델부터 차례로 쓰면 수직선모델 → 조합 모델 → 묶음모델(격자모델) 이다. 조합 모델은 학생들이 이해하기 어렵다는 이유로 4차 교과

<표 V-3> 8번 문항의 정답률

제시한 곱셈식의 개수	5개	4개 이상	3개 이상	2개 이상	1개 이상	평균
정답자	11명	16명	19명	21명	22명	
비율	40.7	59.3	70.4	77.8	81.4	65.9

<표 V-3> 곱셈식으로 표현하는 문항의 정답률

문항번호	1.(2)	2.(2)	3.(2)	4.(2)	5.(3)
개념 혹은 모델	배 개념	격자 모델	배 개념, 수직선 모델	묶음 모델	조합 모델
정답률	81.5	92.6	74.1	92.6	77.8

서부터 삭제되었지만, 오히려 배 개념과 관련된 수직선 모델보다는 정답률이 높았다. 조합모델을 곱셈의 다양한 측면중의 하나로서 보완적으로 다루어도 무방하다고 생각된다.

4. 동수누가의 타당한 위치

주어진 곱셈식의 값을 동수누가로 구하는 문항의 정답률은 <표 V-4>와 같다.

<표 V-4> 동수누가를 통한 계산 문항의 정답률

문제	2×3	3×4	15×5	17×3
정답률	88.9	81.5	74.1	63.1

수치가 커짐에 따라서 정답률이 줄어들고 있지만, 전체적으로 다른 문항에 비해서 정답률은 높은 편이다. 특히 17×3 과 같은 두 자리 수 관련 문제의 정답률이 63.1%인 것을 보면 동수누가의 이해도는 높은 것으로 생각된다. 기존의 교과서보다 동수누가의 비중을 줄이고 대신 곱셈 개념 형성을 위한 활동을 늘린 것이 동수누가의 계산력에 부정적인 영향을 끼치지 않았던 것으로 판단된다.

5. 변별도

문항별로 변별도[9]를 계산하여 비교하였다. 변별도가 1로서 가장 높은 문항은 '3배로 늘린 고무줄의 길이'를 묻는 3번 문항이었다. 변별도가 0.9인 문항은 '두 고무줄 길이의 관계가 몇 배'인지를 묻는 6번 문항과 17×3의 값을 구하는 9번 문항이었다. 배 개념과 관련된 문항이 높은 변별도를 가짐을 알 수 있다. 배 개념은 상위 학생과 하위 학생을 구분짓는 수학적인 능력의 잣대라고 말할 수 있을 것이다.

변별도가 0.1로서 가장 낮은 문항은 주어진 상황을 곱셈식으로 표현하는 1번과 2번 문항과 세수의 곱셈에 관한 12번 문항이었다. 1번과 2번은 모두 맞았기 때문에, 12번은 모두 틀렸기 때문에 변별도가 낮게 나왔다. 세 수의 곱셈에 관한 삼중 곱셈 문항은 우수한 2학년 학생도 이해하기에는 다소 버거운 소재였던 것으로 보인다.

VI. 결 론

교수학적인 측면은 물론 수학적인 측면에서 고찰한다 할지라도, 자연수 곱셈 개념과 모델은 단일하지 않다. 곱셈의 개념으로는 동수누가, 배(倍), 곱집합이 있으며, 곱셈의 모델로는 측정(묶음), 격자, 조합, 수직선 모델이 있다. 초등수학 교과서에서 곱셈 개념을 도입할 때 어떤 개념과 모델에 중심을 두어야하는가 하는 문제는 교수학적인 논점이 많은 문제이다. 우리나라의 역대 교육과정의 변화 과정에서는, 배 개념과 동수누가 개념이 곱셈의 중심 개념 자리를 놓고 서로 경쟁했으나, 제 7차 교과서에 이르러서는 동수누가의 주도적인 위치를 차지하는 것을 귀착하였다. 그 이유는 아마도 계산 기능을 중시했던 산업화 시대의 교육과정의 영향 때문이라고 생각된다. 곱셈 계산 알고리즘을 위해서는 곱셈 구구단의 암송이 중요하고, 또 이를 위해서는 뛰어세기와 동수누가가 필수이기 때문이다.

