응용통계연구 (2009)
22(2), 261–270

사후검증(Back-testing)을 통한 다변량-GARCH 모형의 평가: 사례분석

황선영[1] · 최문선[2] · 도종두[3]

[1]숙명여자대학교 통계학과, [2]숙명여자대학교 통계학과, [3]계명대학교 통계학과

(2009년 1월 접수, 2009년 2월 채택)

요 약

주식 수익률, 환율 등과 같은 금융 자료를 이해하는데 있어서 최근의 국제 금융위기를 통해 더욱 중요해진 이슈는 바로 변동성(volatility)이다. 변동성(조건부 이분산성)에 대한 모형은 Engle (1982)의 ARCH 모형과 Bollerslev (1986)의 GARCH 모형을 시작으로 수많은 연구가 이루어졌으며 특히 금융 시계열 분석에서는 시계열 자료들 간의 변동성을 함께 모형화 하는 MGARCH(multivariate GARCH) 모형이 널리 이용되고 있다. 추정된 MGARCH 모형들은 그 자체로서 여러 개의 변동성들 간의 시간에 따른 동적인 관계를 설명해주는 데 유용할 뿐만 아니라 추정된 (조건부)상관계수들은 hedge ratio 계산 또는 VaR 계산 등과 같이 금융시장에 대한 분석에도 이용되고 있다. 본 논문에서는 국내 14개 최신 주가자료에 대한 MGARCH 분석을 수행하고 연관된 사후검증(back-testing)을 통해 MGARCH 모형들을 평가하고 있으며 사후검증 수치를 얻기 위한 S-PLUS 프로그램을 수록하였다.

주요용어: 다변량 GARCH 모형, Value at Risk, 사후검증, 국내 주가자료.

1. 서론

주식 수익률, 이자율, 환율 등과 같은 금융 자료를 분석하는데 있어서 가장 큰 관심사는 바로 변동성(volatility)이다. 변동성은 자료의 분산 혹은 표준편차로 이해될 수 있으며, 특히 시계열에서 말하는 변동성은 조건부 이분산성(conditional heteroskedasticity)을 의미한다. 조건부 이분산성에 대한 모형은 Engle (1982)의 ARCH 모형과 Bollerslev (1986)의 GARCH 모형을 시작으로 수많은 연구가 이루어졌으며, 아직까지도 변동성의 여러 특성들을 모형화하는 작업이 계속되고 있다. 또한 금융 시계열 자료는 대부분이 서로 연관성을 갖는다는 특성에 기초하여 여러 시계열 자료들간의 변동성을 함께 모형화하는 MGARCH(multivariate GARCH) 모형에 대한 연구 또한 진행되고 있다. 널리 쓰이는 MGARCH 모형으로는 RiskMetrics (1996)에서 사용하는 EWMA 모형을 비롯하여 Bollerslev 등 (1998)의 DVEC 모형, Engle와 Knoner (1995)의 BEKK 모형, Bollerslev (1990)의 CCC 모형 등이 있다. 추정된 MGARCH 모형들은 그 자체로서 여러 개의 변동성들 간의 시간에 따른 동적인 관계를 설명해주는 데 유용할 뿐만 아니라 모형에 의해 추정된 조건부 상관계수들은 hedge ratio 계산 또는 VaR 계산 등과 같이 금융시장에 대한 분석에도 사용되고 있다.

본 논문에서는 MGARCH 모형과 VaR에 대해 알아보고 실제 금융 시계열 자료에 모형들을 적용하고자 한다. 또한 VaR 분석과 연관된 사후검증(back-testing)을 통해 금융시장의 변동성 혹은 위

[2]교신저자: (140-742) 서울시 용산구 효창원길 52, 숙명여자대학교 통계학과, 대학원생.
E-mail: snrndi82@sm.ac.kr

험(risk)를 측정하는데 있어서 MGARCH 모형들을 비교평가해 보고자 한다. 국내 시계열에 대한 단변량(univariate)-VaR 분석에 대해서는 황선영과 박진아 (2005)를 참고할 수 있다. 최근에 송유진 등 (2008)은 차원축소를 통해 국내 주식자료에 대한 MGARCH 분석을 수행한 바 있다.

