

신용평가에서 두 분포의 동일성 검정에 대한 수정통계량

홍중선¹, 박하수²

¹성균관대학교 통계학전공, ²성균관대학교 응용통계연구소
(2008년 12월 접수, 2009년 1월 채택)

요약

신용평가 연구에서 부도와 정상의 분포함수들의 동일성을 검정하는 비모수적 방법으로 Kolmogorov-Smirnov 검정법 이외에 Cramer-Von Mises, Anderson-Darling, Watson 검정방법을 소개한다. 부도와 정상의 분포함수들의 선형결합된 부도율의 분포함수에 관한 전체적인 정보는 파악되어 잘 알고 있다. 모집단의 분포함수를 알고 있다는 가정 하에 Cramer-Von Mises, Anderson-Darling, Watson 검정통계량의 수정통계량을 제안한다. 신용평가자료와 유사한 성격을 갖는 다양한 부도율의 확률분포로부터 스코어를 생성하여 본 연구에서 제안한 수정통계량을 비교 토론한다.

주요용어: 부도율, 분포함수, 비모수검정, 신용평가, 스코어, 왜도, 타당도, 판별력.

1. 서론

금융시장에서 리스크 관리를 위해 신용평가모형을 개발하고 적합성 검증(validation)할 때에 부도율(probability of default: PD)의 확률분포에 관한 연구 논문은 많은 문헌에서 찾아볼 수 있다. 스코어는 부도율을 변수변환하여 점수형태로 표현하기 때문에 스코어분포(distribution of score)와 부도율분포(distribution of PD)는 유사하게 사용된다. 확률변수 X 는 신용평가모형에서 스코어를 나타내고 D 는 부도여부(1이면 부도, 0이면 정상)를 나타내는 지시확률변수(indicator random variable)라고 하자. 스코어의 누적분포함수를 $F(x)$ 로 나타낼 때, 신용평가에 관한 연구에서는 누적분포함수가 부도(default)와 정상(non-default)의 누적분포함수인 $F_D(x)$ 와 $F_N(x)$ 의 선형결합으로 다음과 같이 정의한다 (Tasche 2006).

$$F(x) = \alpha F_D(x) + (1 - \alpha)F_N(x), \quad (1.1)$$

여기서 α 는 부도율 총합(total (portfolio-wide) PD)으로 $P(D = 1)$ 이다. 부도와 정상일 때의 누적분포함수 $F_D(x)$ 와 $F_N(x)$ 는 다음과 같은 조건부 누적분포함수이다.

$$\begin{aligned} F_D(x) &= P(X \leq x | D = 1) \\ F_N(x) &= P(X \leq x | D = 0), \end{aligned} \quad (1.2)$$

신용평가 연구에서 스코어의 누적분포함수가 부도와 정상일 때의 분포함수로 분할되었다는 가정 하에 두 분포함수의 동일성을 검정하기 위하여 다음과 같은 가설을 고려하자.

$$\begin{aligned} H_0 &: \text{두 모집단의 분포함수가 동일하다 } (F_D(x) = F_N(x)), \\ H_1 &: \text{모집단 분포함수 } F_D(x) \text{가 } F_N(x) \text{보다 크다 } (F_D(x) > F_N(x)). \end{aligned} \quad (1.3)$$

¹교신저자: (110-745) 서울특별시 중로구 명륜동 3가 53, 성균관대학교 경제학부 통계학전공, 교수.
E-mail: cshong@skku.ac.kr

두 분포함수의 동일성에 관한 가설 (1.3)을 검정하기 위하여 대표적으로 많이 사용하는 비모수적 방법으로 Kolmogorov-Smirnov(K-S) 검정방법이 있다 (Smirnov, 1939; Darling, 1957; Fisz, 1960; Anderson, 1962; Pearson, 1963; Burr, 1964; Barton과 Mallows, 1965; Stephens, 1965, 1970, 1976, 1974, 1978; Pettitt, 1976; Watson, 1961, 1962; Hájek 등, 1998 참조).

X_1, X_2, \dots, X_{n+m} 은 $F(\cdot)$ 로부터 추출한 크기 $n+m$ 의 확률표본이고, 그 중에서 크기 n 개의 확률표본은 부도차주의 스코어분포인 $F_D(\cdot)$ 으로부터 추출하고 크기 m 개의 확률표본은 정상차주의 스코어분포인 $F_N(\cdot)$ 으로부터 추출할 때에 K-S 검정통계량은 다음과 같다.

$$\text{K-S} = \max_x \left| \hat{F}_D(x) - \hat{F}_N(x) \right|, \quad (1.4)$$

여기서 부도차주의 표본분포함수(sample distribution function)를 $\hat{F}_D(x)$, 정상차주의 표본분포함수를 $\hat{F}_N(x)$ 로 표현하고 다음과 같이 정의한다.

$$\hat{F}_D(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n+m} I(X_i \leq x | D = 1), \quad \hat{F}_N(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n+m} I(X_i \leq x | D = 0). \quad (1.5)$$

신용평가 연구에서 대부분의 K-S 통계량은 매우 큰 값으로 나타나기 때문에 K-S 통계량의 분포표로부터 구한 임계값 또는 대표본인 경우에 표본크기의 함수인 근사적인 임계값 (Daniel, 1990; 송문섭 등, 2003 참조)을 사용하지 않고 Joseph (2005)가 제안한 판단 기준 등을 사용하여 모형의 적합성 검증(validation)을 토론했다. 이러한 판단 기준은 표본의 크기와 무관한 일반적인 법칙(rule of thumb) 중의 하나이다. 그러나 일반적인 K-S 검정방법과 다르게 신용평가 연구에서는 하나의 모집단의 누적분포함수가 부도와 정상의 두 함수로 분할되고 두 분포함수의 동일성을 검정한다는 점에서 차이가 있다.

