

수정 환경사파랑식과 EFEM 평면파 근사식의 해 비교 Solution Comparisons of Modified Mild Slope Equation and EFEM Plane-wave Approximation

서승남*
Seung-Nam Seo*

요 지 : 역류파를 제외한 수정 환경사파랑식과 고유함수 전개법의 평면파 근사식에 대한 정밀도를 검토하기 위해 다수의 수치실험 결과를 제시하였다. 본 연구에서 두 해석해가 사용되었으며 하나는 수정 환경사파랑식에 대한 Porter(2003)의 해이고 다른 하나는 평면파 근사식에 산란체법을 적용한 서(2008a)의 해이다. 급변 지형에서의 파랑변형에 대한 기존 결과와의 직접 비교를 통해 평면파 근사식 모형이 수정 환경사파랑식 보다 잘 기술하는 것으로 나타났다.

핵심용어 : 파랑변형, 고유함수 전개법, 수정 환경사파랑식, 산란체법, 해석해

Abstract : In order to test the accuracy between the modified mild slope equation (MMSE) without evanescent modes and the plane-wave approximation (PA) of eigenfunction expansion method, various numerical results from both models are presented. In this study, analytical solutions of two models are employed, one based on the MMSE derived by Porter (2003) and the other on the scatterer method of PA by Seo (2008a). Judging from direct comparisons against existing results of rapidly varying topography, the PA model gives better predictions of the wave propagation than the MMSE model.

Keywords : wave transformation, eigenfunction expansion method, modified mild slope equation, scatterer method, analytical solution

1. 서 론

수심이 변하는 임의지형에서 파랑의 변형은 비록 선형 파를 대상으로 하는 경우라도 해석해가 존재하지 않는다. 따라서 다수의 근사적인 방법이 존재하며 본 논문에서는 3차원 Laplace 방정식에 진행파의 수심 분포함수를 곱해 적분한 수정 환경사파랑식(MMSE)과 임의지형을 다수의 계단으로 구성한 뒤 고유함수 전개법(EFEM)의 평면파 근사식을 비교하고자 한다. 한편 이들 각각에 대한 기존 연구는 상당히 많으나 이들을 직접 비교한 연구는 거의 없다. 본 연구에 가장 근접한 연구로는 O'Hare and Davis(1993)의 연구이다. 그들은 Kirby(1986)의 EMSE(extended mild slope equation)와 고유함수 전개법을 이용하여 변분근사식을 변형한 축차행렬법의 결과를 비교하여 축차행렬법의

결과가 EMSE 결과보다 우수하다고 평가하였다.

Massel(1993), Porter and Staziker(1995), Athanassoulis and Belibassakis(1999) 등과 같이 진행파와 역류파 성분을 함께 고려한 수정 환경사파랑식도 있으나 여기서는 진행파 성분에 의한 파랑변형으로 국한한다. MMSE에 상응하는 EFEM의 평면파 근사식은 비록 두 기법에 포함된 가정은 다르나 진행파에 대한 근사라는 점은 동일하다. 이로부터 이 두 해의 거동은 유사할 것으로 예견할 수 있으며 본 논문에서는 이들 해의 거동을 비교하여 유사성의 정도를 판단하고자 한다.

Smith and Sprinks(1975)가 유도한 MMSE에는 Berkhoff(1972)가 유도한 MSE에 비해 해저경사와 해저곡률 항이 추가된 식이다. 절곡점이 있는 지형에서 해저경사는 불연속이 되며 이 점에서 해저곡률은 정의되지 않는다. 이 경

*한국해양연구원 연안개발·에너지연구부 책임연구원(Coastal Engineering & Ocean Energy Research Department, KORDI, Ansan PO. Box 29, Seoul 425-600, Korea. snseo@kordi.re.kr)

우 MMSE의 해를 구하기가 어렵기 때문에 Porter(2003)는 변수변환을 통해 해저곡률 항을 소거한 MMSE를 제안하였다. 또한 Chamberlain and Porter(1995)가 보인 바와 같이 MMSE에서 일부 항을 무시하면 EMSE를 얻을 수 있다. 그러므로 제 2절에서는 Porter의 해석해 유도과정을 정리하는 동시에 Berkhoff의 MSE에 대한 해석해도 제시하여 두 해석해를 비교분석하였다.

