

수동 소나 쌍을 이용한 분산탐지 체계의 설계 및 성능 분석

Design and Performance Analysis of Distributed Detection Systems with Two Passive Sonar Sensors

김 승 근*	도 주 환*	송 승 민*
Song-Geun Kim	Joo-Hwan Do	Seung-Min Song
홍 순 목*	김 인 익**	오 원 천**
Sun-Mog Hong	In-ik Kim	Won-Tchon Oh

Abstract

In this paper, optimum design of distributed detection is considered for a parallel sensor network system consisting of a fusion center and two passive sonar nodes. AND rule and OR rule are employed as the fusion rules of the sensor network. For the fusion rules, it is shown that a threshold rule of each sensor node has uniformly most powerful properties. Optimum threshold for each sensor is investigated that maximizes the probability of detection under the constraint of a specified probability of false alarm. It is also investigated through numerical experiments how signal strength, false alarm probability, and the distance between two sensor nodes affect the system detection performances.

Keywords : Distributed Detection(분산탐지), Passive Sonar(수동소나), Fusion Rule(융합규칙), Distributed Sensor Networks (분산센서망)

1. 서론

잠수함 탐지는 잠수함의 존재여부를 판단하고 결정하는 문제로서, 잠수함의 존재 그리고 존재하지 않음을 각각 가설로 하여 어느 가설이 사실인지 결정하는 이진 가설 검정 문제로 파악해 볼 수 있다. 수동 소나

망을 이용한 잠수함 탐지에서는 잠수함 방사소음을 탐지하게 되는데 그 강도를 모르기 때문에 그 값을 접이 아닌 실수구간으로 다뤄야 한다. 이는 잠수함 탐지 문제가 복합 가설 검정 문제임을 의미한다^[1,2]. 한편, 최적 분산탐지는 분산센서단과 융합센터의 최적 탐지 규칙을 유도하고 이를 바탕으로 분산탐지기를 설계하는 기술을 말한다^[3~5]. 보통 분산센서망에서는 주어진 오경보확률에 대해 탐지확률이 최대화 되도록 분산센서 노드와 융합센터의 탐지규칙을 정하게 된다. 탐지에 활용하는 잠수함 방사소음은 그 강도를 모를 뿐만 아니라 분산센서 노드 사이에 상관성을 갖고 측정

† 2009년 2월 9일 접수~2009년 3월 20일 게재승인

* 경북대학교(Kyungpook National University)

** 국방과학연구소(ADD)

책임저자 : 홍순목(smhong@ee.knu.ac.kr)

되기 때문에, 센서 노드의 측정이 서로 조건부 독립인 것을 가정하는 일반적인 분산탐지 이론을 직접 적용할 수 없다^{6,7}.

이 논문에서는 한 쌍의 수동 광대역 소나로 구성된 병렬구조 분산센서망에 적용할 수 있는 분산탐지기의 최적설계방법에 대해 검토한다. 이 분산탐지기는 융합 규칙으로 AND 규칙과 OR 규칙을 사용하였다. 이 경우 각 센서노드의 문턱값 규칙은 전체 분산센서망의 탐지확률을 최대로 하는 UMP(Uniformly Most Powerful) 임을 증명하였다. 그리고 체계의 오경보를 제한 조건으로 하였을 때, 탐지확률을 최대화하는 센서노드의 최적 문턱값이 갖는 특성을 이론적으로 검토하였다. 나아가 신호 강도, 분산센서망의 체계 오경보확률, 센서노드 사이의 간격 등이 탐지성능에 미치는 영향을 수치실험을 통해 분석하였다. 이 논문은 다음과 같이 구성된다. 2장에서는 수동소나 탐지를 모델링하고 이 모델에 기초하여 분산탐지문제를 수식화하였다. 3장에서는 융합규칙으로 AND 규칙과 OR 규칙을 사용한 경우 센서의 최적 탐지규칙이 문턱값 규칙임을 보였다. 4장에서는 센서 탐지규칙의 문턱값에 대한 최적성을 검토하고, 5장에서는 수치실험을 통해 이 규칙의 분산탐지성능을 분석하였다. 마지막으로 6장에서 결론을 맺는다.

2. 수동소나 탐지 모델 및 분산탐지 문제의 수식화

이 장에서는 수동소나 탐지 모델 및 분산탐지 문제의 수식화를 정리하였다. 수동 광대역 소나 신호처리에서 독립적인 측정 표본 개수 N 이 충분히 크고 신호와 잡음이 백색 스펙트럼을 갖는 경우, M 개의 센서배열에 대한 표적탐지의 충분통계량 Z_T 는 표적이 없다는 가설 H_0 와 표적이 존재한다는 가설 H_1 조건에서 각각 다음과 같은 분포를 갖는다⁸.

$$H_0: Z_T \sim N\left(M\frac{N}{2}F^2S_g, M^2\frac{N}{2}F^4S_g^2\right) \quad (1)$$

$$H_1: Z_T \sim N\left(M\frac{N}{2}F^2(MS_s + S_g), M^2\frac{N}{2}F^4(MS_s + S_g)^2\right) \quad (2)$$

여기서 F 는 신호처리 이득, S_s 와 S_g 는 각각 신호

와 잡음의 전력 스펙트럼 밀도를 의미한다. 이 충분통계량을 다음과 같은 변환을 통해

$$X_T = \frac{Z_T - M\frac{N}{2}F^2S_g}{M\sqrt{\frac{N}{2}F^2S_g}} \quad (3)$$

정규화(normalization) 하면

$$H_0: X_T \sim N(0,1) \quad (4)$$

$$H_1: X_T \sim N\left(M\sqrt{\frac{N}{2}}\frac{S_s}{S_g}, \left(M\frac{S_s}{S_g} + 1\right)^2\right) \quad (5)$$

이 된다.

수동 광대역 소나 분산센서 망에서 센서 i 의 신호 전력 스펙트럼 밀도를 S_{si} 로 표시하자. 단위거리(1m)에서의 측정값을 S_{s0} 로, 전송손실을 l_i 로 표시할 때, 다음의 관계를 갖게 된다.

$$S_{si} = S_{s0}l_i \quad (6)$$

여기서, 전송손실 l_i 는 표적과 센서 i 사이의 거리 r_i 의 함수로 $l_i = 1/r_i^\alpha$ 로 가정한다. α 는 전개(spreading) 형태에 따라 1에서 2사이의 값을 갖게 된다⁸. S_{s0} 는 모르는 파라미터 값으로 $M=1$ 일 때 다음과 같은 비랜덤(nonrandom) 파라미터 θ 를 정의한다.

$$\theta = \sqrt{\frac{N}{2}}\frac{S_{s0}}{S_g} \quad (7)$$

일반적으로 $S_{si}/S_g \ll 1$ 이 성립되므로 이를 가정하자. 이때 i 번째 센서의 충분 통계량을 X_{Ti} 로 표시하면, 그 분포는

$$H_0: X_{Ti} \sim N(0,1) \quad (8)$$

$$H_1: X_{Ti} \sim N(\theta l_i, 1) \quad (9)$$

이 된다.