대부분의 신용평가 자료는 양의 왜도를 갖는 분포형태를 따른다고 파악되기 때문에 모집단의 분포형태를 경험적으로 파악할 수 있거나 사전에 알고 있다고 간주할 수 있다. 모집단인 스코어의 분포함수를 알고 있다는 가정 하에 홍중선과 방글 (2008)은 수정통계량을 제안하여 K-S 검정방법을 실시하면서 식 (1.5)의 표본분포함수의 대안적인 누적분포함수의 추정량을 수정통계량으로 제안하였고 부도율을 따르는 다양한 확률분포인 경우에 적용하였다. 가설 (1.3)을 검정하는 비모수적인 방법으로는 K-S 검정법 이외에 Kuiper V 검정법, Cramer-Von Mises W^2 검정법, Anderson-Darling A^2 검정법, Watson U^2 검정법 등이 있다. 따라서 본 연구에서는 홍중선과 방글 (2008)의 연구를 확장하여 신용평가 연구에서 가설 (1.3)을 검정하기 위하여 일반적으로 많이 사용하는 K-S 검정법 이외의 Cramer-Von Mises, Anderson-Darling, Watson 검정법을 소개하고 이에 대한 수정통계량을 제안하고자 한다. 그리고 스코어의 분포함수를 정규분포 이외에 치우친 정규(skew normal)분포와 베타(Beta)분포에서 양의 왜도를 갖는 경우에 수정 검정통계량과 기존 검정통계량을 비교 분석한다. 2절에서는 두 분포의 동일성을 검정하는 비모수적 검정통계량의 수정통계량을 제안하고 예제를 통하여 비교 설명한다. 그리고 3절에서는 스코어를 따르는 다양한 확률분포에서 모의실험을 통하여 구한 수정통계량을 기존의 통계량과 비교 분석한다. 4절에서는 본 연구의 결과를 정리한다.

2. 수정통계량

가설 (1.3)을 검정하는 비모수적인 검정통계량으로 K-S 통계량 이외에 Kuiper V 통계량, Cramer-Von Mises W^2 통계량, Anderson-Darling A^2 통계량, Watson U^2 통계량은 다음과 같이 정의한다.

Kuiper V 통계량: (Stephen, 1974; Watson, 1961 등)

$$V = \max_x \left[\hat{F}_D(x) - \hat{F}_N(x) \right] + \max_x \left[\hat{F}_N(x) - \hat{F}_D(x) \right],$$

여기서 부도기업의 $\hat{F}_D(x)$, 정상기업의 $\hat{F}_N(x)$ 는 식 (1.5)와 같이 정의한다.

Cramer-Von Mises W^2 통계량: (Darling, 1957; Stephen, 1970; Fisz, 1960; Anderson, 1962 등)

$$\begin{aligned} W^2 &= (n+m)\hat{\alpha}_1(1-\hat{\alpha}_1) \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \hat{F}_D(x) - \hat{F}_N(x) \right\}^2 d\hat{F}(x) \\ &= \hat{\alpha}_1(1-\hat{\alpha}_1) \sum_{i=1}^{n+m} \left\{ \hat{F}_D(x_i) - \hat{F}_N(x_i) \right\}^2, \end{aligned}$$

여기서 $\hat{F}(x) = \hat{\alpha}_1\hat{F}_D(x) + (1-\hat{\alpha}_1)\hat{F}_N(x)$ 이며, 식 (1.1)에서의 $\hat{\alpha}_1$ 는 $n/(n+m)$ 이다.

Anderson-Darling A^2 통계량: (Pettitt, 1976; Scholz와 Stephens, 1987 등)

$$\begin{aligned} A^2 &= (n+m)\hat{\alpha}_1(1-\hat{\alpha}_1) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left\{ \hat{F}_D(x) - \hat{F}_N(x) \right\}^2}{\hat{F}(x)\{1-\hat{F}(x)\}} d\hat{F}(x) \\ &= \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^{n+m-1} \frac{\{M_i(n+m) - ni\}^2}{i\{(n+m) - i\}}, \end{aligned}$$

여기서 $M_i = n\hat{F}_D \circ \hat{F}^{-1}(i/(n+m))$ 그리고 $\hat{F}^{-1}(t) = \inf\{x : \hat{F}(x) = t\}$.

Watson U^2 통계량: (Watson, 1961, 1962; Stephens, 1965, 1976 등)

$$\begin{aligned} U^2 &= (n+m)\hat{\alpha}_1(1-\hat{\alpha}_1) \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left\{ \hat{F}_D(x) - \hat{F}_N(x) \right\} - \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \hat{F}_D(y) - \hat{F}_N(y) \right\} d\hat{F}(y) \right]^2 d\hat{F}(x) \\ &= \hat{\alpha}_1(1-\hat{\alpha}_1) \left[\sum_{i=1}^{n+m} \left\{ \hat{F}_D(x_i) - \hat{F}_N(x_i) \right\}^2 - \frac{1}{n+m} \left[\sum_{i=1}^{n+m} \left\{ \hat{F}_D(x_i) - \hat{F}_N(x_i) \right\} \right]^2 \right]. \end{aligned}$$

신용평가 연구에서 일반적으로 부도차주의 부도율 또는 스코어는 정상차주 부도율보다 낮게 분포되어 나타난다. 따라서 부도차주의 누적분포함수는 정상차주의 함수보다 크거나 같다($F_D(x) \geq F_N(x)$)고 할 수 있으므로 본 연구에서 Kuiper V 통계량은 K-S 통계량과 일치한다고 판단하기 때문에 Kuiper V 통계량의 연구는 더이상 언급하지 않는다.