EFEM의 평면파 근사식은 Kirby and Dalrymple(1983)의 방법을 사용하였다. 임의 지형을 다수의 계단으로 근사하는 경우 인접 계단의 해와 접합을 위해 연립방정식을 풀어야 한다. 그러나 이 경우 서(2008a, 2008b)가 보인 바와 같이 산란체법을 이용하면 연립방정식을 풀지 않고도 반사율과 투과율을 직접 구할 수 있다. 제 3절에서는 산란체법을 간단히 기술하였고 이는 서(2008b)가 지적한 바와 같이 진행파만을 이용한 O'Hare and Davis(1993)의 축차행렬법 해와 동일하다.

제 4절에서는 앞 절의 MMSE와 EFEM 평면파 근사식의 해를 Boojj(1983)의 사면지형과 Davies and Heathershaw(1984) 그리고 Guazzelli et al.(1992)의 사주지형에 적용하여 계산한 반사율을 비교하였다. 이를 통해 MMSE와 EFEM의 평면파 근사식 해의 거동을 비교분석하였다.

2. Porter의 해석해

수심 $h(x, y)$ 가 변하는 지형 위를 지나는 선형 파랑의 운동은 Laplace 방정식과 선형 경계조건으로 나타낼 수 있다. 국지수심(local depth)에 선형화 이론으로부터 얻은 진행파의 수심 분포함수 $f = \cosh k(h+z)/\cosh kh$ 를 Laplace 방정식에 곱한 후 수심좌표 z 에 대해 해저에서 정수면까지 적분하면 해면변위 $\eta(x, y)$ 에 대한 수정 환경사파랑식이 얻어진다. 이 근사식은 수심 적분함으로써 2차원 식이 되어 지배방정식인 3차원 Laplace 방정식보다 다루기 용이하다.

2.1 해저곡률 항이 제거된 MMSE

Smith and Sprinks(1975)의 수정 환경사파랑식은 식 (1)로 나타낼 수 있다.

$$\nabla \cdot (P \nabla \eta) + (k^2 P + P_1 \nabla^2 h + P_2 |\nabla h|^2) \eta = 0 \quad (1)$$

여기서 파수 k 는 주어진 각주파수 ω 그리고 수심의 함수로 표현되는 파랑 분산식 $\omega^2 = gk \tanh kh$ 에서 구하며 분산식에서 g 는 중력 가속도이다. 식 (1)에 정의된 매개변수

들은 내적과 크기(norm)를 사용하여 식 (2)로 정의한다.

$$P = (f, f), P_1 = \left(f, \frac{df}{dh} \right), P_2 = \frac{dP_1}{dh} - \left\| \frac{df}{dh} \right\|^2 \quad (2)$$

그리고 내적과 norm은 식 (3)으로 각각 정의한다.

$$(u, v) = \int_{-h}^0 u(z, h)v(z, h)dz, \|u\|^2 = (u, u) \quad (3)$$

식 (1)에서 해저경사 항과 해저곡률 항을 무시하면 환경사파랑식(Berkhoff, 1972)이 된다. 반면에 모든 항을 포함하는 수정 환경사파랑식은 절곡점을 갖는 해지지형의 경우 해저곡률 항이 정의되지 않아 엄밀한 수식전개에서는 상당한 어려움이 있다. 따라서 Porter(2003)는 해면함수들 식 (4)와 같이 변수 변환하여 식 (1)에서 해저곡률 항이 제거된 수정 환경사파랑식 (5)를 얻었다.

$$\eta(x, y) = r(h)\zeta(x, y) \quad (4)$$

식 (4)를 식 (1)에 대입하고 $rk\sqrt{P}=1$ 의 관계식을 이용하면 해저곡률 항을 제거된 수정 환경사파랑식 (5)를 얻을 수 있다.