2. 다변량-GARCH 모형

본 절에서는 MGARCH 모형에 대한 기본 개념 및 용어, 수식을 Bauwens 등 (2006)과 Tsay (2005)를 참고하여 정리하였으며 자세한 내용은 송유진 등 (2008)을 참고하기 바란다. k개의 수익률로 이루어진 벡터 $\mathbf{r}_t = (r_{1t}, r_{2t}, \ldots, r_{kt})^T$에 대하여 다음과 같은 모형을 고려하자.

$$\mathbf{r}_t = \mu_t + \mathbf{a}_t$$

위 식에서 μ_t는 $t-1$시점까지의 정보가 주어졌을 때의 조건부 평균벡터이며, 오차항 $\mathbf{a}_t$는 다음과 같다.

$$\mathbf{a}_t = \mathbf{H}_t^{\frac{1}{2}} \mathbf{e}_t,$$

여기서 $\mathbf{H}_t$는 $k \times k$ 양정치 행렬이며, 랜덤벡터 $\mathbf{e}_t$에 대하여 다음과 같이 가정한다 ($\mathbf{I}$는 $k \times k$ 단위행렬이다.).

$$E(\mathbf{e}_t) = \mathbf{0}, \qquad \mathrm{Var}(\mathbf{e}_t) = \mathbf{I}$$

위의 모형과 가정들로부터 $\mathbf{H}_t$는 $\mathbf{r}_t$의 $t-1$시점까지의 정보가 주어졌을 때의 조건부 분산-공분산 행렬이 된다. 일반적으로 조건부 평균벡터 μ_t는 VARMA(Vector ARMA) 모형을 이용하여 적합시키며, 다변량 변동성(multivariate volatilities)에 대한 분석이라 함은 바로 조건부 분산-공분산 행렬 $\mathbf{H}_t$에 대해 모형을 설정하여 분석하는 것을 의미한다. $\mathbf{H}_t$에 대한 모형은 크게 3가지 종류로 나뉘어질 수 있다 (Bauwens 등, 2006); (i) univariate GARCH 모형의 단순한 확장 형태; (ii) univariate GARCH 모형들의 선형결합(linear combination) 형태; (iii) univariate GARCH 모형들의 비선형결합(nonlinear combination) 형태. 본 논문에서는 비교적 많이 쓰이는 (i)의 유형 중 EWMA 모형, DVEC 모형, BEKK 모형과 (iii)의 유형 중에서 CCC 모형에 대하여 간단히 살펴보고자 한다.

2.1. EWMA(Exponentially weighted moving average) 모형

RiskMetrics (1996)는 금융시계열자료에 대한 위험(risk) 측정 시 필요한 분산과 공분산들을 계산하는 방법으로 다음과 같은 모형을 제안하여 사용하고 있다.

$$\mathbf{H}_t = (1-\lambda)\mathbf{a}_{t-1}\mathbf{a}_{t-1}^T + \lambda \mathbf{H}_{t-1}, \quad 0 < \lambda < 1$$

위의 식을 보면, 과거 자료에서 최근 자료로 올수록 현재의 변동성을 설명하는 데 있어서 더 많은 가중치를 주는 것을 알 수 있다. λ는 감소인자(decay factor)이며 랜덤벡터 $\mathbf{e}_t$에 대한 분포를 가정시, λ의 값을 추정할 수 있다.

2.2. DVEC(Diagonal VEC) 모형

Bollerslev 등 (1988)이 제안한 모형으로서 GARCH 모형을 다변량 형태로 단순히 확장시킨 형태이다. 모수의 수를 줄이기 위해 계수행렬들은 대칭행렬들로 표현된다. DVEC(1,1) 모형은 다음과 같다.

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{C} + \mathbf{A} \odot \left(\mathbf{a}_{t-1}\mathbf{a}_{t-1}^T\right) + \mathbf{B} \odot \mathbf{H}_{t-1},$$

여기서 $\odot$는 하다마드곱(Hadamard products)을 나타내며, $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$행렬은 모두 대칭행렬이다.

2.3. BEKK 모형

$\mathbf{H}_t$는 분산-공분산 행렬이므로 양정치를 항상 만족해야 하며, 이를 위해서 DVEC 모형에서는 계수행렬들과 초기값 행렬 $\mathbf{H}_0$이 모두 양정치라는 강한 제약 조건들이 필요하다. Engle와 Kroner (1995)은 이러한 제약 조건 없이도 $\mathbf{H}_t$가 항상 양정치가 될 수 있는 모형을 제안하였다. 다음은 BEKK(1,1) 모형이다.