두 개의 수동 소나센서를 이용한 경우의 분산탐지

문제는 다음과 같이 수식화해 볼 수 있다.

$$X_1 = \theta L_1 + W_1 \quad (10)$$

$$X_2 = \theta L_2 + W_2 \quad (11)$$

여기서, X_1 과 X_2 는 각각 센서 1과 센서 2의 측정값으로 위에서 정의한 충분 통계량에 해당한다. θ 는 식 (7)로 정의한 비랜덤 파라미터로 표적이 없는 경우 $\theta=0$, 표적이 있을 때 $\theta>0$ 이 된다. L_1 과 L_2 는 표적으로부터 센서 1과 센서 2까지 각각 전달되는 신호의 전송손실로 결합확률밀도함수 $f_{L_1, L_2}(l_1, l_2)$ 를 갖는다.

W_1 과 W_2 는 서로 독립적이고 확률밀도함수 $f_{W_1}(w_1)$, $f_{W_2}(w_2)$ 를 갖는 표준정규 랜덤변수이다. 물론, L_1 , L_2 에 대해서도 독립적이다.

위에서 설명한 분산탐지문제는 잡음만 존재하는 경우에 해당하는 $\theta=0$ 인 단순가설 H_0 와 표적이 존재하는 경우에 해당하는 $\theta>0$ 인 복합가설 H_1 을 판별하는 복합가설검정 문제가 된다. 즉,

$$H_0: \theta = 0 \quad (12)$$

$$H_1: \theta > 0 \quad (13)$$

이 된다.

3. 분산탐지기 설계

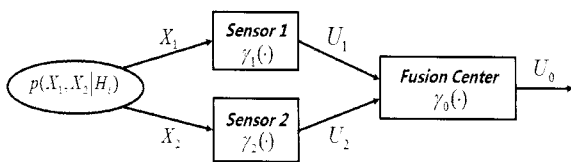


Fig. 1. 병렬형 분산탐지기

우선, Fig. 1과 같은 병렬형 분산탐지와 관련한 표현식을 정리한다. 융합센터의 이진 결정을 확률 변수 U_0 라고 표현하자. U_0 가 취한 값은 u_0 라고 표현한다. $u_0=0$ 은 가설 H_0 에 대응되고, $u_0=1$ 은 가설 H_1 에 대응된다. k 번째 센서의 결정은 확률변수 U_k 로, U_k 의

값은 0 또는 1로 u_k 로 표현한다. $\gamma_0(\mathbf{u})$ 는 두 센서의 결정 $\mathbf{u}=(u_1, u_2)$ 에 대해 $U_0=1$ 로 판단할 확률, $\gamma_k(x_k)$ 는 센서의 측정 x_k 가 주어졌을 때, $U_k=1$ 로 판단하는 확률을 표현한다. 융합규칙과 센서의 판단규칙은 집합 $\gamma=(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$ 로 표현한다. 식 (10)~(13)로 주어지는 복합가설검정 문제의 분산탐지기 설계기준으로 Neyman-Pearson 판정기준을 사용하였다. 즉, 체계의 오경보확률에 대한 제한조건 $P_f(\gamma)=\alpha_0$ 을 만족하며 다음과 같이 탐지확률을 최대화하는 γ 를 찾는 것이 된다.

$$\max_{\gamma} P_d(\gamma) \quad (14)$$

여기서, $P_d(\gamma)=\Pr(U_0=1|H_1)$ 는 탐지규칙 γ 를 사용한 경우의 탐지확률, $P_f(\gamma)=\Pr(U_0=1|H_0)$ 는 γ 를 사용한 경우의 오경보확률을 나타낸다. α_0 는 $0 < \alpha_0 < 1$ 의 범위에서 값을 갖는다.

센서의 측정 X_k 가 조건부 독립성을 만족하고 그 분포가 점질량(point mass)을 갖지 않는 경우, 두 개의 센서에 대해서는 최적 분산탐지기의 최적 융합규칙은 비랜덤화(nonrandomized)된 융합규칙이 된다^[9,10]. 하지만, 이 문제에서는 센서 측정의 조건부 독립이 성립하지 않으므로 최적 융합규칙은 랜덤화(randomized)된 형태가 될 수 있다. 그럼에도 불구하고 그 설계의 복잡성이나 실용성을 고려해 볼 때 비랜덤화 융합규칙이 이 문제에 대한 적절한 설계 방법으로 판단된다. 두 개의 센서를 이용한 분산탐지의 단조 비랜덤화 융합규칙은 AND와 OR가 되고, 이 융합규칙에 대한 센서의 최적 분산탐지 규칙은 문턱값 규칙이 된다. 이에 대한 증명은 부록 A에서 제시하였다. \bar{x}_1 , \bar{x}_2 로 각 센서의 문턱값을 표현한다. α_1 과 α_2 로 센서 1과 센서 2의 오경보확률을 표시하면 이는 각각 $\alpha_1=P(X_1 > \bar{x}_1|H_0)$, $\alpha_2=P(X_2 > \bar{x}_2|H_0)$ 이 된다. 융합규칙 AND와 OR에 대한 문턱값 규칙을 정리해 보면 다음과 같다.

AND 규칙

$$H_1: X_1 \geq \bar{x}_1 \text{ AND } X_2 \geq \bar{x}_2 \quad (15)$$

H_0 : 그 외의 경우

$$\alpha_0 = \alpha_1 \alpha_2$$

OR 규칙

$$\begin{aligned}
 H_1 : X_1 \geq \bar{x}_1 \text{ OR } X_2 \geq \bar{x}_2 \\
 H_0 : \text{그 외의 경우} \\
 \alpha_0 = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_2
 \end{aligned} \tag{16}$$

이 결과는 다음과 같이 정리 1로 기술할 수 있다.

정리 1 : 식 (10)~(13)으로 정의되는 분산탐지문제에 대해 AND 규칙 식 (15)와 OR 규칙 식 (16)은 UMP탐지특성을 갖는다.

이 정리는 주어진 오경보확률 α_0 에 대해 그리고 모든 $\theta > 0$ 에 대해 AND 규칙과 OR 규칙이 각각 탐지확률 P_d 를 최대화하는 UMP 특성을 가짐을 의미한다. 부록 A에서는 융합규칙 AND와 OR에 대한 센서의 최적 분산탐지 규칙이 문턱값 규칙이라는 것과 함께, 주어진 α_1 과 α_2 에 대해서 각 센서의 탐지기가 각각 UMP 특성을 가짐을 증명하여, 그 결과로 식 (15), (16)의 분산 탐지기 역시 UMP 특성을 가짐을 증명하였다.

식 (15)로 정의되는 AND 규칙의 융합센터 탐지확률은

$$P_d(\theta) = E_{L_1, L_2} [Q(\bar{x}_1 - \theta L_1) Q(\bar{x}_2 - \theta L_2)] \tag{17}$$

이 된다(부록 A 참조). 여기서 $Q(\bar{x}_1 - \theta l_1) = \int_{x_1 \geq \bar{x}_1} f_{W_1}(x_1 - \theta l_1) dx_1$, $Q(\bar{x}_2 - \theta l_2) = \int_{x_2 \geq \bar{x}_2} f_{W_2}(x_2 - \theta l_2) dx_2$ 이다. 식 (17)의 탐지확률은 주어진 α_1 과 α_2 값에 대해 결합확률밀도함수 $f_{L_1, L_2}(l_1, l_2)$ 에 관계없이 최대값을 갖게 된다.