---

9) 문항변별도(Item Discrimination Power)는 다음 공식에 따라서 계산하였다(서울대학교 사범대학 교육연구소, 1981, p.201). $D.I.=\frac{R_U-R_L}{f}$, 단 $D.I.$: 문항 변별도 지수, R_U : 상부집단의 정답자 수, R_L : 하부집단의 정답자 수, f : 상부 집단의 학생 수(하부 집단의 학생 수)=(전체학생수의 27%).

그러나 곱셈의 또 다른 측면으로서의 배 개념은 초등수학에서 동수누가와는 차원이 다른 중요성을 가진다. 기수 개념은 하나의 이산량을 가리키는 반면, 배 개념은 두 이산량 사이의 '관계'를 가리킨다. 이러한 관계로서의 배 개념은 곱셈에서는 명시적으로 드러나지 않을 수도 있지만 나눗셈, 특히 분수에서는 필수적이다. 두 자연수 사이의 관계로서의 배 개념을 이해하지 못한 채 분수를 이해한다는 것은 불가능하다. 요컨대, 배 개념은 곱셈의 여러 개념 가운데 하나의 측면에만 그치는 것이 아니라 초등수학의 여타 영역, 즉 나눗셈, 분수, 소수, 비와 비율 등의 기반이 된다. 곱셈 도입 단계에서 배 개념을 드러내는 것은 이후의 나눗셈, 분수, 소수, 비와 비율로 이어지는 학습 계열에서 매우 중요한 출발점이라 하겠다.

이런 관점을 견지한 채, 이 논문에서는 먼저, 곱셈의 개념과 모델에 대한 수학적이고 교수학적인 분석을 하였고, 이어서 배 개념을 중심에 둔 곱셈 도입 방안을 구체적으로 구안하였으며, 마지막으로 이 지도안을 실제 학급에 적용하여 교수 실험하고 그 결과를 분석하였다.

새로운 지도안의 특징을 요약하면 다음과 같다. 첫째, 곱셈 개념의 형성을 목표로 하는 초기 단계에는 결코 동수누가를 사용하지 않은 채 오로지 배 개념 형성을 위한 내용만을 다룬다. 핵심적인 내용은 고정된 전체량을 다양한 단위량으로 묶어세는 활동이다. 단위량의 크기를 어떻게 정하느냐에 따라서 전체량을 나타내는 수 값을 달라진다.

둘째, 이렇게 배 개념을 형성한 이후에 배 개념을 통해서 곱셈을 정의하였다.

셋째, 곱셈을 정의한 이후에 곱셈값을 구하는 계산 알고리즘으로서 동수누가를 위치시켰다.

5차시에 걸친 실험수업을 마친 후 필자가 만든 평가지를 써서 사후 검사를 실시하였고, 그 결과에 대한 분석은 다음과 같다.

첫째, 학생들의 배 개념의 이해도가 높지 않았다. 특히 고무줄을 늘인 배수에 관한 10번 문항의 정답률이 매우 낮았다. 하지만 이 사실이 배 개념이 곱셈의 도입 내용으로서 부적절하다는 것을 함의하지는 않는다. 왜냐하면 배 개념은 곱셈에만 그치는 것이 아니라 분수와 소수까지 이어지는 긴 과정이기 때문이다. 곱셈은 배 개념의 출발점이므로 곱셈 단계에서는 불충분한 것이 당연하며, 분수와 소수를 거치면서 점차적으로 완성될 것이기 때문이다.

둘째, 단위량과 배 값이 주어졌을 때 전체량을 구하는 문항(전형적인 곱셈값 문제)의 정답률보다도 전체량과 단위량이 주어졌을 때 배 값을 구하는 문항의 정답률이 더 높았다. 비록 후자의 활동은 나눗셈에 더 가까운 내용이지만, 곱셈을 배 개념으로 정의하는데 필요한 최소한의 배 개념 형성을 위하여 곱셈의 도입부에서 도입해도 무리가 없음을 알 수 있었다. 심리적으로 볼 때, 전체량을 구하는 것보다는 배 값을 구하는 것이 더 단순한 사고 형태이기 때문이라고 추측한다.

셋째, 제 3차 교육과정 이후의 교과서에서는 전적으로 배제되었던 조합 모델 문항의 정답률은 배 개념과 연관된 수직선 모델 문항보다는 더 높았다. 이는 조합모델이 곱셈의 다양한 응용상황중의 하나로서 충분히 다루어질 수 있음을 시사한다.