$$\nabla \cdot (k^{-2} \nabla \zeta) + [1 - q|\nabla h|^2] \zeta = 0 \quad (5)$$

여기서 매개변수 q 는 식 (6)으로 표현되고 $T = \tanh kh$ 이다.

$$q = \frac{1}{k^2 \|f\|^2} \left\{ \left\| \frac{df}{dh} \right\|^2 - \frac{1}{\|f\|^2} \left(f, \frac{df}{dh} \right)^2 \right\} \\ = \frac{(1-T^2) \left[\begin{array}{l} 3T^2(1+3T^2) + 6kh(1-T^2)(T+3T^3) \\ -3(kh)^2(1-T^2)(3+2T^2+3T^4) \\ -16(kh)^3 T(1-T^2)^2 - 4(kh)^4(1-T^2)^3 \end{array} \right]}{12[T+kh(1-T^2)]^4} \quad (6)$$

변수 q 를 상대수심 kh 에 대해 나타내면 Fig. 1과 같으며 이는 Porter(2003)의 관련식과 동일함을 보일 수 있다. Fig. 1에서 $kh \rightarrow 0$ 이면 $q \rightarrow 0$ 임을 알 수 있으며 이 경우 $T \approx kh - (kh)^3/3 + 2(kh)^5/15$ 를 식 (6)에 대입하면 $q = O\{(kh)^2\}$ 를 얻는다.

2.2 직교입사 파랑변형에 대한 해의 유도

식 (1)은 직교입사의 경우 2계 미분식이 되며 이와 연관된 경계조건을 기술하고자 한다. 정의구역을 수심이 일정한 파랑 입사구역 $1(x \leq x_1)$ 과 투과구역 $2(x \leq x_2)$ 그리고 수심이 변하는 변형구역 $3(x_1 < x < x_2)$ 으로 구분하여 해면함수를 나타낸다. 파랑이 왼쪽에서 오른쪽으로 진행하

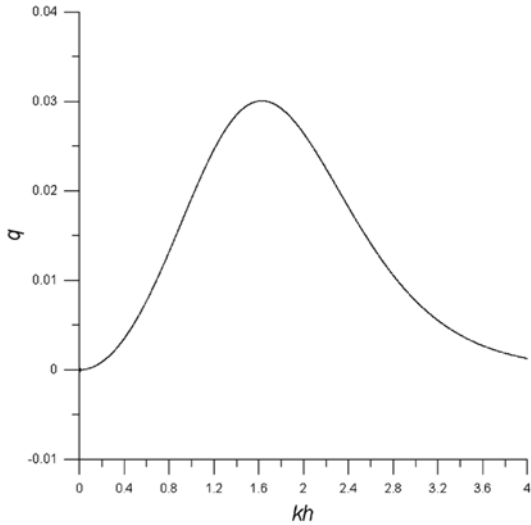


Fig. 1. Plot of parameter q in the transformed modified mild slope equation (5).

는 경우만을 대상으로 삼아 입사구역에서의 반사 파랑의 반사율 R_a , 파랑 투과구역에서는 진행 파랑의 투과율 T_a 로 각각 나타낸다.

$$\eta(x) = \begin{cases} e^{ik_1(x-x_1)} + R_a e^{-ik_1(x-x_1)}, & x \leq x_1 \\ T_a e^{ik_2(x-x_2)}, & x \geq x_2 \end{cases} \quad (7)$$

식 (7)를 미분하여 각 경계에서의 값을 연관시키면 경계조건을 얻을 수 있다. 변수 ζ 에 대한 경계조건을 구하기 위해 식 (4)를 식 (7)에 대입하면 식 (8a)을 얻는다.

$$\begin{aligned} \zeta' + ik_1 \zeta &= \frac{2ik_1}{r_1}, \quad x \leq x_1 \\ \zeta' - ik_2 \zeta &= 0, \quad x \geq x_2 \end{aligned} \quad (8a)$$