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{C}^T\mathbf{C} + \mathbf{A}^T\left(\mathbf{a}_{t-1}\mathbf{a}_{t-1}^T\right)\mathbf{A} + \mathbf{B}^T\mathbf{H}_{t-1}\mathbf{B},$$

여기서 $\mathbf{C}$는 상삼각행렬이며, $\mathbf{C}^T\mathbf{C}$가 양정치라는 조건이 만족된다면 어떤 $\mathbf{A},\mathbf{B}$에 대해서도 $\mathbf{H}_t$는 항상 양정치가 된다.

2.4. CCC(Constant conditional correlation) 모형

Bollerslev (1990)는 CCC 모형에서 조건부 상관계수를 상수로 고정시킴으로써, 모수의 수를 줄이고 모형을 훨씬 더 단순화시켰다.

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{D}_t\mathbf{R}\mathbf{D}_t = \left(\rho_{ij}\sqrt{h_{iit}h_{jjt}}\right),$$

여기서 $\mathbf{D}_t = \mathrm{diag}(h_{11t}^{1/2},\ldots,h_{kkt}^{1/2})$는 대각행렬이며 h_{iit}는 i번째 수익률의 t시점에서의 조건부 분산을 의미한다. 또한, $\mathbf{R} = (\rho_{ij})$는 대각원소는 '1'이고 비대각원소는 constant conditional correlation으로 이루어진 상관계수행렬이다.

3. VaR(Value at Risk)

앞서 소개된 MGARCH 모형은 금융시장에 대한 분석시 널리 사용되고 있으며, 특히 시장의 위험에 대한 예측을 위해 VaR를 계산시 MGARCH 모형을 적용하고 있다 (식 (3.1) 참고). 본 절에서의 VaR와 사후검증에 대한 기본개념 및 수식은 Christoffersen과 Pellitier (2004), 황선영과 박진아 (2005)를 참고하여 서술하였다.

3.1. 정의

VaR는 '어떤 주어진 신뢰수준(confidence level) 및 확률분포를 전제로 할 때, 특정 보유기간(holding period) 동안에 정상적인 시장(normal market) 조건 하에서 발생할 수 있는 최대손실금액(maximum loss)'으로 정의된다. $\Delta V(L)$를 시점 t까지의 정보가 주어졌을 때, L기간 동안 보유시 금융자산의 가격 변화량이라 한다면 신뢰수준 $(1-p)\times 100\%$에서의 VaR는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$p = \Pr\left(\Delta V(L) \le \mathrm{VaR}\right) = F(\mathrm{VaR}),$$

여기서 $F(\cdot)$는 $\Delta V(L)$의 누적분포함수(CDF)이며 VaR은 결국 주어진 확률분포에서의 $p\times 100\%$ 백분위수이다.

3.2. VaR의 측정

VaR를 측정하는 방법으로는 크게 비모수적 방법과 모수적 방법이 있다. 이 절에서는 정규분포를 이용하는 모수적 방법에 대해 간단히 살펴볼 것이다. 금융자산을 주식이라고 가정할 때, 보유기간은 1일, 신뢰수준은 95% 또는 99%를 사용하는 것이 일반적이다. 이러한 조건들 하에서 최대손실금액으로서의 VaR를 구한다면, "VaR = 최초투자금액 × VaR(수익률)"와 같이 계산될 것이

다. 여기서 VaR(수익률)은 수익률(%)만 이용하여 계산한 수익률의 VaR값으로서 수익률 r_t에 대해 $r_{t+1}|F_t \sim N(\hat{r_t}(1), \hat{\sigma_t}^2(1))$와 같은 조건부($F_t$: t시점까지의 정보) 분포를 가정한 후, 계산할 수 있다. 이 때, $\hat{r_t}(1)$은 수익률의 1시차 조건부 예측치이며, $\hat{\sigma_t}^2(1)$은 수익률의 분산에 대한 1시차 조건부 예측치이다. 이를 이용하면, 5% 백분위수는 $\hat{r_t}(1) - 1.65\hat{\sigma}_t(1)$이며, 1% 백분위수는 $\hat{r_t}(1) - 2.33\hat{\sigma}_t(1)$이다. 금융자산이 k개의 주식으로 이루어진 포트폴리오인 경우, $(t+1)$시점에서의 포트폴리오 수익률은 가중치 벡터 $\mathbf{w}$을 이용하여 $\mathbf{w}^T\mathbf{r}_{t+1}$와 같이 나타낼 수 있으며, 이에 대한 신뢰수준 $(1-p) \times 100\%$에서의 다변량-VaR은 다음 식 (3.1)와 같이 계산된다.