식 (16)으로 정의되는 OR 규칙의 융합센터 탐지확률은

$$P_d(\theta) = 1 - E_{L_1, L_2} [\phi(\bar{x}_1 - \theta L_1) \phi(\bar{x}_2 - \theta L_2)] \tag{18}$$

이 된다(부록 A 참조). 여기서 $\phi(\bar{x}_1 - \theta l_1) = \int_{x_1 < \bar{x}_1} f_{W_1}(x_1 - \theta l_1) dx_1$, $\phi(\bar{x}_2 - \theta l_2) = \int_{x_2 < \bar{x}_2} f_{W_2}(x_2 - \theta l_2) dx_2$ 이다.

dx_2 이다. 식 (18)의 탐지확률 역시 주어진 α_1 과 α_2 값에 대해 $f_{L_1, L_2}(l_1, l_2)$ 에 관계없이 최대값을 갖게 된다.

4. 분산탐지기 문턱값의 최적성

융합센터의 탐지확률은 식 (17), (18)에서 확인할 수 있듯이 파라미터 θ , 확률분포 $f_{L_1, L_2}(l_1, l_2)$, 문턱값 \bar{x}_1 , \bar{x}_2 의 함수이다. 물론 \bar{x}_1 , \bar{x}_2 는 융합규칙과 α_0 값에 종속된다. 따라서 최적 분산탐지기 설계는 융합규칙과 α_0 값, θ , $f_{L_1, L_2}(l_1, l_2)$ 가 주어진 경우에 P_d 를 최대화하는 문턱값 \bar{x}_1 , \bar{x}_2 (또는 α_1 , α_2)를 결정하는 문제라 할 수 있다. 먼저, 전송손실 l_1 , l_2 의 확률분포에 대해 다음과 같은 가정을 한다.

가정 1 : $l_1, l_2 > 0$ 을 만족하는 모든 l_1 , l_2 에 대해 $f_{L_1, L_2}(l_1, l_2) = f_{L_1, L_2}(l_2, l_1)$ 라고 가정한다.

이 가정은 각 센서의 전송손실의 분포가 l_1 , l_2 의 평면 위에서 $l_1 = l_2$ 선분을 중심으로 대칭임을 의미하고, 이 경우 $f_{L_1, L_2}(l_1, l_2) = f_{L_2, L_1}(l_2, l_1)$, $f_{L_1}(l) = f_{L_2}(l)$ 의 관계를 갖게 된다. 가정 1은 각 센서에서 표적까지의 거리분포의 결합밀도함수가 $f_{R_1, R_2}(r_1, r_2) = f_{R_2, R_1}(r_2, r_1)$ 와 같이 대칭적이고, 센서의 위치에 관계없이 전송손실이 거리에 의해 결정될 때 성립한다.

각 융합규칙에 대한 최적의 문턱값을 구해보기 위해 다음과 같은 전송손실분포를 갖는 간단한 경우를 고려해 보자.

$$f_{L_1, L_2}(l_1, l_2) = \frac{1}{2} [\delta(l_1 - \bar{l}_1, l_2 - \bar{l}_2) + \delta(l_1 - \bar{l}_2, l_2 - \bar{l}_1)] \tag{19}$$

이 경우, AND 규칙의 P_d 는

$$P_d = \frac{1}{2} [Q(\bar{x}_1(\alpha_1) - \theta \bar{l}_1) Q(\bar{x}_2(\alpha_2) - \theta \bar{l}_2) + Q(\bar{x}_1(\alpha_1) - \theta \bar{l}_2) Q(\bar{x}_2(\alpha_2) - \theta \bar{l}_1)] \tag{20}$$

이고, OR 규칙의 P_d 는

$$P_d = 1 - \frac{1}{2} \left[\phi(\bar{x}_1(\alpha_1) - \theta\bar{l}_1) \phi(\bar{x}_2(\alpha_2) - \theta\bar{l}_2) + \phi(\bar{x}_1(\alpha_1) - \theta\bar{l}_2) \phi(\bar{x}_2(\alpha_2) - \theta\bar{l}_1) \right] \quad (21)$$

이 된다.

이때 AND 규칙의 식 (20)을 α_1 에 대해 미분한 식은

$$\begin{aligned} \frac{dP_d}{d\alpha_1} &= \frac{1}{2} \left[\frac{f_W(\bar{x}_1 - \theta\bar{l}_1)}{f_W(\bar{x}_1)} Q(\bar{x}_2 - \theta\bar{l}_2) - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{f_W(\bar{x}_2 - \theta\bar{l}_2)}{f_W(\bar{x}_2)} Q(\bar{x}_1 - \theta\bar{l}_1) \right. \\ &\quad \left. + \frac{f_W(\bar{x}_1 - \theta\bar{l}_2)}{f_W(\bar{x}_1)} Q(\bar{x}_2 - \theta\bar{l}_1) - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{f_W(\bar{x}_2 - \theta\bar{l}_1)}{f_W(\bar{x}_2)} Q(\bar{x}_1 - \theta\bar{l}_2) \right] \quad (22) \end{aligned}$$

이 된다. 여기서 f_W 는 표준정규분포의 확률밀도함수를 표시한다. OR 규칙의 식 (21)을 α_1 에 대해 미분한 식은

$$\begin{aligned} \frac{dP_d}{d\alpha_1} &= \frac{1}{2} \left[\frac{f_W(\bar{x}_1 - \theta\bar{l}_1)}{f_W(\bar{x}_1)} \phi(\bar{x}_2 - \theta\bar{l}_2) - \frac{1 - \alpha_2}{1 - \alpha_1} \frac{f_W(\bar{x}_2 - \theta\bar{l}_2)}{f_W(\bar{x}_2)} \phi(\bar{x}_1 - \theta\bar{l}_1) \right. \\ &\quad \left. + \frac{f_W(\bar{x}_1 - \theta\bar{l}_2)}{f_W(\bar{x}_1)} \phi(\bar{x}_2 - \theta\bar{l}_1) - \frac{1 - \alpha_2}{1 - \alpha_1} \frac{f_W(\bar{x}_2 - \theta\bar{l}_1)}{f_W(\bar{x}_2)} \phi(\bar{x}_1 - \theta\bar{l}_2) \right] \quad (23) \end{aligned}$$

이 된다. 이 두 식은 $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$ 인 점에서 그 값이 항상 0이 된다. 따라서 이 점은 AND 규칙과 OR 규칙에 대해 정류점(stationary point)이 된다. 이 점에서 AND 규칙은 국소 최소(local minimum) 또는 국소 최대(local maximum) 값을 가지게 된다. OR 규칙의 경우는 이 점에서 항상 국소 최대가 된다. 이것은 식 (21)을 α_1 에 대해 두 번 미분한 값이 이 점에서 음이 됨을 증명함으로써 확인할 수 있다. 이 증명은 부록 B에 수록하였다.