넷째, 동수누가에 관한 내용을 곱셈을 정의한 이후로 미루었고, 기존의 교과서에 비해서 내용 비중을 축소했음에도 불구하고 동수누가 계산 문항의 정답률은 매우 높았다. 동수누가를 배제한 채로 곱셈 개념 형성을 활동을 선행시킨 조치가 학생들의 계산력에 부정적인 영향을 끼치지 않았음을 알 수 있었다.

전체적으로 볼 때, 배 개념을 중심으로 곱셈

을 지도하는 방안은 기존 방법보다 크게 나쁘지 않으며, 현재 방법의 문제점을 보완할 수 있는 하나의 대안이 될 수 있음을 알 수 있었다. 그러나 배 개념은 곱셈에만 그치는 것이 아니라 이후의 초등수학의 중요한 소재(나눗셈, 분수, 소수, 비와 비율)들의 기반이 된다. 따라서 곱셈 단계에서의 배 개념을 다루는 방법은 이후의 내용과의 관련을 염두에 두고 고안되어야만 하며, 이렇게 고안된 방법은 이후의 소재를 다루는 방법 속으로 자연스럽게 편입되고 발전되어야 한다. 이를 위한 추가적인 연구가 필요하다.

참고문헌

교육과학기술부(2007). **2006년 개정 초등학교 교육과정 해설(IV)(수학).**

교육인적자원부(1998). **제 7차 초등학교 교육과정 해설(IV) -수학, 과학, 실과-.**

김응태, 박승안(1989). **정수론.** 서울: 이우출판사.

교육부(1989). **산수 2-1.**

교육부(1995). **산수 2-1.**

교육인적자원부(2000). **수학 2-가.**

문교부(1972). **산수 2-1.**

문교부(1985). **산수 2-1.**

문교부(1986). **국민 학교 교사용 지도서 산수 2-1.**

문교부(1995). **국민 학교 교사용 지도서 산수 2-1.**

박두일 외4(2002). **중학교 수학 8-나.** 서울: (주)교학사.

서울대학교 사범대학 교육연구소(1981). **교육학 용어사전.** 서울: 배영사.

장미라(2006). **초등학교 2학년 학생의 곱셈적 사고에 관한 연구.** 서울교육대학교 교육대학원 석사학위 논문.

Bruner, J.(1995). **교육의 과정.** (이홍우, 역). 서울: 배영사. (영어 원작은 1960년 출판).

Dewey, J. & McLellan, J. A.(1895). T*he Psychology of Number and its Applications to Methods of Teaching Arithmetic.* New York: D. Appleton company.

Freudenthal(1973). *Mathematics as an Educational Task.* Dordrecht-Holland: D. Reidel Publishing Company.

School Mathematics Study Group(1971). **국민 학교 SMSG 수학 1.** (인천교대수학교육과정연구소, 역). 문교부. (영어 원작은 1965년 출판).

An Alternative Program for the Teaching of Multiplication Concept Based on Times Idea

Kang, Heung Kyu (Gongju Nat'l Univ. of Edu.)

Concept and model of multiplication is not single. Concepts of multiplication can be classified into three cases: repeated addition, times idea, pairs set. Models of multiplication can be classified into four cases: measurement, rectangular pattern, combinatorial problem, number line. Among diverse cases of multiplication's concept and model, which case does elementary mathematics education lay stress on? This question is a controvertible didactical point.

In this thesis, (1) mathematical and didactical analysis of multiplication's concept and model is performed, (2) a concrete program of teaching multiplication which is based on times idea is contrived, (3) With this new program, the teaching experiment is performed and its result is analyzed.

Through this study, I obtained the following results and suggestions.

First, the degree of testee's understanding of times idea is not high.

Secondly, a sort of test problem which asks the testee to find times value is more easy than the one to find multiplicative resulting value.

Thirdly, combinatorial problem can be handled as an application of multiplication.

Fourthly, the degree of testee's understanding of repeated addition is high.

In conclusion, I observe the fact that this new program which is based on times idea could be a alternative program of teaching multiplication which could complement the traditional method.