$$\text{다변량-VaR} = \mathbf{w}^T\hat{\mathbf{r}}_t(1) - z_p\sqrt{\mathbf{w}^T\widehat{\mathbf{H}_t}(1)\mathbf{w}}, \tag{3.1}$$

여기서 z_p는 표준정규분포의 $(1-p) \times 100\%$ 백분위수이며, $\widehat{\mathbf{H}_t}(1)$은 수익률 벡터에 대한 1시차 조건부 분산-공분산 행렬이다. 본 논문에서는 $\widehat{\mathbf{H}_t}(1)$의 값을 다양한 MGARCH 모형으로부터 예측하여 VaR를 계산하고 있다.

3.3. 사후검증(Back-testing)

VaR 모형의 정확성을 검증하는 과정을 사후검증(back-testing)이라 부르며, Kupiec (1995)은 이에 대한 세 가지 방법을 소개하였다: (i) 최초모형실패 방법(time until first failure) (ii) 실패율(failure proportion) (iii) 역사적 시뮬레이션 방법(historical simulation). 최초모형실패란 예측한 VaR를 초과하는 손실이 실제 자료에서 최초로 발생하는 때를 의미하며 실패율 방법은 예측한 VaR를 초과하는 손실이 실제 자료에서 발생하는 비율을 이용하는 방법이다. 역사적 시뮬레이션에 의한 방법은 매일의 실제 포트폴리오 수익률을 산출하여 히스토그램으로 그리고, 신뢰구간을 정하여 하위 1% 또는 5%에 해당하는 손실액을 결정하여 실제 자료와 비교하는 방법이다. 간편하게 VaR의 정확성을 검증하는 방법은 실패율을 이용한 방법으로서 검증기간 중에 실제 금융자산의 수익률이 모형에 의해 예측된 VaR를 초과하는 비율인 실패율(failure rate)을 측정하는 것이다. 실패율 계산을 위해 다음과 같은 지시변수를 고려한다.

$$x_t = I\left\{\mathbf{w}_t^T\mathbf{r}_t < \widehat{\text{VaR}}_t\right\},$$

여기서 $\mathbf{w}_t$는 포트폴리오에서 각 주식종목들의 투자가중치 벡터를 의미한다. $\mathbf{w}_t$의 선택은 대개 분석자의 주관에 의해 결정되는 경우가 많으며 다음 절의 사례분석에서는 동일한 가중치를 이용하였다. $\widehat{\text{VaR}}_t$는 모형에 의해 추정된 VaR 값으로써 식 (3.1)과 같이 계산된다. 특정한 날(t)의 금융자산 포트폴리오의 실제 손실이 예측된 VaR보다 크면 $x_t = 1$이고 예측된 VaR보다 작으면 $x_t = 0$이 된다. 따라서 x_t는 평균이 p인 베르누이 분포를 따르는 확률변수이다. 여기서 $(1-p)$의 값은 VaR 계산시의 신뢰수준으로 해석한다. T일 동안 예측된 VaR를 초과하여 발생하는 총 실패횟수 X_T는 다음과 같다.

$$X_T = \sum_{t=1}^{T} x_t.$$

VaR 추정에 사용된 모형이 적절하다면 $\{x_t, t = 1, 2, \ldots, T\}$ 값들은 서로 독립적이며, 따라서 X_T는 기대값이 $T \times p$이고 분산은 $T \times p \times (1-p)$인 이항분포를 따르게 된다. 또한 신뢰수준을 99%로 설정할 경우 VaR 모형이 정확하다면 대수의 법칙에 의해 $\sum_{t=1}^{T} x_t/T = 0.01$로 예상할 수 있다. 계산 결과 0.01을 초과한다면 VaR 모형이 위험을 실제 상황보다 작게 예측함으로써 금융자산의 손실이 커질수 있으며, 0.01보다 작으면 VaR 모형이 보수적으로 설정되었다고 볼 수 있다. Christoffersen과 Pelletier (2004)은 계산된 실패율에 대하여 unconditional coverage와 독립성 확인을 위해 우도비검정을 수행하였다. unconditional coverage 검정은 x_t가 서로 독립적이라는 가정하에 (검정을 위해) 주어진 $p\,(=$