위의 결과는 가정 1을 만족하는 일반적인 결합밀도 함수 $f_{L_1, L_2}(l_1, l_2)$ 에 대해서도 성립함을 보일 수 있다. 우선 가정 1을 만족하는 모든 결합밀도함수 $f_{L_1, L_2}(l_1, l_2)$ 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$f_{L_1, L_2}(l_1, l_2) = \frac{1}{2} [f_{L_1, L_2}(l_1, l_2) + f_{L_1, L_2}(l_2, l_1)] \quad (24)$$

이 경우 AND 규칙의 탐지확률 식 (17)은

$$P_d(\theta) = \frac{1}{2} E_{L_1, L_2} \left[Q(\bar{x}_1(\alpha_1) - \theta L_1) Q(\bar{x}_2(\alpha_2) - \theta L_2) + Q(\bar{x}_1(\alpha_1) - \theta L_2) Q(\bar{x}_2(\alpha_2) - \theta L_1) \right] \quad (25)$$

로, OR 규칙의 탐지확률 식 (18)은

$$P_d(\theta) = 1 - \frac{1}{2} E_{L_1, L_2} \left[\phi(\bar{x}_1(\alpha_1) - \theta L_1) \phi(\bar{x}_2(\alpha_2) - \theta L_2) + \phi(\bar{x}_1(\alpha_1) - \theta L_2) \phi(\bar{x}_2(\alpha_2) - \theta L_1) \right] \quad (26)$$

로 표현할 수 있다. 이 결과는 확률변수 L_1, L_2 에 대해 기댓값(expectation)이 취해진 것 이외에는 식 (20), (21)과 동일하다. 식 (25), (26)의 기댓값 안의 함수는 α_1 에 대해 미분가능하므로 미분과 기댓값의 순서는 바꿀 수 있다. 이에 따라 식 (19)의 분포에 대해 성립하는 위의 결과는 가정 1을 만족하는 일반적인 전송 손실 분포에 대해서도 성립하게 된다. 이러한 검토를 정리해보면 다음과 같다.

정리 2 : 식 (10)~(13)으로 정의되는 분산탐지문제에 대해 가정 1이 성립한다고 하자. 이때 식 (15)의 AND 규칙과 식 (16)의 OR 규칙에 대해 동일한 문턱값 ($\bar{x}_1 = \bar{x}_2$)은 탐지확률 P_d 의 정류점이 된다. OR 규칙에 대해 이 점은 국소 최대점이 된다.

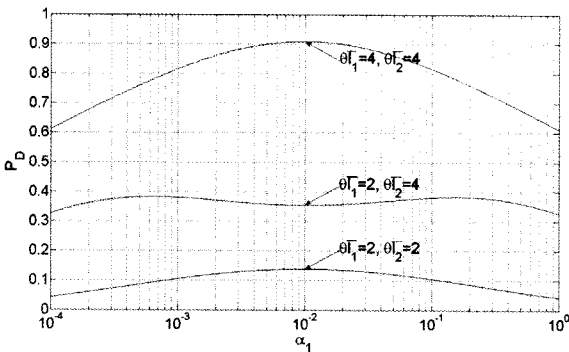
5. 수치실험

두 개의 센서를 이용하여 표적을 탐지하는 분산탐지기의 특성을 알아보기 위하여 수치실험을 수행하였다. 특히, 신호 강도, 분산센서망의 체계 오경보확률, 센서노드 사이의 간격 등이 최적 문턱값 및 탐지성능에 미치는 영향을 분석하였다. 융합규칙은 AND 규칙과 OR 규칙을 사용하였다. 우선 Fig. 2는 $\alpha_0 = 10^{-4}$ 일 때 식 (19)의 확률밀도함수 $f_{L_1, L_2}(l_1, l_2)$ 가 네 가지 $\theta\bar{l}_1, \theta\bar{l}_2$ 쌍 ($\{\theta\bar{l}_1, \theta\bar{l}_2\} = \{2, 2\}, \{2, 4\}, \{4, 2\}, \{4, 4\}$)을 파라미터로 갖는 경우에 대하여 각각 α_1 의 변화에 대한 P_d 값을 보여준다. Fig. 2.(a)는 AND 규칙, Fig. 2.(b)

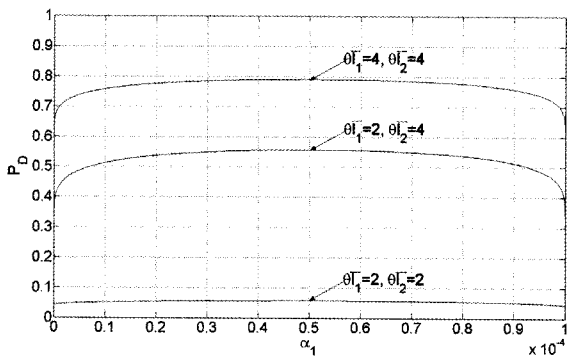
는 OR 규칙에 대한 것이다. 이 그림은 AND 규칙과 OR 규칙 모두 $\alpha_1 = \alpha_2$ 가 되는 α_1 값을 중심으로 P_d 가 대칭임을 보여준다. 정리 2에서 보인 바와 같이 이 점은 정류점이 된다. 이 점에서 OR 규칙의 경우 P_d 는 최대가 된다. 하지만 AND 규칙의 경우 두 센서의 신호가 같은 크기($\theta_{l_1} = \theta_{l_2}$)일 때는 최대가 되었지만, $\{\theta_{l_1}, \theta_{l_2}\} = \{2, 4\}$ 또는 $\{4, 2\}$ 인 경우 최소가 되었다. $\{\theta_{l_1}, \theta_{l_2}\} = \{2, 4\}$ 와 $\{4, 2\}$ 인 경우 동일한 P_d 값을 가지므로 Fig. 2에서는 $\{\theta_{l_1}, \theta_{l_2}\} = \{2, 4\}$ 인 경우만 포함시켰다. $\theta_{l_1} = \theta_{l_2} = 2$ 또는 4일 때 OR 규칙보다 AND 규칙에서 P_d 의 최댓값이 조금 더 컸다. $\{\theta_{l_1}, \theta_{l_2}\} = \{2, 4\}$ 일 때는 OR 규칙이 AND 규칙의 경우보다 더 컸다. Fig. 2의 결과를 보면 비슷한 크기의 입력신호에 대해 동일한 탐지 문턱값($\alpha_1 = \alpha_2$)을 사용하는 경우 AND 규칙이 더 좋은 탐지 성능을 보인다. 이 실험에서는 분명치 않지만 입력신호의 크기가 서로 크

게 다른 경우 일반적으로 OR 규칙이 더 나은 성능을 가짐을 이 후 실험에서 확인해 볼 수 있다.

Fig. 3은 주어진 오경보확률 α_0 에 대해 두 융합규칙의 탐지확률을 겹쳐 그린 것으로 회색 영역은 AND 규칙이 OR 규칙보다 더 높은 탐지확률을 가지는 영역을 나타낸다. 이 그림에서 알 수 있듯이 두 센서의 신호가 아주 크거나(예를 들어, Fig. 3.(b)에서 $\theta_{l_1} > 6$, $\theta_{l_2} > 6$ 인 경우), 한쪽 센서의 신호가 다른 쪽 센서의 신호보다 몇 배 큰 신호가 들어온 경우(예를 들어, $\theta_{l_1} < 1$, $\theta_{l_2} > 3$ 일 때)에는 OR 규칙이 더 높은 P_d 를 가지게 된다. 그리고 두 신호의 크기가 비슷 경우(예를 들어, $\theta_{l_1} = 3$, $\theta_{l_2} = 3$ 일 때)이거나 두 신호가 아주 미약한 경우($\theta_{l_1} \approx 0$, $\theta_{l_2} \approx 0$)에는 AND 규칙이 OR 규칙에 비해 더 높은 P_d 를 가지게 된다는 것을 알 수 있다.