여기서 $()' = d()/dx$ 이다. 그리고 식 (8a)을 미지수인 반사율과 투과율로 표현하면 식 (8b)이 된다.

$$\begin{aligned} \zeta' - ik_1 \zeta &= -\frac{2ik_1}{r_1} R_a, \quad x \leq x_1 \\ \zeta' + ik_2 \zeta &= \frac{2ik_2}{r_2} T_a, \quad x \geq x_2 \end{aligned} \quad (8b)$$

식 (8)로부터 수심변화 구역에서 파랑의 변형을 식 (9)와 같이 미지함수 $\psi_1(x)$ 와 $\psi_2(x)$ 를 도입하여 일반화한다.

$$\begin{aligned} \zeta'(x) + ik \zeta(x) &= 2ik \psi_1(x) \\ \zeta'(x) - ik \zeta(x) &= -2ik \psi_2(x) \end{aligned} \quad (9)$$

Table 1. Parameters associated with MSE and MMSE

	r	c	d
MSE	1		0
MMSE	$1/(k\sqrt{P})$	$1/k^2$	$q/ \nabla h ^2$

그러면 식 (9)로부터 식 (10)을 얻게 된다.

$$\begin{aligned} \zeta &= \psi_1 + \psi_2 \\ \psi_1' + \psi_2' &= ik(\psi_1 - \psi_2) \end{aligned} \quad (10)$$

식 (1)에서 일부 항을 무시한 MSE와 변환된 식 (5)로 주어진 MMSE를 아우르는 모형의 지배방정식은 식 (11)으로 나타낼 수 있다.

$$\frac{d}{dx} \left(c \frac{d\zeta}{dx} \right) + ck^2(1-d)\zeta = 0 \quad (11)$$

식 (11)과 (4)에 Table 1의 값을 대입하면 상응하는 각각의 환경사 파랑식이 얻어진다.

식 (11)에 식 (10)을 이용하면 연립 미분방정식 (12a)을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \psi_1' &= a\psi_1 - b^* \psi_2 \\ \psi_2' &= -b\psi_1 + a^* \psi_2 \end{aligned} \quad (12a)$$

여기서 a, b 는 식 (12b)로 정의되고 위 첨자 *는 공액 복소함수를 의미한다.

$$\begin{aligned} a &= ik \left(1 - \frac{d}{2} \right) - \frac{1}{2} (\ln ck)' \\ b &= a - ik = \frac{1}{2} [-(\ln ck)' - ikd] \end{aligned} \quad (12b)$$

한편 식 (12a)는 다음에 정의된 적분인자 α 를 이용하여 식 (13a)로 나타낼 수도 있다.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\psi_1}{\alpha} \right)' &= -\frac{b^*}{\alpha} \psi_2 \\ \left(\frac{\psi_2}{\alpha^*} \right)' &= -\frac{b}{\alpha^*} \psi_1 \end{aligned} \quad (13a)$$

$$\alpha(x) = \exp \left[\int_{x_1}^x a(s) ds \right] = \begin{cases} \sqrt{\frac{C_g(x_1)}{C_g(x)}} e^{i \int_{x_1}^x k ds} & , \text{ for MSE} \\ \sqrt{\frac{k(x)}{k(x_1)}} e^{i \int_{x_1}^x k(1-d/2) ds} & , \text{ for MMSE} \end{cases} \quad (13b)$$

여기서 C_g 는 군속도이고 $\alpha(x_1)=\alpha^*(x_1)=1$ 인 초기조건을 얻는다.

연립 미분방정식 (13a)와 연관된 경계조건은 식 (8)과 (10)으로부터 식 (14a)과 식 (14b)가 된다.

$$\psi_1(x_1) = \frac{1}{r_1}, \psi_2(x_2) = 0 \quad (14a)$$

$$\psi_2(x_1) = \frac{R_a}{r_1}, \psi_1(x_2) = \frac{T_a}{r_2} \quad (14b)$$

여기서 r_1 과 r_2 는 Table 1의 r 을 x_1, x_2 에서 각각 계산한 값을 의미한다. 식 (14b)에서 R_a, T_a 는 미지수로 이를 해의 형태로 나타내어야 한다.