0.01 또는 0.05)값을 갖는 베르누이 분포를 따르고 있는지를 검정한다. 검정 결과, 귀무가설을 기각할 수 있다면 이는 리스크 계산에 사용한 모형이 주어진 coverage level을 제대로 맞추지 못하고 있음을 의미한다. 즉, 모형이 위험을 과대 혹은 과소평가하고 있는 것이다. 독립성 검정은 unconditional coverage 검정을 위해 가정했던 x_t의 독립성 확인을 위한 검정이다. 자세한 내용은 Christoffersen과 Pelletier (2004)을 참고하기 바란다. 독립성 검정은 unconditional coverage 검정의 가정에 대한 사전 검정으로써 이해될 수도 있으며 또한 검정 결과 만약 x_t가 독립적이지 않다면 위험의 과소평가로 인한 손실이 어느 특정기간에 연이어서 발생하여 아주 큰 손실로 이어질 수 있음을 의미하게 된다. 따라서 이러한 사후검증들을 통해서 다변량-VaR 모형이 위험을 정확히 평가하는지의 여부를 용이하게 판단할 수 있으며, 또한 다변량-VaR 계산에 사용된 모형들의 적절성을 평가할 수 있다.

4. 국내 주식자료 사례분석

국내 14개의 대기업 주가의 수익률의 변동성 분석을 위해 먼저 인자분석(factor analysis)을 통해 자료의 차원을 축소하였다. 추정된 인자들에 MGARCH 모형을 적합시킨 후, VaR를 계산하고 사후검증을 수행하였다. 분석에는 S-Plus의 FinMetrics와 SAS/ETS를 사용하였으며 연관된 S-Plus 프로그램은 아래에 제시하였다.

4.1. 자료

분석에 사용한 자료는 국내 14개의 대기업 주가로서 2004년 1월 14일부터 국제금융위기 발생 직전인 2008년 8월 29일까지의 총 1,147개의 로그차분수익률(%)이다. 14개의 기업은 각 기업이 속한 산업군에 의해 은행, 건설, IT의 3개의 산업군으로 나뉘어진다. 14개의 기업은 다음과 같다.

- 은행(Banks) : 국민은행(KB), 신한지주(SH), 우리금융(WR), 기업은행(IBK), 외환은행(KEB)
- 건설(E & C) : 현대건설(HDEC), 대림산업(Daelim), GS건설(GSEC), 대우건설(DWEC)
- IT : 삼성전자(Samsung), LG전자(LG), 하이닉스(HYNIX), LS산전(LS),엔씨소프트(NCSOFT).

4.2. 인자모형(Factor model)의 적합

차원축소를 위해 14개의 주가자료로부터 통계적 인자모형(statistical factor model)을 이용하여 총 3개의 인자들을 추정한다. 이를 위해 14개 기업의 수익률들을 먼저 각각 알맞은 차수의 ARMA 모형에 적합시킨 후, 그 잔차들을 이용하여 인자분석을 실시하였다. 표 4.1은 varimax 회전을 이용하여 추정된 인자적재행렬과 표준화점수 계수이다. 인자적재행렬을 살펴보면 인자1은 은행관련주들의 수익률을, 인자2는 건설관련주들의 수익률을, 인자3은 IT관련주들의 수익률을 나타낸다고 볼 수 있다.

4.3. MGARCH 모형의 적합

표 4.2는 각각의 인자들에 대해 EWMA, DVEC(1,1), BEKK(1,1), CCC(1,1) 모형들을 적합시킨 결과이다. μ_t에 대해서는 모두 상수항이 없는 VARMA(1,0) 모형이 적합되었으며, 전체 모형의 적합에 대한 다변량 포트맨토 검정 결과 추정된 인자들에 각각의 모형들을 적용시키는 것이 무리가 없음을 알 수 있었다 (VARMA(1,0) 모형의 추정과 다변량 포트맨토 검정에 대한 결과물은 생략한다.).