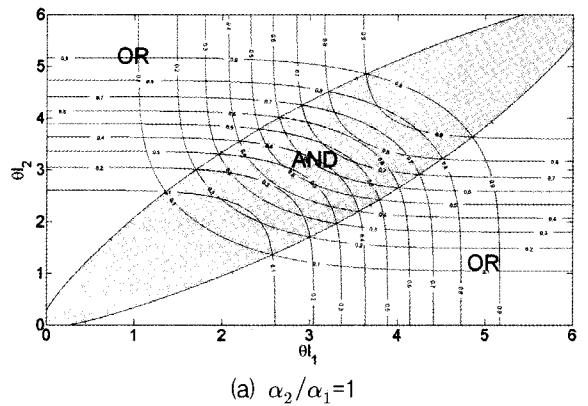


(a) AND 규칙

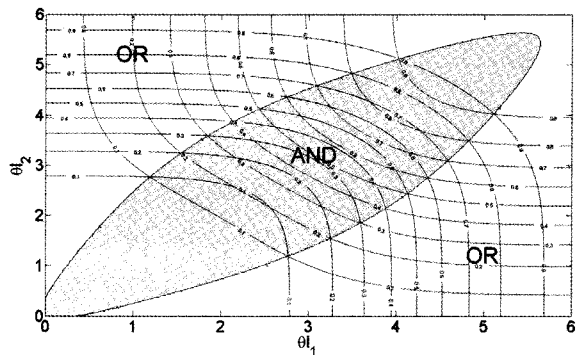


(b) OR 규칙

Fig. 2. $\alpha_0 = 10^{-4}$ 일 때 α_1 의 변화에 대한 P_d



(a) $\alpha_2/\alpha_1 = 1$



(b) $\alpha_2/\alpha_1 = 100$

Fig. 3. 신호의 세기(θ_{l_1} , θ_{l_2})에 대한 적절한 융합규칙 ($\alpha_0 = 10^{-4}$).

두 센서의 오경보확률의 비율 α_2/α_1 이 클수록(α_1 과 α_2 의 차이가 클수록) AND 규칙이 높은 탐지확률을 갖는 영역은 넓어졌다. 이때 AND 규칙의 성능은 θ_{l_1} , θ_{l_2} 가 서로 다른 영역에서 조금 개선되지만, θ_{l_1} , θ_{l_2} 가 서로 같은 영역에서의 성능은 떨어지게 된다.

Fig. 4~6은 신호강도를 각각 ($\theta_{l_1}=2, \theta_{l_2}=2$), ($\theta_{l_1}=2, \theta_{l_2}=4$), ($\theta_{l_1}=4, \theta_{l_2}=4$)로 했을 때, 두 개

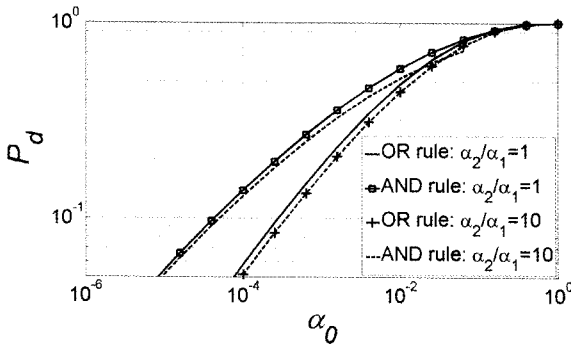


Fig. 4. $\theta_{l_1}=2, \theta_{l_2}=2$ 인 경우 ROC 곡선

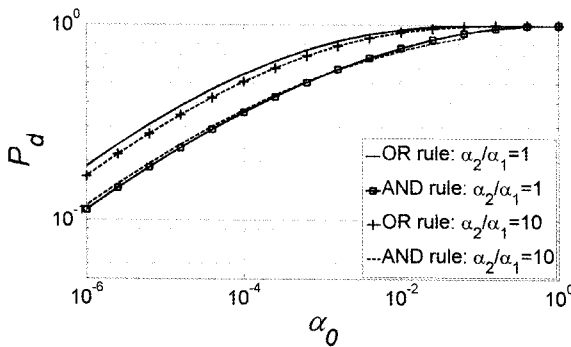


Fig. 5. $\theta_{l_1}=2, \theta_{l_2}=4$ 인 경우 ROC 곡선

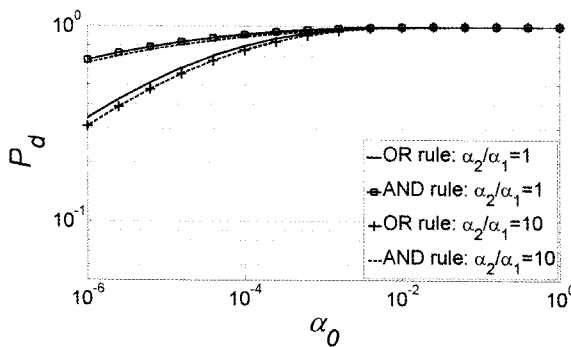


Fig. 6. $\theta_{l_1}=4, \theta_{l_2}=4$ 인 경우 ROC 곡선.

의 센서에 같은 문턱값($\alpha_1 = \alpha_2$)을 사용한 경우와 서로 다른 문턱값($\alpha_2/\alpha_1 = 10$)을 사용한 경우에 대해 AND 규칙과 OR 규칙의 ROC(receiver operating characteristic) 곡선을 그렸다. 모든 경우 α_0 가 증가함에 따라 P_d 가 커짐을 알 수 있다. Fig. 5는 각 센서의 신호강도가 다른 경우 OR 규칙이 AND 규칙보다 탐지확률이 더 높은 것을 보여준다. 이 결과는 Fig. 2와 Fig. 3의 수치실험 결과와 일치한다. 반대로 Fig. 4와 Fig. 6과 같이 센서 신호강도가 같은 경우 융합센서의 오경보확률이 낮을 때 AND 규칙이 OR 규칙보다 탐지확률이 더 높았다. 이 결과 역시 Fig. 2와 3의 수치실험 결과와 일치한다. 대체로 각 센서의 문턱값이 같은 경우가 문턱값이 다른 경우에 비해 탐지확률이 높았다. 예외적으로 Fig. 5에서 AND 규칙은 낮은 α_0 에 대해 다른 문턱값의 경우 더 높은 탐지확률을 보이는 경우가 있었다. 이러한 현상은 Fig. 2.(a)에서도 관측된 바 있다.