이를 위해 미분방정식 (13a)의 해를 $(\chi_1, \chi_2)^T$ 라 표기하면 $(\chi_2^*, \chi_1^*)^T$ 도 역시 해가 됨을 보일 수 있다. 이것과 미분방정식이 선형이므로 해를 중첩하면 일반해는 식 (15)가 된다.

$$\begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{Bmatrix} = c_1 \begin{Bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{Bmatrix} + c_2 \begin{Bmatrix} \chi_2^* \\ \chi_1^* \end{Bmatrix} \quad (15)$$

여기서 c_1 과 c_2 는 미지상수이며 이들이 선형 독립이 되기 위해서는 모든 x 에 대해 다음 조건이 필요하다.

$$\frac{1}{|\alpha(x)|^2} (|\chi_1(x)|^2 - |\chi_2(x)|^2) \neq 0 \quad (16)$$

식 (14)에서 $x = x_1$ 의 경계조건을 이용하면 식 (16a)와 같은 관계식을 얻는다.

$$\begin{cases} \frac{1}{r_1} = c_1 \chi_1(x_1) + c_2 \chi_2^*(x_1) \\ \frac{R_a}{r_1} = c_1 \chi_2(x_1) + c_2 \chi_1^*(x_1) \end{cases} \quad (16a)$$

미지 상수 c_1 과 c_2 를 구하기 위해 Porter(2003)과 같이 $x = x_1$ 경계에서 해를 식 (16b)로 설정한다.

$$\chi_1(x_1) = 0, \chi_2(x_1) = 1 \quad (16b)$$

그러면 식 (16a)로부터 식 (16c)를 얻을 수 있다.

$$c_1 = \frac{R_a}{r_1}, c_2 = \frac{1}{r_1} \quad (16c)$$

결국 이를 정리하면 해는 반사율을 포함한 식 (16d)로 나타내진다.

$$\begin{cases} \psi_1(x) = \frac{R_a}{r_1} \chi_1(x) + \frac{1}{r_1} \chi_2^*(x) \\ \psi_2(x) = \frac{R_a}{r_1} \chi_2(x) + \frac{1}{r_1} \chi_1^*(x) \end{cases} \quad (16d)$$

그리고 식 (14)로부터 $x=x_2$ 의 경계조건과 식 (16)을 이용하면 식 (17)을 얻을 수 있다.

$$R_a = \frac{\chi_1^*(x_2)}{\chi_2(x_2)}, \frac{r_1 T_a}{r_2} = -\frac{\chi_1^*(x_2)}{\chi_2(x_2)} \chi_1(x_2) + \chi_2^*(x_2) = \frac{|\alpha(x_2)|^2}{\chi_2(x_2)} \quad (17)$$

관련 에너지 보존식을 해의 형태로 나타내면 임의의 x 와 경계점 x_1 에서 다음 식 (18)이 성립한다.

$$\frac{|\psi_1(x)|^2 - |\psi_2(x)|^2}{|\alpha(x)|^2} = \frac{1 - |R_d|^2}{r_1^2} \quad (18)$$

식 (18)에 $x = x_2$ 을 대입하고 식 (14)을 이용하면 식 (19)를 얻을 수 있다.

$$\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \frac{|T_d|^2}{|\alpha(x_2)|^2} = 1 - |R_d|^2 \quad (19)$$

이제 해를 구하는 과정 즉 적분 방정식을 유도하고자 한다. 식 (13a)에 해 $(\chi_1, \chi_2)^T$ 를 대입하여 $x = x_1$ 에서 $x = x_2$ 까지 적분하고 식 (13b)와 식 (16b)를 이용하면 Volterra 적분방정식 (20)이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \chi_1(x) &= -\alpha(x) \int_{x_1}^x \frac{b}{\alpha^*} \chi_2 dt \\ \chi_2(x) &= \alpha^*(x) - \alpha^*(x) \int_{x_1}^x \frac{b}{\alpha^*} \chi_1 dt \end{aligned} \quad (20)$$