표 4.1. 인자적재행렬과 표준화점수 계수

	Rotated Factor Pattern			Standardized Scoring Coeffients		
	Factor1	Factor2	Factor3	Banks	E & C	IT
KB	0.70615	0.23788	0.29198	0.33950	−0.04951	−0.06587
SH	0.67110	0.21373	0.31442	0.25763	−0.05112	−0.00588
WR	0.67362	0.24601	0.21766	0.27624	−0.01406	−0.10478
IBK	0.66468	0.23648	0.26609	0.25281	−0.03150	−0.03950
KEB	0.57102	0.22571	0.21906	0.15385	−0.00310	−0.02992
HDEC	0.15524	0.67548	0.12135	0.09237	0.39425	−0.06422
Daelim	0.19873	0.57685	0.23203	0.05988	0.22192	0.02639
GSEC	0.21307	0.63241	0.15968	0.04930	0.28737	−0.04500
DWEC	0.21522	0.59649	0.11940	0.02393	0.23153	−0.04702
Samsung	0.37207	0.15326	0.64923	0.08847	−0.12469	0.57851
LG	0.20533	0.19186	0.55940	0.08751	0.00196	0.26398
HYNIX	0.20774	0.12385	0.52926	0.04485	−0.02448	0.20292
LS	0.17415	0.39170	0.31725	0.04760	0.09707	0.08514
NCSOFT	0.17982	0.22184	0.32628	0.02405	0.03168	0.09054

표 4.2. MGARCH 모형 적합 결과

모형	적합된 모형
EWMA	$\hat{\lambda} = 0.9686$
DVEC(1,1)	$\hat{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 0.0375 & & \\ 0.0011 & 0.0298 & \\ 0.0024 & 0.0008 & 0.0047 \end{bmatrix}$ $\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0.0815 & & \\ 0.0430 & 0.0995 & \\ 0.0252 & 0.0333 & 0.0368 \end{bmatrix}$ $\hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0.8654 & & \\ 0.9276 & 0.8577 & \\ 0.9532 & 0.9354 & 0.9547 \end{bmatrix}$
BEKK(1,1)	$\hat{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 0.1658 & 0.0908 & -0.0794 \\ & 0.2076 & -0.0303 \\ & & 0.0013 \end{bmatrix}$ $\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0.2484 & 0.0211 & 0.0038 \\ 0.0804 & 0.3236 & 0.0517 \\ -0.0605 & -0.0640 & 0.1851 \end{bmatrix}$ $\hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0.9418 & -0.0213 & 0.0055 \\ -0.0416 & 0.8981 & -0.0266 \\ 0.0371 & 0.0563 & 0.9783 \end{bmatrix}$
CCC(1,1)	$h_{11,t} = 0.0334 + 0.0895a^2_{1,t-1} + 0.8643h_{11,t-1}$ $h_{22,t} = 0.0336 + 0.1066a^2_{2,t-1} + 0.8440h_{22,t-1}$ $h_{33,t} = 0.0049 + 0.0412a^2_{3,t-1} + 0.9500h_{33,t-1}$ $\hat{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 0.1079 & 0.2265 \\ 0.1079 & 1 & 0.1141 \\ 0.2265 & 0.1141 & 1 \end{bmatrix}$

4.4. VaR 계산과 사후검증

앞에서 적합시킨 4종류의 MGARCH 모형들과 이에 대한 비교 모형으로 rolling window 기법을 사용하여 VaR 계산과 사후검증을 하고자 한다. rolling window 기법은 t 시점의($t = R+1, R+2, \ldots, R+T$) VaR 계산을 위한 분산-공분산 행렬로써 $t-R$시점부터 $t-1$시점까지의 자료들을 이용하여 계산한 표본

표 4.3. 사후검증 결과

	신뢰수준 95%			신뢰수준 99%		
	실패율	UC	IND	실패율	UC	IND
Rolling window	0.0823(20)	4.5061*	0.0821	0.0370(9)	10.6091**	0.6955
EWMA	0.0782(19)	3.4955	0.1874	0.0206(5)	2.1030	0.2110
DVEC	0.0864(21)	5.6258*	0.7902	0.0247(6)	3.7597	0.3051
BEKK	0.0700(17)	1.8227	0.5378	0.0041(1)	1.0927	0.0083
CCC	0.0700(17)	1.8227	2.5713	0.0082(2)	0.0818	0.0333