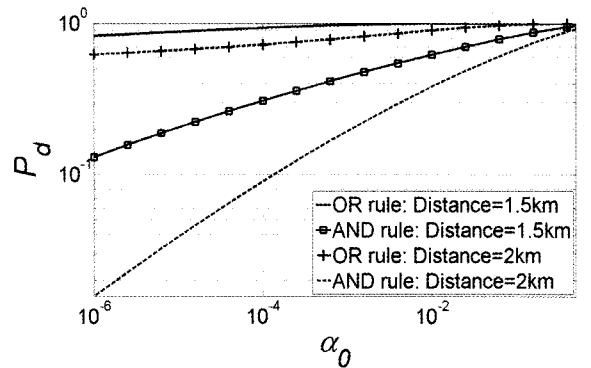


Fig. 7. 표적이 선분 위에 균일하게 분포하는 경우의 ROC 곡선

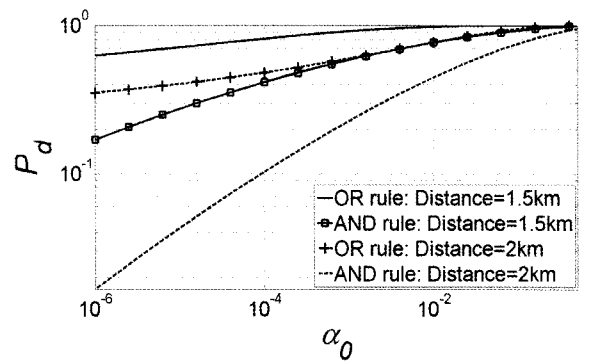


Fig. 8. 표적이 마름모 위에 균일하게 분포하는 경우의 ROC 곡선

표적이 공간적 분포를 갖는 경우에 대해서도 각 융합규칙의 탐지확률을 구함으로써 각 규칙의 성능을 비교하였다. 우선 표적 잠수함의 방사소음은 신행 잠수함을 기준으로 120dB로 하였다. 그리고 주변 잡음은 일반적인 천해 환경에서의 방사소음인 70dB로, 센서의 샘플링 수 N 을 1024라고 하였을 때, 표적 신호의 크기를 나타내는 비랴덤 파라미터 $\theta=2.26 \times 10^6$ 이 된다. 이 표적이 천해(수심 500m)의 환경에서 수심 200m로 잠항하였을 때, 해저에 설치된 두 개의 센서로 탐지하는 경우를 가정한다. 두 센서의 감시영역에 대해 다음 두 가지 경우로 실험해 보았다.

먼저 두 센서의 감시영역을 두 센서 수직 300m 위의 점을 잇는 선분 위에서 표적이 균일하게 분포한다고 가정하였다. 또 다른 실험에서는 두 센서의 감시영역을 두 센서 수직 300m 위의 각 점을 꼭지점으로 하고 이 센서를 잇는 직선에 대해 $\pm 30^\circ$ 각을 갖는 마름모 형태일 때 표적은 이 평면에서 균일하게 분포한다고 가정하였다. 센서간의 거리는 1.5km와 2km로 하였다.

위의 환경에서 AND 규칙과 OR 규칙 모두 동일 문턱값($\alpha_1 = \alpha_2$)을 사용하는 경우 10,000번의 Monte Carlo 시뮬레이션을 통해 α_0 의 변화에 대한 P_d 의 변화를 얻었다. 이 결과는 표적이 선분 위에 분포하는 경우는 Fig. 7에, 그리고 마름모 위에 분포하는 경우는 Fig. 8에 제시하였다. 쉽게 예견할 수 있듯이 두 경우 모두 센서 간 간격이나 융합 센터의 오경보확률이 작아짐에 따라 탐지확률이 떨어졌다. OR 규칙은 거리와 관계없이 AND 규칙에 비해 훨씬 높은 탐지성능을 보였다. 또한 거리가 멀어짐에 따라 OR 규칙보다 AND 규칙에서 융합 센터의 탐지확률이 더 많이 낮아지는 것을 보였다. Fig. 7과 Fig. 8의 결과를 비교했을 때 AND 규칙은 마름모 분포에서 더 높은 탐지확률을 보였다. 이것은 표적이 비슷한 신호강도를 갖는 확률이 마름모 분포의 경우 더 높고 신호 강도가 크게 다를 확률이 상대적으로 작기 때문이다. 센서간 거리가 2.5 km 보다 더 큰 경우는 앞과 다른 결과가 나타날 수 있다. 즉, 신호강도가 동시에 작은 값을 가질 확률이 마름모 분포가 선 위에 분포하는 경우보다 크기 때문에 마름모 분포에서 탐지확률이 작아질 수 있다. OR 규칙의 경우는 마름모 분포가 선 위에 분포하는 경우보다 탐지확률이 작았다. 이것은 OR 규칙의 경우 신호강도의 차이와 관계없이 어느 한 쪽의 신호강도가 크면 높은 탐지확률을 보이는데 마름모 분포는 두 신

호강도 자체가 작을 확률이 더 높기 때문이다. 일반적인 감시환경에서 위의 실험 결과는 OR 규칙이 훨씬 효과적인 융합규칙임을 설명해 준다.

6. 결론

이 논문에서는 한 쌍의 수동 광대역 소나로 구성된 병렬구조 분산센서망에 적용할 수 있는 분산탐지기의 최적설계방법에 대해 검토하였다. 우선 수동소나 탐지를 모델링하고 이 모델에 기초하여 분산탐지문제를 수식화하여 제시하였다. 융합규칙으로 AND 규칙과 OR 규칙을 사용한 경우에 대해 각 센서노드의 문턱값 규칙이 전체 분산센서망의 탐지확률을 최대로 하는 UMP임을 증명하였다. 그리고 체계의 오경보확률을 제한 조건으로 하였을 때, OR 규칙의 경우 동일한 문턱값이 탐지확률을 국소 최대화함을 증명하였다. 나아가 신호 강도, 분산센서망의 체계 오경보확률, 센서노드 사이의 간격 등이 최적 문턱값 및 탐지성능에 미치는 영향을 수치실험을 통해 분석하였다.

수치실험을 통해 같은 오경보 조건에서 한쪽 센서의 신호가 다른 쪽 센서의 신호보다 훨씬 큰 신호가 들어온 경우에는 OR 규칙이, 그리고 두 신호의 크기가 비슷한 경우와 두 신호가 아주 미약한 경우에는 AND 규칙이 더 높은 탐지확률을 가짐을 확인할 수 있었다. 일반적인 감시환경에서는 OR 규칙이 훨씬 더 효과적인 융합규칙임도 확인하였다. 앞으로 이 논문의 결과를 다수의 센서에 대해 확장하는 연구를 수행할 계획이다. 나아가 제한 조건을 오경보확률 대신 센서망의 소모전력으로 하여 전력효율을 고려한 분산탐지기 설계문제에 대한 연구도 수행할 계획이다.

후 기

본 연구는 방위사업청과 국방과학연구소의 지원으로 수행되었습니다.(계약번호 UD070054AD)

Reference

- [1] H. L. van Trees, Detection, Estimation and Modulation Theory, Part I, New York, Wiley, 1968.

[2] H. V. Poor, An Introduction to Signal Detection and Estimation, 2nd ed., New York, Springer-Verlag, 1994.

[3] P. K. Varshney, Distributed Detection and Data Fusion, New York, Springer-Verlag, 1996.

[4] J. N. Tsitsiklis, "Decentralized Detection", in Advances in Statistical Signal Processing - Vol. 2 : Signal Detection, H. V. Poor and J. B. Thomas, Eds. Greenwich, CT, JAI, 1993.

[5] R. Viswanathan and P. K. Varshney, "Distributed Detection with Multiplesors : Part I - Fundamentals", Proceedings of the IEEE, Vol. 85, No. 1, pp. 54 ~63, Jan. 1997.

[6] R. S. Blum and S. A. Kassam, "Optimum Distributed Detection of Weak Signals in Dependent Sensors", IEEE Trans. Inform. Theory, Vol. 38, No. 3, pp. 1066 ~1079, May. 1992.

[7] R. S. Blum, S. A. Kassam and H. V. Poor, "Distributed Detection with Multiple Sensors : Part II - Advanced Topics", Proceedings of the IEEE, Vol. 85, No. 1, pp. 64 ~79, Jan. 1997.