수식 전개 편의상 Porter(2003)과 같이 식 (21)으로 정의된 연산자 U 와 V 를 도입한다.

$$\begin{aligned} U\chi(x) &\equiv \chi^*(x) \\ V\chi(x) &\equiv \alpha^*(x) \int_{x_1}^x \frac{b(t)}{\alpha^*(t)} \chi(t) dt \end{aligned} \quad (21)$$

식 (21)을 이용하면 식 (20)은 식 (22)가 된다.

$$\begin{aligned} \chi_1 &= -UVU\chi_2 \\ \chi_2 &= U\alpha - V\chi_1 \end{aligned} \quad (22)$$

위 식 (22)에서 χ_1 을 소거하고 정리하면 식 (23)이 된다.

$$\chi_2 = U\alpha + VUVU\chi_2 = U\alpha + (VU)^2\chi_2 \quad (23)$$

여기서 연산자 $(VU)^2$ 은 선형이므로 만일 $\|(VU)^2\| < 1$ 을 만족하면 χ_2 는 Neumann 급수가 되며 수렴이 보장된다. 이 경우 해는 식 (24)로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \chi_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} (VU)^{2n} U\alpha \\ \chi_1 &= -U \sum_{n=0}^{\infty} (VU)^{2n+1} U\alpha \end{aligned} \quad (24)$$

한편 식 (21)의 연산자 정의를 이용하여 전개하면 다음 관계식과 순환 공식을 바로 얻을 수 있다.

$$(VU)^{2n} U\alpha = \alpha^* \beta_{2n} \quad (25a)$$

$$U(VU)^{2n+1} U\alpha = UV\alpha\beta_{2n}^* = \alpha\beta_{2n+1}^* \quad (25b)$$

$$\begin{cases} \beta_0(x) = 1 \\ \beta_n(x) = \int_{x_1}^x \frac{b}{\alpha^*} \alpha \beta_{n-1}^* dt \equiv \int_{x_1}^x G(t) \beta_{n-1}^* dt, n = 0, 1, \dots \end{cases} \quad (25c)$$

한걸음 더 나아가 식 (24)에 식 (25)을 대입하면 식 (26)와 같이 변형할 수 있다.

$$\begin{aligned} \chi_2(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (VU)^{2n} U\alpha = \alpha^*(x) \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{2n}(x) \\ \chi_1(x) &= -U \sum_{n=0}^{\infty} (VU)^{2n+1} U\alpha = -\alpha(x) \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{2n+1}^*(x) \end{aligned} \quad (26)$$

그리고 식 (26)을 식 (17)에 대입하여 계산한 반사율과 투과율은 식 (27)이 된다.

$$R_a = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \beta_{2n+1}(x_2)}{\sum_{n=0}^{\infty} \beta_{2n}(x_2)}, \quad T_a = \frac{r(x_2)}{r(x_1)} \frac{\alpha(x_2)}{\sum_{n=0}^{\infty} \beta_{2n}(x_2)} \quad (27)$$

2.3 해의 비교

앞 절에서 구한 해인 식 (26)과 (27)을 식 (16d)에 대입하면 $\psi_1(x)$ 와 $\psi_2(x)$ 를 얻게 된다. 이를 다시 식 (10)에 대입하면 직교입사 파랑에 대하여 변수 변환된 해면변위 $\zeta(x)$ 를 얻을 수 있고 이는 파랑변형의 지배방정식 (11)의 해이다. 한편 직교입사 파랑에 대한 해면변위 $\eta(x, y)$ 는 식 (4)에 $\zeta(x)$ 를 대입하면 구할 수 있다. 그리고 식 (26)의 해는 α 와 β_n 의 함수이고 식 (25c)로 정의된 β_n 은 각각 식 (13b)와 (12b)로 정의된 α 와 b 의 함수이므로 결국 α 와 b 의

함수이다. 이들은 수심이 주어지면 계산가능하고 MSE와 MMSE에는 α 와 b 의 함수인 $G(x)$ 가 상이하게 표현된다.