분산-공분산 행렬을 사용하는 방법이다. R은 사후검증시 정해지는 표본 내 기간(in-sample period)의 크기이며 T는 표본 외 기간(out-of-sample period)의 크기이다. 보유기간은 1일, 신뢰수준은 95%와 99%이며, 포트폴리오는 동일한 가중치를 갖는 세 개의 산업군으로 구성되어있다는 가정하에 수익률에 대한 VaR(%)를 계산하였다. 매일 업데이트 되어 추정된 VaR(%) 값들을 바탕으로 전체 기간 중에서 2004년 1월 14일부터 2007년 8월 31일까지의 904개의 관측치를 표본 내 기간으로, 2007년 9월 3일부터 2008년 8월 29일까지의 243개 관측치를 표본 외 기간으로 설정하여 사후검증을 실시하였다. 표 4.3은 사후검증 결과이다. 실패율에서 괄호 안에 있는 숫자는 실제 수익률이 추정된 VaR(%)를 초과하는 횟수이며 UC는 unconditional coverage 검정의 검정통계량 값을, IND는 독립성 검정의 검정통계량값을 나타낸다. *는 해당 검정통계량 값이 유의수준 0.05에서, **는 유의수준 0.01에서 유의함을 의미한다. x_t들의 독립성 검정 결과 모든 모형들에서 독립성 가정을 만족함을 알 수 있다. unconditional coverage 검정 결과를 살펴보면 rolling window 모형은 유의수준 95%, 99% 모두에서 coverage level을 맞추지 못하고 실패율이 0.05나 0.01보다 더 큰 반면, MGARCH 모형들은 신뢰수준 95%에서 DVEC 모형을 제외하고는 모두 주어진 coverage level을 맞추고 있음을 볼 수 있다. 특히 BEKK 모형과 CCC 모형이 다른 MGARCH 모형들에 비해 더 보수적으로 위험을 측정하고 있다. 이는 rolling window 모형의 경우 VaR 계산에서 ρ_{ij}를 단순히 인자들 간의 표본상관계수 값을 사용하는 반면, MGARCH 모형인 경우 ρ_{ij}를 시간에 따라 계속 변화하면서 추정되는 조건부 상관계수로 사용하기 때문으로 볼 수 있다. 즉, 시간에 따른 변화를 반영하는 MGARCH 모형이 단순 표본상관계수를 이용하는 rolling window 모형에 비해 위험측정시 더 정확한 결과를 줄 수 있음을 보여주는 것이다.

4.5. S-Plus 프로그램

```
# MGARCH 모형 적합
stat.ewma=mgarch(est.factors~ -1+arma(1,0),~ ewma1,trace=F,n.predict=1)
stat.dvec=mgarch(est.factors~ -1+arma(1,0),~ dvec(1,1),trace=F,n.predict=1)
stat.bekk=mgarch(est.factors~ -1+arma(1,0),~ bekk(1,1),trace=F,n.predict=1)
stat.ccc=mgarch(est.factors~ -1+arma(1,0),~ ccc(1,1),trace=F,n.predict=1)
# VaR 계산과 사후검증
q1=-1.65; q2=-2.33; w=rep(1/3,3)
v=function(A,q){
s=c(A$prediction$sigma.pred[1,])
H=diag(s)%*%A$prediction$R.pred[,,]%*%diag(s)
risk=q*sqrt(t(w)%*%H%*%w)
risk
}
```

```
v.window=function(data,q){
risk=q*sqrt(t(w)%*%var(data)%*%w); risk
}
VaR=function(data,q){
risk.ewma=mgarch(data~ -1+arma(1,0),~ ewma1,trace=F, n.predict=1)
risk.dvec=mgarch(data~ -1+arma(1,0),~ dvec(1,1),trace=F,n.predict=1)
risk.bekk=mgarch(data~ -1+arma(1,0),~ bekk(1,1),trace=F,n.predict=1)
risk.ccc=mgarch(data~ -1+arma(1,0),~ ccc(1,1),trace=F,n.predict=1)
v.ewma=v(risk.ewma,q); v.dvec=v(risk.dvec,q); v.bekk=v(risk.bekk,q); v.ccc=v(risk.ccc,q)
risk=c(v.ewma,v.dvec,v.bekk,v.ccc); risk
}
UC=function(x,p){
t=length(x); B=sum(x); A=t-B; L0=((1-p)^A)*p^B; L1=((A/t)^A)*((B/t)^B)
LR=-2*log(L0/L1); LR
}
IND=function(x){
n=length(x)-1 ; n00=0; n01=0; n10=0; n11=0
for(i in 1:n){
if(x[i]==0 && x[i+1]==0) n00=n00+1; else n00=n00
if(x[i]==0 && x[i+1]==1) n01=n01+1; else n01=n01
if(x[i]==1 && x[i+1]==0) n10=n10+1; else n10=n10
n11=n-n00-n01-n10
}
p1=(n01+n11)/n; L0=((1-p1)^(n00+n10))*(p1^(n01+n11));
p01=n01/(n00+n01); p11=n11/(n10+n11);
L1=((1-p01)^n00)*(p01^n01)*((1-p11)^n10)*(p11^n11)
LR=-2*log(L0/L1); LR
}
# 95% VaR
z=rep(0,243*6)
est.risk=matrix(z,243,6); f.ewma=rep(0,243); f.dvec=rep(0,243); f.bekk=rep(0,243);
f.ccc=rep(0,243); f.window=rep(0,243)
for(i in 1:243){
est.risk[i,(1:4)]=VaR(est.factors[(1:903+i),],q1)
est.risk[i,5]=v.window(est.factors[(i:903+i),],q1)
if(mean(est.factors[904+i,]) < est.risk[i,1]) f.ewma[i]=1 ; else f.ewma[i]=0;
if(mean(est.factors[904+i,]) < est.risk[i,2]) f.dvec[i]=1 ; else f.dvec[i]=0;
if(mean(est.factors[904+i,]) < est.risk[i,3]) f.bekk[i]=1 ; else f.bekk[i]=0;
if(mean(est.factors[904+i,]) < est.risk[i,4]) f.ccc[i]=1 ; else f.ccc[i]=0;
if(mean(est.factors[904+i,]) < est.risk[i,6]) f.window[i]=1; else f.window[i]=0;
}
X95=cbind(f.window,f.ewma, f.dvec, f.bekk, f.ccc)
```

```
p1=0.05; p2=0.01
for(i in 1:5){
cat(sum(X95[,i]),"\t",mean(X95[,i]),"\t",UC(X95[,i],p1),"\t", 1-pchisq(UC(X95[,i],p1),df=1),
"\t", IND(X95[,i]),"\t",1-pchisq(IND(X95[,i]),df=1), "\t",qchisq(1-p1,df=1),"\n")
}
```