[8] R. O. Nielsen, Sonar Signal Processing, Norwood, MA, Artech House, 1991.

[9] P. Willett and D. Warren, "The Suboptimality of Randomized Tests in Distributed and Quantized Detection Systems", IEEE Trans. Inform. Theory, Vol. 38, pp. 355 ~361, Mar. 1992.

[10] Y. I. Han and T. Kim, "Randomized Fusion Rules Can be Optimal in Distributed Neyman-Pearson Detectors", IEEE Trans. Inform. Theory, Vol. 43, pp. 1281 ~1288, July 1997.

[11] D. F. Barrow and A. C. Cohen, "On Some Functions Involving Mill's Ratio", Ann. Math. Statist., Vol. 25, No. 2, pp. 405 ~408, 1954.

부록 A. 정리 1 증명(문턱값 규칙의 최적성)

2장에서 언급하였듯이, L_1 과 L_2 는 표적으로 부터 센서 1과 센서 2까지 각각 전달되는 신호의 전송손실로 결합 확률밀도함수 $f_{L_1, L_2}(l_1, l_2)$ 를 갖는다. W_1 과 W_2 는 서로 독립적이고 확률밀도함수 $f_{W_1}(w_1)$, $f_{W_2}(w_2)$ 를 갖는 표준정규 랜덤변수이고, L_1 , L_2 에 대해서도

독립적이다. 우선, θ 는 0보다 큰 일정한 값을 갖는다고 가정하자. 이때,

$$\begin{aligned} & f_{X_1, X_2}(x_1, x_2 | \theta) \\ &= \int_{l_1} \int_{l_2} f_{W_1, W_2}(x_1 - \theta l_1, x_2 - \theta l_2) f_{L_1, L_2}(l_1, l_2) dl_2 dl_1 \\ &= \int_{l_1} \int_{l_2} f_{W_1}(x_1 - \theta l_1) f_{W_2}(x_2 - \theta l_2) f_{L_1, L_2}(l_1, l_2) dl_2 dl_1 \end{aligned} \tag{A.1}$$

가 된다. 아래에서 집합 $Z_{1,2}$ 는 $(x_1, x_2) | \gamma_0(x_1, x_2)=1, Z_k, k=1, 2$ 는 $x_k | \gamma_k(x_k)=1$ 를 의미한다.

A.1 AND 융합규칙

AND 융합규칙에 대한 융합센서의 탐지확률은

$$\begin{aligned} & P_d(\theta) \\ &= \iint_{Z_{1,2}} \left[\int_{l_1} \int_{l_2} f_{W_1}(x_1 - \theta l_1) f_{W_2}(x_2 - \theta l_2) \right. \\ & \quad \left. \times f_{L_1, L_2}(l_1, l_2) dl_2 dl_1 \right] dx_1 dx_2 \end{aligned} \tag{A.2}$$

이 된다. 적분 순서를 바꾸면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & P_d(\theta) \\ &= \int_{l_1} \int_{l_2} \left[\iint_{Z_{1,2}} f_{W_1}(x_1 - \theta l_1) f_{W_2}(x_2 - \theta l_2) dx_1 dx_2 \right] f_{L_1, L_2}(l_1, l_2) dl_2 dl_1 \\ &= E_{L_1, L_2} \left[\iint_{Z_{1,2}} f_{W_1}(x_1 - \theta L_1) f_{W_2}(x_2 - \theta L_2) dx_1 dx_2 \right] \end{aligned}$$

이 식은 분산탐지에서 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} & P_d(\theta) \\ &= E_{L_1, L_2} \left[\int_{Z_1} f_{W_1}(x_1 - \theta L_1) dx_1 \int_{Z_2} f_{W_2}(x_2 - \theta L_2) dx_2 \right] \end{aligned} \tag{A.3}$$

센서 1에 오경보확률이 $\alpha_1(\alpha_1 = \int_{Z_1} f_{W_1}(x_1) dx_1)$ 으로 주어졌을 때, 문턱값에 의해 결정되는 탐지영역 $Z_1 = \{x_1 \geq \bar{x}_1\}$ 은 $l_1(l_1 > 0)$ 값에 상관없이 $\int_{Z_1} f_{W_1}(x_1 - \theta l_1) dx_1$ 을 최대화하게 된다. 즉, 문턱값 규칙 $x_1 \geq \bar{x}_1$ 은 센서 1에 대해 most powerful 특성을 갖게 된다. 마찬가지로, 센서 2에 오경보확률이 $\alpha_2(\alpha_2 = \int_{Z_2} f_{W_2}(x_2) dx_2)$ 로 주어졌을 때, 문턱값에 의해 결정되는 탐지영역 $Z_2 = \{x_2 \geq \bar{x}_2\}$ 은 $l_2(l_2 > 0)$ 값에 상관없이

$\int_{\bar{z}_2} f_{W_2}(x_2 - \theta l_2) dx_2$ 을 최대화하여, 문턱값 규칙 $x_2 \geq \bar{x}_2$ 은 센서 2에 대해 역시 most powerful 특성을 갖게 된다.

0보다 큰 일정한 값을 갖는 θ 에 대해 문턱값 규칙을 적용하면 식 (A.3)의 탐지확률은

$$P_d(\theta) = E_{L_1, L_2} [Q(\bar{x}_1 - \theta L_1) Q(\bar{x}_2 - \theta L_2)] \quad (A.4)$$

이 된다. 여기서 $Q(\bar{x}_1 - \theta l_1) = \int_{x_1 \geq \bar{x}_1} f_{W_1}(x_1 - \theta l_1) dx_1$, $Q(\bar{x}_2 - \theta l_2) = \int_{x_2 \geq \bar{x}_2} f_{W_2}(x_2 - \theta l_2) dx_2$ 이다. 이 $Q(\bar{x}_1 - \theta l_1)$, $Q(\bar{x}_2 - \theta l_2)$ 는 l_1 , l_2 에 관계없이 각각 α_1 과 α_2 값에 대해 최대값을 갖고, 이는 AND 규칙 분산탐지기 식 (15)가 모든 $\theta > 0$ 에 대해 탐지확률 식 (A.3)을 최대화하므로 UMP 탐지기가 됨을 의미한다.