홍중선과 방글 (2008)에서 제안한 K-S 수정통계량은 다음과 같다.

$$K-S_M = \max_x \left| \hat{F}_D^M(x) - \hat{F}_N^M(x) \right|,$$

여기서 $\hat{F}_D^M(x)$ 와 $\hat{F}_N^M(x)$ 는 확률변수 X 가 특정한 분포함수를 따를 때 식 (1.2)에서 정의된 누적분포함수의 추정량으로 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} \hat{F}_D^M(x) &= \hat{P}(X \leq x | D = 1), \\ \hat{F}_N^M(x) &= \hat{P}(X \leq x | D = 0). \end{aligned} \tag{2.1}$$

이를 확장하여 Cramer-Von Mises, Anderson-Darling, Watson 검정통계량인 W^2 , A^2 , U^2 에 대한 수정통계량 W_M^2 , A_M^2 , U_M^2 을 각각 다음과 같이 제안한다.

$$W_M^2 = (n+m)\hat{\alpha}_2(1-\hat{\alpha}_2) \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \hat{F}_D^M(x) - \hat{F}_N^M(x) \right\}^2 dF(x), \tag{2.2}$$

표 2.1. 가상 자료: W^2, A^2, U^2 통계량

X	D	$\hat{F}_D(x) - \hat{F}_N(x)$	$\{\hat{F}_D(x) - \hat{F}_N(x)\}^2$	M_i	$\{M_i(n+m) - ni\}^2 / i \{(n+m) - i\}$
-1.8	1	$1/3 - 0/7 = 0.3333$	0.0400	1	5.444
-1.5	0	$1/3 - 1/7 = 0.1905$	0.1600	1	1.000
-1.2	1	$2/3 - 1/7 = 0.5238$	0.3600	2	5.762
-0.8	0	$2/3 - 2/7 = 0.3809$	0.1877	2	2.667
-0.5	1	$3/3 - 2/7 = 0.7143$	0.4011	3	9.000
0.0	0	$3/3 - 3/7 = 0.5714$	0.6944	3	6.000
0.5	0	$3/3 - 4/7 = 0.4286$	0.4445	3	3.857
0.8	0	$3/3 - 5/7 = 0.2857$	0.2500	3	2.250
1.2	0	$3/3 - 6/7 = 0.1429$	0.1111	3	1.000
1.5	0	0	0.0278	3	0.000
합		3.5714	1.6894		36.98

$$A_M^2 = (n+m)\hat{\alpha}_2(1-\hat{\alpha}_2) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\{\hat{F}_D^M(x) - \hat{F}_N^M(x)\}^2}{F(x)\{1-F(x)\}} dF(x), \quad (2.3)$$

$$U_M^2 = (n+m)\hat{\alpha}_2(1-\hat{\alpha}_2) \int_{-\infty}^{\infty} \left[\{\hat{F}_D^M(x) - \hat{F}_N^M(x)\} - \int_{-\infty}^{\infty} \{\hat{F}_D^M(y) - \hat{F}_N^M(y)\} dF(y) \right]^2 dF(x), \quad (2.4)$$

여기서 $\hat{\alpha}_2 = \hat{P}(D=1)$ 이다.

제안된 수정통계량에서 누적분포함수 $F(x)$ 는 이미 알고 있다고 가정했으므로 추정분포함수를 사용하지 않았음을 주의한다. 제안한 수정통계량 W_M^2, A_M^2, U_M^2 을 W^2, A^2, U^2 통계량과 비교하기 위하여 표준 정규분포에서 추출된 크기 10의 확률표본을 고려하자. 부도차주의 스코어는 3개이고 정상차주의 스코어는 7개인 자료는 표 2.1과 같다. 우선 W^2, A^2, U^2 통계량을 구하는 과정을 표 2.1에서 구현하였다. 표 2.1을 바탕으로 W^2, A^2, U^2 통계량값을 구하고 임계값과 비교한 결과는 다음과 같다.

Cramer-Von Mises 통계량 $W^2 = 3 \cdot 7/10^2 \cdot 1.6894 = 0.3547$ 이다. 여기서 표본크기와 무관한 값으로 조정하여 $W^2/(n+m)\hat{\alpha}_1(1-\hat{\alpha}_1) = 0.1689$ 를 얻는다. 이 값은 대응하는 표본크기($n=3, m=7$)와 5% 유의수준의 임계값인 0.461보다 작으므로 귀무가설을 기각할 수 없다. Anderson-Darling 통계량 $A^2 = 1.7609$ 이고, $A^2/(n+m)\hat{\alpha}_1(1-\hat{\alpha}_1) = 0.8385$ 이다. 이 값은 대응하는 표본크기와 5% 유의수준의 임계값인 2.492보다 작으므로 귀무가설을 기각할 수 없다. 그리고 Watson 통계량 $U^2 = (21/10^2)\{1.6894 - 1/10(3.5714)^2\} = 0.0869$ 이며 $U^2/(n+m)\hat{\alpha}_1(1-\hat{\alpha}_1) = 0.0413$ 이다. 이에 대응하는 표본크기와 5% 유의수준의 임계값인 0.187보다 작으므로 유의수준 5%에서 귀무가설을 기각할 수 없다. 따라서 Cramer-Von Mises W^2 , Anderson-Darling A^2 , Watson U^2 검정통계량들은 모두 임계값보다 작으므로 두 분포함수가 동일하다는 귀무가설을 기각할 수 없다고 모두 같은 결론을 내릴 수 있다.

다음으로 동일한 표 2.1의 자료를 바탕으로 수정통계량 W_M^2, A_M^2, U_M^2 을 구하기 위한 과정을 표 2.2에 나타내었다.

표 2.2를 바탕으로 W_M^2, A_M^2, U_M^2 통계량값을 구하고 임계값과 비교한 결과는 다음과 같다. $(n+m)\hat{\alpha}_2(1-\hat{\alpha}_2) = 10 \cdot 0.1809 \cdot 0.8191 = 1.4818$ 이므로 Cramer-Von Mises 수정통계량 $W_M^2 = 1.4818 \cdot 0.1961 = 0.2906$ 이다. 기존의 통계량과 비교하기 위하여 표본크기와 무관하게 $(n+m)\hat{\alpha}_2(1-\hat{\alpha}_2)$ 으로 나누어 조정하면, $W_M^2/(n+m)\hat{\alpha}_2(1-\hat{\alpha}_2) = 0.1961$ 이 된다. 이 값은 대응하는 표본크기($n=3, m=7$)와 5% 유의수준의 임계값인 0.461보다 작으므로 귀무가설을 기각할 수 없다. Anderson-Darling 수정통계량 $A_M^2 = 1.4658$ 이고 $A_M^2/(n+m)\hat{\alpha}_2(1-\hat{\alpha}_2) = 0.9892$ 의 값을 갖는다. 이 값은 대응하는 표