참고문헌

송유진, 최문선, 황선영 (2008). 차원축소를 통한 다변량 시계열의 변동성 분석 및 응용, <한국통계학회 논문집>, **15**, 825–835.

황선영, 박진아 (2005). VaR(Value at Risk) for Korean financial time series, <한국데이터정보과학회지>, **16**, 283–288.

Bauwens, L., Laurent, S. and Rombouts, J. V. K. (2006). Multivariate GARCH models: A survey, *Journal of Applied Econometrics*, **21**, 79–109.

Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, **31**, 307–327.

Bollerslev, T. (1990). Modelling the coherence in short-run nominal exchange rates: A multivariate generalized ARCH model, *Review of Economics and Statistics*, **72**, 498–505.

Bollerslev, T., Engle, R. F. and Wooldridge, J. M. (1998). A capital asset pricing model with time-varying covariances, *Journal of Political Economy*, **96**, 116–131.

Christoffersen, P. and Pellitier, D. (2004). Backtesting value-at-risk: A duration-based approach, *Journal of Financial Econometrics*, **2**, 84–108.

Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation, *Econometrica*, **50**, 987–1008.

Engle, R. F. and Kroner, K. F. (1995). Multivariate simultaneous generalized ARCH, *Econometric Theory*, **11**, 122–150.

Kupiec, P. (1995). Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models, *Journal of Derivatives*, **3**, 73–84.

RiskMetrics (1996). *RiskMetrics Technical Document*, 4th ed., J. P. Morgan, New York.

Tsay, R. S. (2005). *Analysis of Financial Time Series*, John Wiley & Sons, New York.

Assessments for MGARCH Models Using Back-Testing: Case Study

S. Y. Hwang[1] · M. S. Choi[2] · J. D. Do[3]

[1]Department of Statistics, Sookmyung Women's University;
[2]Department of Statistics, Sookmyung Women's University;
[3]Department of Statistics, Keimyung University

(Received January 2009; accepted February 2009)

Abstract

Current financial crisis triggered by shaky U.S. banking system adds to the emphasis on the importance of the volatility in controlling and understanding financial time series data. The ARCH and GARCH models have been useful in analyzing economic time series volatilities. In particular, multivariate GARCH(MGARCH, for short) provides both volatilities and conditional correlations between several time series and these are in turn applied to computations of hedge-ratio and VaR. In this short article, we try to assess various MGARCH models with respect to the back-testing performances in VaR study. To this end, 14 korean stock prices are analyzed and it is found that MGARCH outperforms rolling window, and BEKK and CCC are relatively conservative in back-testing performance.

Keywords: Muitivariate GARCH, VaR, back-testing, stock prices data.

[2]Corresponding author: Doctoral student, Department of Statistics, Sookmyung Women's University, 52 Hyochangwon-gil, Yongsan-gu, Seoul 140-742, Korea. E-mail: snrndi82@sm.ac.kr