A.2 OR 규칙

OR 규칙에 대한 융합센서의 탐지확률은

$$P_d(\theta) = 1 - \iint_{\bar{z}_1, \bar{z}_2} \left[\int_{l_1} \int_{l_2} f_{W_1}(x_1 - \theta l_1) f_{W_2}(x_2 - \theta l_2) \times f_{L_1, L_2}(l_1, l_2) dl_2 dl_1 \right] dx_1 dx_2 \quad (A.5)$$

이 된다. 적분 순서를 바꾸면 다음과 같다.

$$P_d(\theta) = 1 - \int_{l_1} \int_{l_2} \left[\iint_{\bar{z}_1, \bar{z}_2} f_{W_1}(x_1 - \theta l_1) f_{W_2}(x_2 - \theta l_2) dx_1 dx_2 \right] f_{L_1, L_2}(l_1, l_2) dl_2 dl_1$$

$$= 1 - E_{L_1, L_2} \left[\iint_{\bar{z}_1, \bar{z}_2} f_{W_1}(x_1 - \theta L_1) f_{W_2}(x_2 - \theta L_2) dx_1 dx_2 \right]$$

이 식은 분산탐지에서 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$P_d(\theta) = 1 - E_{L_1, L_2} \left[\int_{\bar{z}_1} f_{W_1}(x_1 - \theta L_1) dx_1 \int_{\bar{z}_2} f_{W_2}(x_2 - \theta L_2) dx_2 \right] \quad (A.6)$$

센서 1에 오경보확률이 α_1 ($\alpha_1 = \int_{\bar{z}_1} f_{W_1}(x_1) dx_1 = 1 - \int_{\bar{z}_1} f_{W_1}(x_1) dx_1$)으로 주어졌을 때, 문턱값에 의해 결정되는 탐지영역 $Z_1 = \{x_1 \geq \bar{x}_1\}$ 은 l_1 ($l_1 > 0$)값에

상관없이 $\int_{\bar{z}_1} f_{W_1}(x_1 - \theta l_1) dx_1$ 을 최소화하게 된다. 즉, 문턱값 규칙 $x_1 \geq \bar{x}_1$ 은 센서 1에 대해 most powerful 특성을 갖게 된다. 마찬가지로, 센서 2에 오경보확률이 α_2 ($\alpha_2 = \int_{\bar{z}_2} f_{W_2}(x_2) dx_2 = 1 - \int_{\bar{z}_2} f_{W_2}(x_2) dx_2$)로 주어졌을 때, 문턱값에 의해 결정되는 탐지영역 $Z_2 = \{x_2 \geq \bar{x}_2\}$ 은 l_2 ($l_2 > 0$)값에 상관없이 $\int_{\bar{z}_2} f_{W_2}(x_2 - \theta l_2) dx_2$ 을 최소화하고, 문턱값 규칙 $x_2 \geq \bar{x}_2$ 은 센서 2에 대해 역시 most powerful 특성을 갖게 된다.

0보다 큰 일정한 값을 갖는 θ 에 대해 문턱값 규칙을 적용하면 식 (A.6)의 탐지확률은

$$P_d(\theta) = 1 - E_{L_1, L_2} [\phi(\bar{x}_1 - \theta L_1) \phi(\bar{x}_2 - \theta L_2)] \quad (A.7)$$

이 된다. 여기서 $\phi(\bar{x}_1 - \theta l_1) = \int_{x_1 < \bar{x}_1} f_{W_1}(x_1 - \theta l_1) dx_1$, $\phi(\bar{x}_2 - \theta l_2) = \int_{x_2 < \bar{x}_2} f_{W_2}(x_2 - \theta l_2) dx_2$ 이다. 이 $\phi(\bar{x}_1 - \theta l_1)$, $\phi(\bar{x}_2 - \theta l_2)$ 는 l_1 , l_2 에 관계없이 각각 α_1 과 α_2 값에 대해 최소값을 갖고, 이는 OR 규칙 분산탐지기 식 (16)이 모든 $\theta > 0$ 에 대해 탐지확률 식 (A.6)을 최대화하므로 UMP 탐지기가 됨을 의미한다.

부록 B. 동일 문턱값에 대한 OR 규칙 탐지확률의 오목성(concavity) 증명

4장의 식 (23)을 α_1 에 대해 미분하면 다음과 같다.

$$\frac{d^2 P_d}{d\alpha_1^2} = \frac{1}{2} \frac{d}{d\alpha_1} \left[\frac{f_{W_1}(\bar{x}_1 - \theta l_1)}{f_{W_1}(\bar{x}_1)} \phi(\bar{x}_2 - \theta l_2) - \frac{\phi(\bar{x}_2) f_{W_2}(\bar{x}_2 - \theta l_2)}{\phi(\bar{x}_1) f_{W_2}(\bar{x}_2)} \phi(\bar{x}_1 - \theta l_1) + \frac{f_{W_1}(\bar{x}_1 - \theta l_2)}{f_{W_1}(\bar{x}_1)} \phi(\bar{x}_2 - \theta l_1) - \frac{\phi(\bar{x}_2) f_{W_2}(\bar{x}_2 - \theta l_1)}{\phi(\bar{x}_1) f_{W_2}(\bar{x}_2)} \phi(\bar{x}_1 - \theta l_2) \right] \quad (B.1)$$

비교적 긴 산술적 과정을 통해 식 (B.1)이 $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$ 일 때 다음과 같은 관계를 가짐을 확인할 수 있다.

$$\frac{d^2 P_d}{d\alpha_1^2} \Big|_{\bar{x}_1 = \bar{x}_2} = \eta(\bar{x}_1, \theta l_1, \theta l_2) \left(2 - \frac{\theta l_1 + \psi(\bar{x}_1)}{\psi(\bar{x}_1 - \theta l_2)} - \frac{\theta l_2 + \psi(\bar{x}_1)}{\psi(\bar{x}_1 - \theta l_1)} \right) \quad (B.2)$$

여기서, $\eta(\bar{x}_1, \theta_{l_1}, \theta_{l_2})$ 는 항상 양의 값을 갖는 함수이다. $\psi(x) = \frac{f_W(x)}{\phi(x)}$ 이고, Mill's ratio의 역수 $Z(x) = \frac{f_W(x)}{Q(x)}$ 와 다음 관계를 갖는다^[11].

$$\psi(x) = \frac{f_W(x)}{\phi(x)} = \frac{f_W(-x)}{Q(-x)} = Z(-x) \quad (B.3)$$

따라서 $Z(x) = \psi(-x)$ 와 $Z'(x) = -\psi'(-x)$ 의 관계가 성립한다. $Z'(x)$ 가 취하는 값의 범위가 $0 < Z'(x) < 1$ 이므로^[11], $-1 < \psi'(x) < 0$ 이 된다. 이 결과 $\Delta x > 0$ 에 대해 다음 식이 항상 성립한다.

$$\psi(x) + \Delta x > \psi(x - \Delta x) \quad (B.4)$$

이 관계를 식 (B.2)의 우변에 적용하면 다음 부등식을 얻을 수 있다.

$$2 - \frac{\theta_{l_1} + \psi(\bar{x}_1)}{\psi(\bar{x}_1 - \theta_{l_2})} - \frac{\theta_{l_2} + \psi(\bar{x}_1)}{\psi(\bar{x}_1 - \theta_{l_1})} < 2 - \frac{\psi(\bar{x}_1 - \theta_{l_1})}{\psi(\bar{x}_1 - \theta_{l_2})} - \frac{\psi(\bar{x}_1 - \theta_{l_2})}{\psi(\bar{x}_1 - \theta_{l_1})} \quad (B.5)$$

위 식의 우변에 항상 양의 값이 되는 $\psi(\bar{x}_1 - \theta_{l_1})$ $\psi(\bar{x}_1 - \theta_{l_2})$ 을 곱하면, $-(\psi(\bar{x}_1 - \theta_{l_1}) - \psi(\bar{x}_1 - \theta_{l_2}))^2$ 이 된다. 이 값은 항상 0보다 작거나 같으므로 식 (B.5) 좌변(즉, 식 (B.2)의 우변)은 항상 음의 값을 가진다. 따라서, 식 (B.2)의 $\left. \frac{d^2 P_d}{d\alpha_1^2} \right|_{\bar{x}_1 = \bar{x}_2}$ 은 항상 음의 값이 된다.