표 2.2. 가상 자료: W_M^2, A_M^2, U_M^2 통계량

X	D	$dF(x)$	$F(x)$	$\hat{F}_D^M(x)$	$\hat{F}_N^M(x)$	$\{\hat{F}_D^M(x) - \hat{F}_N^M(x)\}dF$	$\{\hat{F}_D^M(x) - \hat{F}_N^M(x)\}^2dF$
-1.8	1	0.0359	0.0359	0.1985	0.0000	0.0071	0.0014
-1.5	0	0.0309	0.0668	0.1985	0.0377	0.0050	0.0008
-1.2	1	0.0483	0.1151	0.4655	0.0377	0.0207	0.0088
-0.8	0	0.0968	0.2119	0.4655	0.1559	0.0300	0.0093
-0.5	1	0.0967	0.3086	1.0000	0.1559	0.0816	0.0689
0.0	0	0.1915	0.5001	1.0000	0.3896	0.1169	0.0714
0.5	0	0.1915	0.6916	1.0000	0.6233	0.0721	0.0272
0.8	0	0.0967	0.7883	1.0000	0.7414	0.0250	0.0065
1.2	0	0.0968	0.8851	1.0000	0.8595	0.0136	0.0019
1.5	0	0.1151	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000	0.0000
합						0.3720	0.1961

본크기와 5% 유의수준의 임계값인 2.492보다 작으므로 귀무가설을 기각할 수 없다. 그리고 Watson 수정통계량 $U_M^2 = 0.0856$ 이며 $U_M^2/(n+m)\hat{\alpha}_2(1-\hat{\alpha}_2) = 0.0578$ 이 된다. 이 값은 대응하는 표본크기와 5% 유의수준의 임계값인 0.187보다 작으므로 유의수준 5%에서 귀무가설을 기각할 수 없다. 그러므로 Cramer-Von Mises, Anderson-Darling, Watson의 수정통계량인 W_M^2, A_M^2, U_M^2 의 값들은 모두 임계값보다 작으므로 두 분포함수가 동일하다는 귀무가설을 기각할 수 없다고 결론내릴 수 있으며, Cramer-Von Mises, Anderson-Darling, Watson 검정방법의 결과와 일치한다. 그러나 모든 수정통계량 W_M^2, A_M^2, U_M^2 의 값들은 W^2, A^2, U^2 보다 조금 크다는 것을 발견할 수 있다.

3. 다양한 확률분포 모의실험

신용평가 자료와 유사한 상황 하에서 K-S 검정통계량과 수정통계량을 비교한 홍종선과 방글 (2008)의 연구방법과 유사하게 모의실험한다. 표준정규분포 그리고 실제의 스코어 분포와 유사한 치우친 정규분포와 베타분포로부터 50개의 난수를 추출하여 스코어라고 간주하고 스코어의 전체 분포함수가 부도차주와 정상차주의 분포함수로 분할되었다고 가정한다. 양의 왜도를 갖는 경우 50개 중에서 90%를 실제 정상차주라 하고, 나머지 10%를 실제 부도차주라고 가정한다. 정상차주를 부도차주로 예측하는 오분류율을 5%, 10%, 15%, 20%의 네가지 경우로 설정하고, 부도차주를 정상차주로 예측하는 비율은 5%로 비교적 작게 고정한다. 전체 오분류된 자료가 오분류 기준점으로부터 멀리 떨어진 곳에서는 발생하지 않으며 가까운 곳에서는 많이 발생하도록 표본을 생성한다. 이렇게 생성된 자료를 바탕으로 식 (2.1)에서 제안한 수정통계량들을 구한다. 이 과정을 10,000번 반복하여 구한 기존의 통계량 W^2, A^2, U^2 과 각각의 분포들을 가정한 수정통계량 W_M^2, A_M^2, U_M^2 의 평균값을 구한다.

3.1. 정규분포

표준정규분포로부터 스코어를 생성하여 모의 실험한 결과는 표 3.1에 나타내었다. 모집단이 정규분포를 따르는 경우에 Cramer-Von Mises, Anderson-Darling, Watson 검정통계량인 W^2, A^2, U^2 과 비교하여 수정통계량 W_M^2, A_M^2, U_M^2 의 값들이 조금 큰 값을 가지며, 오분류율이 커질수록 기존 통계량들과 수정통계량들 모두 그 값이 작아지는 것을 볼 수 있는데 오분류율 20%에서 값이 조금 커지는 역전현상이 발생하는 것을 볼 수 있다. 이것은 오분류율이 증가함에 따라 정상차주의 분포 중에서 판별기준에 가까운 곳에서 정상차주보다 부도차주의 수가 늘어나면서, 오분류율이 큰 경우에 정상차주와 부도차주를

표 3.1. 표준정규분포를 따르는 경우의 통계량 비교

	오분류율	통계량	수정통계량	차이
Cramer-Von Mises	5%	0.2268	0.2366	-0.0098
	10%	0.1791	0.1907	-0.0116
	15%	0.1779	0.1891	-0.0112
	20%	0.1849	0.1948	-0.0099
Anderson-Darling	5%	1.3661	1.4532	-0.0871
	10%	0.9844	1.0598	-0.0754
	15%	0.9256	0.9943	-0.0687
	20%	0.9352	0.9971	-0.0619
Watson	5%	0.0468	0.0553	-0.0085
	10%	0.0349	0.0423	-0.0074
	15%	0.0343	0.0419	-0.0076
	20%	0.0376	0.0442	-0.0066