* key words : Multiplication(곱셈), repeated addition(동수누가), times idea(배 개념), pairs set(곱집합), measurement(측정), rectangular pattern(격자 모델), combinatorial problem(조합 문제), number line(수직선)

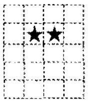
논문접수 : 2009. 1. 30
논문수정 : 2009. 3. 9
심사완료 : 2009. 3. 16

<부록> 사후 검사지

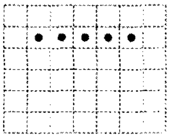
<곱셈 단원 평가문제>

(　　　　　　)초등학교 2학년 2반 이름 (　　　　　　　　)　　2008년 7월 2일

1. 예진이는 별사탕 2개를 갖고 있습니다.
석규는 그것의 3배를 갖고 있습니다.
석규의 별사탕은 모두 몇 개인가요? □개
곱셈식으로 쓰세요. □×□



2. 농장에서 감자를 캐서 상자에 담고 있습니다.
한 줄에 5개씩 넣었더니 모두 3줄이 되었습니다.
감자는 모두 몇 개입니까? □개
곱셈식으로 쓰세요. □×□



3. 문식이는 5칸짜리 고무줄을 가지고 있습니다. 정아는 그것의 3배를 가지고 있습니다.

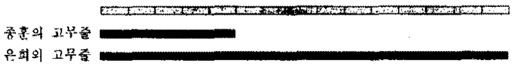
정아의 고무줄은 몇 칸일까요? □칸
곱셈식으로 나타내세요. □×□

4. 한 상자안에는 빵이 2개씩 들어있습니다.
지현이는 빵 3상자를 샀습니다.
지현이가 가진 빵은 모두 몇 개입니까? □개
곱셈식으로 쓰세요. □×□

5. 학용품 공장에서는 연필과 지우개를 각각 하나씩만 넣어서 학용품 세트를 만듭니다. 연필은 빨강, 파랑의 2종류이고, 지우개는 하양, 노랑, 분홍의 3종류입니다. 모두 몇 가지 종류의 학용품 세트를 만들 수 있을까요? 다음 그림에 선을 그려서 알아보세요.

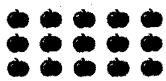
모두 몇 가지인가요? □가지
곱셈식으로 쓰세요. □×□

6. 종훈이와 은희는 고무줄을 갖고 있습니다.

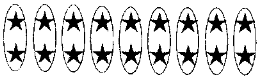


은희의 고무줄은 종훈이의 고무줄의 몇배입니까? □배

7. 사과 15개가 있습니다.
한 상자에 5개씩 담으면 모두 몇 상자가 될까요?
□상자



8. 별 18개가 있습니다.



2개씩 묶으면 9묶음이므로 2×9로 쓸 수 있습니다.

다른 크기로 묶어서 다양하게 곱셈식으로 나타내세요. (그림에 연필로 묶은 표시를 하세요.

★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★
★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★　　$\square \times \square$

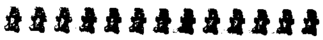
★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★
★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★　　$\square \times \square$

★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★
★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★　　$\square \times \square$

★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★
★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★　　$\square \times \square$

★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★
★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★　　$\square \times \square$

9. 곰인형 13개가 한줄로 나란히 있습니다.



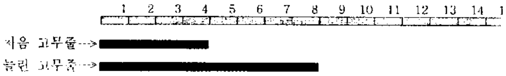
이렇게 모두 4줄이 있습니다.

곰인형은 모두 몇 개입니까? $\square$개

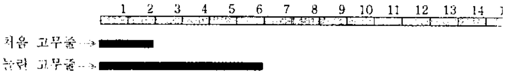
계산식: ______________________________

곱셈식으로 쓰세요. $\square \times \square$

10. 동건이는 4칸짜리 고무줄을 8칸이 되도록 잡아 늘렸습니다.



지은이는 2칸 길이의 고무줄을 6칸이 되도록 잡아 늘렸습니다.



누가 더 많이 늘렸을까요?　　답: ______________

그 이유: ____

11. 다음 곱셈식을 덧셈식으로 쓰고 값을 구하세요.

$2 \times 3 =$

$3 \times 4 =$

$15 \times 5 =$

$17 \times 3 =$

12. 철수네 학급은 한 모둠에 4명씩 모두 5모둠입니다. 선생님은 모든 학생에 주사위를 2개씩 나누어 주었습니다. 철수네 학급 학생들이 갖고 있는 주사위 전체 개수를 곱셈식으로 쓰세요. $\square \times \square$

모두 몇 개입니까? $\square$개