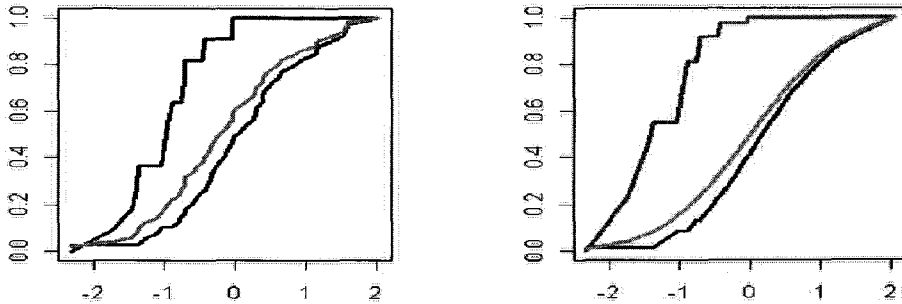


그림 3.1. 정규분포에서 추출한 분포함수들

90:10으로 가정한 비율에서 벗어나기 때문이다. 특히 오분류율이 10%일 때 차이가 좀 더 큰 값을 갖는데, U^2 통계량의 차이가 0.007정도로 가장 작은 이유는 통계량의 평균값이 작기 때문이다. 따라서 평균 값을 기준으로 살펴보면 오히려 Watson U^2 통계량과 수정통계량 U_M^2 과의 차이가 가장 크다는 것을 파악할 수 있다.

모의실험한 정규분포의 자료(오분류율 10%)를 바탕으로 기존 통계량들에 사용되는 부도와 정상치주의 표본분포함수와 스코어의 표본분포함수 $\hat{F}_D(x)$, $\hat{F}_N(x)$, $\hat{F}(x)$ 를 그림 3.1의 왼쪽에 표현하였고, 수정통계량을 구하는데 사용하는 추정분포함수 $\hat{F}_D^M(x)$, $\hat{F}_N^M(x)$ 그리고 알고 있다고 가정하는 모집단의 분포함수 $F(x)$ 를 그림 3.1의 오른쪽에 표현하였다. 각각의 그림에서 가장 위에 그려진 누적분포함수는 부도치주의 분포함수이며 아래에 그려진 분포함수는 정상치주의 분포함수이다. 그리고 가운데에 표현된 선은 표본전체에 관한 분포함수이다. 분포함수의 곡선의 형태는 두 그림 모두 부도치주보다는 정상치주의 수가 많기 때문에 정상치주의 곡선이 더 완만하게 증가하는 형태를 보이고 있으며, 부도치주의 추정분포함수가 작은 스코어에서 표본분포함수보다 급격하게 증가하며, 정상치주의 추정분포함수가 표본분포함수보다 더 부드럽고 단조롭게 증가하는 것을 파악할 수 있다.

3.2. 치우친 정규분포

치우친 정규분포(skew normal distribution: $SN(\lambda)$, λ 는 왜도계수)로부터 스코어를 생성하여 모의 실험한 결과는 표 3.2에 나타내었다. λ 의 값이 2와 5인 경우를 고려하였고 각각의 왜도는 0.4538과

표 3.2. 치우친 정규분포를 따르는 경우의 통계량 비교

SN분포($\lambda = 2$)	오분류율	통계량	수정통계량	차이
Cramer-Von Mises	5%	0.2271	0.2307	-0.0036
	10%	0.1791	0.1858	-0.0067
	15%	0.1781	0.1834	-0.0053
	20%	0.1849	0.1948	-0.0030
Anderson-Darling	5%	1.3689	1.4236	-0.0547
	10%	0.9857	1.0353	-0.0496
	15%	0.9260	0.9679	-0.0389
	20%	0.9251	0.9485	-0.0234
Watson	5%	0.0468	0.0536	-0.0068
	10%	0.0349	0.0408	-0.0059
	15%	0.0344	0.0404	-0.0060
	20%	0.0376	0.0424	-0.0048
SN분포($\lambda = 5$)	오분류율	통계량	수정통계량	차이
Cramer-Von Mises	5%	0.2268	0.2299	-0.0031
	10%	0.1791	0.1860	-0.0068
	15%	0.1780	0.1818	-0.0038
	20%	0.1848	0.1882	-0.0034
Anderson-Darling	5%	1.3677	1.4188	-0.0511
	10%	0.9849	1.0356	-0.0507
	15%	0.9256	0.9550	-0.0294
	20%	0.9247	0.9509	-0.0262
Watson	5%	0.0467	0.0535	-0.0068
	10%	0.0349	0.0410	-0.0061
	15%	0.0344	0.0401	-0.0057
	20%	0.0376	0.0424	-0.0048

0.8510이다(치우친 정규분포의 연구는 Azzalini (1985), Henze (1986), Chang 등 (2005), Buccianti (2005), Genton (2005) 그리고 Gupta와 Chen (2001)을 참조).

모집단이 양의 왜도를 갖는 치우친 정규분포를 따르는 경우의 통계량값들을 살펴보면 Cramer-Von Mises, Anderson-Darling, Watson 검정통계량인 W^2 , A^2 , U^2 과 비교하여 수정통계량 W_M^2 , A_M^2 , U_M^2 의 값들이 조금 큰 값을 가지며, 또한 오분류율이 커질수록 기존 통계량들과 수정통계량들 모두 그 값이 작아지고 오분류율 20%에서 값이 약간 커지는 역전현상이 일어난다. 기존 통계량과 수정통계량의 차이는 오분류율이 10%일 때 좀 더 차이가 큰 값을 갖는다. 또한 각각의 통계량들의 차이가 0.0061정도로 가장 작게 나타난다. 그러나 이것은 통계량의 평균값이 다른 통계량들보다 작기 때문에 평균값을 기준으로 $\lambda = 5$ 인 경우에서 다시 살펴보면 Watson U^2 통계량과 수정통계량 U_M^2 과의 차이가 0.1748로서 다른 통계량보다 가장 크다(W^2 과 W_M^2 의 차이는 0.0379, A^2 과 A_M^2 의 차이는 0.0514). 이러한 현상은 정규분포를 가정한 3.1절의 결과와 매우 유사하게 나타난다. 그 외에 치우친 정규분포에서의 수정통계량인 W_M^2 , A_M^2 , U_M^2 의 값들은 왜도계수 λ 가 커짐에 따라 조금 큰 값을 가지며 오분류율이 증가할수록 그 차이가 없어진다는 것을 파악할 수 있다.

치우친 정규분포의 자료($\lambda = 5$, 오분류율 10%)를 바탕으로 기존 통계량들에 사용한 표본분포함수 $\hat{F}_D(x)$, $\hat{F}_N(x)$, $\hat{F}(x)$ 를 그림 3.2의 왼쪽에 나타내었고, 모집단의 분포함수 $F(x)$ 와 수정통계량들에 사용된 추정분포함수 $\hat{F}_D^M(x)$, $\hat{F}_N^M(x)$ 를 그림 3.2의 오른쪽에 표현하였다. 그림 3.2에서 두 분포함수들의

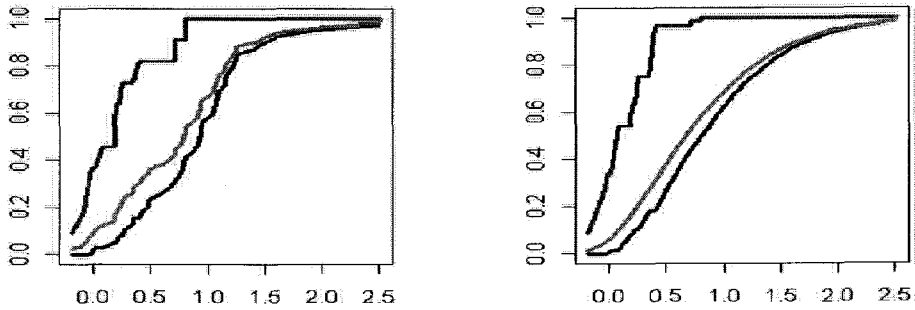


그림 3.2. 치우친 정규분포에서 추출한 분포함수들

표 3.3. 베타분포를 따르는 경우의 통계량 비교

Beta분포($a = 1, b = 5$)	오분류율	통계량	수정통계량	차이
Cramer-Von Mises	5%	0.2268	0.2363	-0.0095
	10%	0.1790	0.1913	-0.0123
	15%	0.1777	0.1881	-0.0104
	20%	0.1848	0.1953	-0.0105
Anderson-Darling	5%	1.3670	1.4540	-0.0870
	10%	0.9842	1.0639	-0.0797
	15%	0.9245	0.9902	-0.0657
	20%	0.9250	0.9981	-0.0731
Watson	5%	0.0467	0.0552	-0.0085
	10%	0.0338	0.0423	-0.0085
	15%	0.0344	0.0419	-0.0075
	20%	0.0376	0.0445	-0.0069

두 그림을 비교해 보면, 표본분포함수와 추정분포함수의 차이가 그림 3.1과 유사하다는 것을 파악할 수 있다.

3.3. 베타분포

0과 1사이의 값을 갖는 스코어의 확률분포의 성격과 일치하는 베타분포 $Beta(a, b)$ 에서 양의 왜도(1.2561)를 갖는 베타분포 $Beta(1, 5)$ 를 바탕으로 한 모의실험 결과를 표 3.3에 나타내었다.

모집단의 분포가 베타분포를 따른다고 하였을 때 Cramer-Von Mises, Anderson-Darling, Watson 검정 통계량값인 W^2, A^2, U^2 의 값보다 수정통계량인 W_M^2, A_M^2, U_M^2 의 값들이 조금 큰 값을 갖는다. 또한 통계량값들을 살펴보면 3.1절과 3.2절에서 살펴본 모집단의 분포를 각각 정규분포와 치우친 정규분포로 가정하였을 때의 값과 매우 유사한 형태로 나타나는 것을 볼 수 있다. 그리고 기존 통계량과 수정통계량의 차이는 오분류율이 10%일 때 좀 더 차이가 큰 값을 갖고, 각각의 통계량들의 차이에서 U^2 통계량의 차이가 0.0085정도로 가장 작게 나타난다. 그러나 이것은 U^2 통계량의 평균값이 W^2 이나 A^2 보다 작기 때문에 평균값을 기준으로 통계량들의 차이를 다시 살펴보면, W^2 과 W_M^2 의 차이는 0.0687, A^2 과 A_M^2 의 차이는 0.0810으로 나타나는 반면에 U^2 과 U_M^2 의 차이는 0.2515로 오히려 Watson U^2 통계량과 수정통계량 U_M^2 과의 차이가 더 큰 것을 파악할 수 있다.

베타분포 $Beta(1, 5)$ 의 자료(오분류율 10%)를 바탕으로 기존 통계량들의 표본분포함수와 수정통계량들의 추정분포함수를 그림 3.3에 나타내었다. 그림 3.3을 살펴보면 표본분포함수와 추정분포함수에서의

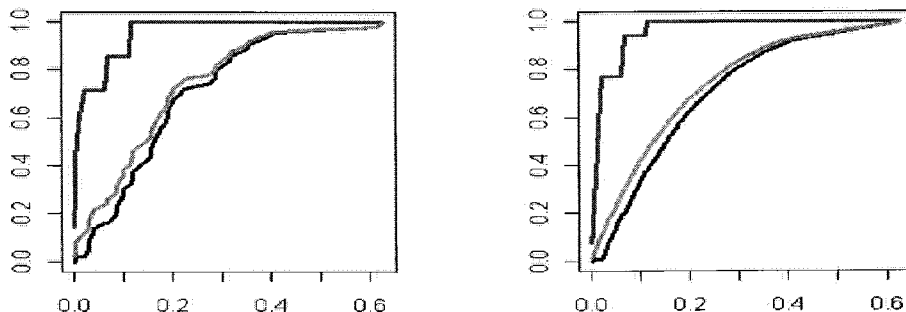


그림 3.3. 베타분포에서 추출한 분포함수들

차이가 그림 3.1, 3.2와 유사하게 나타나지만 분포의 성격때문에 조금씩 다르다는 것을 발견할 수 있다.

4. 결론

신용평가 연구에서 부도율의 함수인 스코어의 분포함수를 알고 있다는 가정 하에 모집단의 분포함수로부터 분할된 부도와 정상채주의 분포함수들의 동일성을 검정하는 Cramer-Von Mises, Anderson-Darling, Watson 검정통계량의 수정통계량들을 제안하였다. 모집단 분포를 정규분포로 가정하여 적용하여 보고, 실제 스코어 분포와 유사한 양의 왜도를 갖는 분포 중에서 치우친 정규분포와 베타분포를 적용하여 수정통계량을 구하고 기존의 통계량들과 비교 분석하였다.

다양한 확률분포 예제의 결과를 살펴보면, 스코어가 어떠한 확률분포로부터 생성되어도 Cramer-Von Mises, Anderson-Darling, Watson 검정통계량값들은 변하지 않지만, 수정통계량값들은 변한다. 수정통계량들의 값은 기존 통계량보다 큰 값을 갖으며, 또한 오분류율이 커질수록 기존 통계량들과 수정통계량들 모두 그 값이 작아지는데 오분류율이 10%일 때 차이가 크다. 또한 Watson 통계량이 다른 통계량보다 가장 큰 차이를 보인다.

홍중선과 방글 (2008)의 연구에서 스코어가 가정된 어떠한 확률분포로부터 생성되어도 K-S 통계량값들은 변하지 않지만 K-S 수정통계량값은 변하고, K-S 수정통계량의 값은 K-S 통계량보다 큰 값으로 나타난다는 것을 유도하였다. 그리고 오분류율이 커질수록 K-S 통계량과 K-S 수정통계량 모두 그 값이 작아지며, 오분류율이 10%일 때 차이가 크다는 결과를 유도하였다. 이러한 결과는 본 논문에서 제안한 3가지 통계량인 Cramer-Von Mises, Anderson-Darling, Watson 수정통계량들의 모의실험 결과와 유사하다는 것을 파악할 수 있다.

확률분포에 대응하는 통계량들의 변화를 그림 4.1에 표현하였다. 그림 4.1에는 Cramer-Von Mises, Anderson-Darling, Watson 검정통계량 각각에 대하여 네 종류의 확률분포(정규분포, 베타분포, 치우친 정규분포($\lambda = 2, 5$))로부터 추출한 확률표본을 바탕으로 구한 기존 통계량과 수정통계량 값을 제II종 오류율의 변화에 따라 표현하였다. Cramer-Von Mises, Anderson-Darling, Watson 검정통계량 각각에 대한 그림 4.1의 세 그래프 모두 네 종류의 확률분포 하에서의 기존 통계량값들은 제일 하단에 중복되어 나타나 있으며, 가장 위의 곡선은 정규분포와 베타분포 하에서 수정통계량들이 거의 중복되어 나타나 있다. 그리고 가운데에는 $\lambda = 2$ 와 5의 치우친 정규분포의 수정통계량들이 중복되어 나타나 있다. 따라서 Cramer-Von Mises, Anderson-Darling, Watson 검정통계량들인 W^2, A^2, U^2 모두 어떠한 확률분포를 가정하더라도 그 결과의 차이는 없으며, 수정통계량인 W_M^2, A_M^2, U_M^2 의 값들이 좀 더 큰 값을 갖는다는 것을 알 수 있다. 또한 본 연구에서 다룬 베타분포의 왜도는 1.2561이고 $\lambda = 2$ 와 5일 때의 치

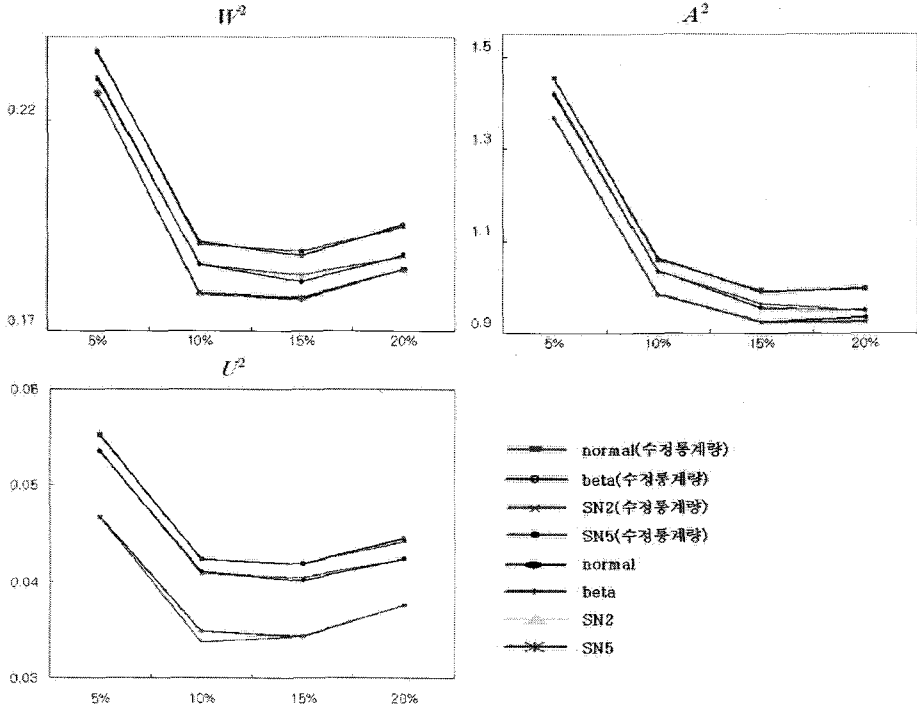


그림 4.1. 확률분포에 대응하는 통계량들의 변화

우친 정규분포의 왜도는 각각 0.4538과 0.8510이므로 베타분포가 치우친 정규분포보다 더 큰 왜도값을 갖는다. 그러나 베타분포에 대한 수정통계량의 값은 왜도가 0인 정규분포와 유사한 값을 가지고 있다는 것을 그림 4.1에서 탐색할 수 있다. 따라서 왜도의 크기보다 분포형태에 더욱 민감한 반응을 보인다고 파악할 수 있다.

신용평가 연구에서 부도와 정상의 두 함수로 분할된 모집단의 누적분포함수가 양의 왜도를 갖는 분포 형태를 따른다. 따라서 모집단의 분포를 경험적으로 혹은 사전에 알고 있다고 간주할 수 있으므로 본 연구에서는 모집단의 스코어 분포함수를 알고 있다는 가정 하에 분할된 두 분포함수의 동일성을 검정하는 수정통계량들을 제안하고 평가 및 토론하였다. 이러한 결과를 바탕으로 신용평가에서 적합성 검정통계량의 대안적인 방법으로 홍종선과 방글 (2008)의 K-S 수정통계량 뿐만 아니라 본 연구의 Cramer-Von Mises, Anderson-Darling, Watson 수정검정통계량들의 사용을 제안한다.

참고문헌

송문섭, 박창순, 이정진 (2003). <S-Link를 이용한 비모수 통계학>, 자유아카데미.
 홍종선, 방글 (2008). 신용평가를 위한 Kolmogorov-Smirnov 수정통계량, <응용통계연구>, **21**, 1065-1075.
 Anderson, T. W. (1962). On the distribution of the two-sample Cramer-von mises criterion, *The Annals of Mathematical Statistics*, **33**, 1148-1159.
 Azzalini, A. (1985). A class of distributions which includes the normal ones, *Scandinavian Journal of Statistics*, **12**, 171-178.
 Barton, D. E. and Mallows, C. L. (1965). Some aspects of the random sequence, *The Annals of Mathematical Statistics*, **36**, 236-260.

- Buccianti, A. (2005). Meaning of the λ parameter of skew-normal and log-skew normal distributions in fluid geochemistry, *CODAWORK*, 19–21.
- Burr, E. J. (1964). Small-sample distributions of the two-sample Cramér-von Mises' W^2 and Watson's U^2 , *The Annals of Mathematical Statistics*, **35**, 1091–1098.
- Chang, F. C., Gupta, A. K. and Huang, W. J. (2005). Some Skew-Symmetric Models, *Random Operatots and Stochastic Equations*, **10**, 133–140.
- Daniel, W. W. (1990). *Applied Nonparametric Statistics*, 2nd ed., PWS-Kent, Boston.
- Darling, D. A. (1957). The Kolmogorov-Smirnov, Cramér-von Mises Tests, *The Annals of Mathematical Statistics*, **28**, 823–838.
- Fisz, M. (1960). On a Result by M. Rosenblatt Concerning the Von Mises-Smirnov Test, *The Annals of Mathematical Statistics*, **31**, 427–429.
- Genton, M. G. (2005). Discussion of “The skew-normal distribution and related multivariate families” by A. Azzalini, *Scandinavian Journal of Statistics*, **32**, 189–198.
- Gupta, A. K. and Chen, T. (2001). Goodness-of-fit test for the Skew-normal distribution, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **30**, 907–930.
- Hájek, J., Šidák, Z. and Sen, P. K. (1998). *Theory of Rank Tests*, 2nd ed., Academic Press, New York.
- Henze, N. A. (1986). A probabilistic representation of the 'Skewed-normal' distribution, *Scandinavian Journal of Statistics*, **13**, 271–275.
- Joseph, M. P. (2005). A PD validation framework for Basel II internal rating-based systems, *Credit Scoring and Credit Control*, **IX**.
- Pearson, E. S. (1963). Comparison of tests for randomness of points on a line, *Biometrika*, **50**, 315–325.
- Pettitt, A. N. (1976). A two-sample Anderson-Darling rank statistic, *Biometrika*, **63**, 161–168.
- Scholz, F. W. and Stephens, M. A. (1987). K -sample Anderson-Darling tests, *Journal of the American Statistical Association*, **82**, 918–924.
- Smirnov, N. V. (1939). On the estimation of the discrepancy between empirical curves of distribution for two independent sample, *Bulletin Moscow University*, **2**, 3–16.
- Stephens, M. A. (1965). Significance points for the two-sample statistic $U_{M,N}^2$, *Biometrika*, **52**, 661–663.
- Stephens, M. A. (1970). Use of the Kolmogorov-Smirnov, Cramer-von Mises and related statistics without extensive tables, *Journal of the Royal Statistical Society. Series B(Methodological)*, **32**, 115–122.
- Stephens, M. A. (1974). EDF statistics for goodness of fit and some comparisons, *Journal of the American Statistical Association*, **69**, 730–737.
- Stephens, M. A. (1976). Asymptotic results for goodness-of-fit statistics with unknown parameters, *The Annals of Statistics*, **4**, 357–369.
- Stephens, M. A. (1978). On the W test for exponentiality with origin known, *Technometrics*, **20**, 33–35.
- Tasche, D. (2006). Validation of internal rating system and PD estimates, *Working paper*, <http://arxiv.org/physics/0606071v1>.
- Watson, G. S. (1961). Goodness-of-fit tests on a circle, *Biometrika*, **48**, 109–114.
- Watson, G. S. (1962). Goodness-of-fit tests on a circle II, *Biometrika*, **49**, 57–63.

Modified Test Statistic for Identity of Two Distribution on Credit Evaluation

C. S. Hong¹ · H. S. Park²

¹Department of Statistics, Sungkyunkwan University;

²Research Institute of Applied Statistics, Sungkyunkwan University

(Received December 2008; accepted January 2009)

Abstract

The probability of default on the credit evaluation study is represented as a linear combination of two distributions of default and non-default, and the distribution of the probability of default are generally known in most cases. Except the well-known Kolmogorov-Smirnov statistic for testing the identity of two distribution, Kuiper, Cramer-Von Mises, Anderson-Darling, and Watson test statistics are introduced in this work. Under the assumption that the population distribution is known, modified Cramer-Von Mises, Anderson-Darling, and Watson statistics are proposed. Based on score data generated from various probability density functions of the probability of default, the modified test statistics are discussed and compared.

Keywords: Credit rating model, score, discriminatory power, distribution function, nonparametric test, probability of default, skewness, validation.

¹Corresponding author: Professor, Department of Statistics, Sungkyunkwan University, 3-53, Myungryun-Dong, Jongro-Gu, Seoul 110-745, Korea. E-mail: cshong@skku.ac.kr