MSE와 MMSE의 해를 비교하기 위해 이들에 상응하는 함수 $G(x)$ 를 비교분석하고자 한다. $G(x)$ 는 식 (12b)와 (13b)를 이용한 연산에 의해 식 (28)로 표현할 수 있다.

$$G(x) = \frac{\alpha^* b}{\alpha} = \begin{cases} \frac{k(1-T^2)}{T+kh(1-T^2)} \frac{dh}{dx} \left\{ \frac{T(1-khT)}{T+kh(1-T^2)} e^{2i \int_{x_1}^k ds} \right\}, & \text{for MSE} \\ \frac{k(1-T^2)}{T+kh(1-T^2)} \frac{dh}{dx} \left\{ \left(0.5 + i\tilde{q} \frac{dh}{dx} \right) e^{2i \int_{x_1}^k \left[1 - \frac{q}{2} \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 \right] ds} \right\}, & \text{for MMSE} \end{cases} \quad (28)$$

여기서 \tilde{q} 는 식 (6)에 정의된 q 의 함수로 다음과 같다.

$$\tilde{q} = \frac{T+kh(1-T^2)}{2(1-T^2)} q$$

식 (28)로부터 MSE와 MMSE 해에 포함된 $G(x)$ 는 중괄호 내의 함수만이 상이하다. 즉 중괄호 내의 함수의 절대값과 위상이 다르기 때문에 MSE와 MMSE 해의 거동이 상이함을 유추할 수 있다. MSE와 MMSE 해는 식 (28)의 공통 인수에 해저경사가 존재함으로 이에 영향을 받고 국지적으로 해저경사가 0인 경우 $G(x)$ 역시 0이 된다. 가장 큰 차이점은 MMSE에서는 해저경사의 영향을 MSE보다 더 받으며 β_n 은 $G(x)$ 과 공액함수 $G^*(x)$ 의 곱에 대한 다중적분(multiple integral)이므로 이는 상호작용을 의미하며 n 이 증가할수록 β_n 의 절대값은 급격히 감소한다.

3. EFEM의 평면파 근사해

다중 계단지형에서는 EFEM을 이용하여 해를 구할 수 있다. 임의 구간 i 에서 평면파만을 고려한 직교입사 파랑의 해는 식 (29)로 나타낼 수 있다.

$$\phi_i = p_i^+ \cosh k_i(z+h_i) e^{ik_i x} + p_i^- \cosh k_i(z+h_i) e^{-ik_i x}, \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i \quad (29)$$

여기서 p_i^+, p_i^- 는 우측과 좌측으로 각각 진행하는 파의 미지수이다. 구간 $i+1$ 에서 상응하는 파의 해는 식 (29)에 첨자를 $i+1$ 로 대체하면 되고 포함된 미지수를 구하기 위해 내부경계 x_i 에서 정력학 정합조건($\partial\phi_i/\partial x = \partial\phi_{i+1}/\partial x$)과 동력학 정합조건($\phi_i = \phi_{i+1}$)을 각각 사용한다. 그리고 Kirby

and Dalrymple(1983)의 방법과 같이 Galerkin 방법을 사용하여 수심 적분하면 미지수 4개에 대한 2개의 연립방정식이 얻어진다.

만일 내부경계를 M 개로 설정하여 임의 지형을 M 개 다중 계단으로 근사하면 미지수의 총 $2M$ 개수는 가 되고 동수의 연립방정식이 구성되어 미지수를 구할 수 있다. 본 논문에서는 연립방정식을 직접 풀어 해를 구하는 방법 대신에 서(2008a, 2008b)의 산란체법을 이용하여 해를 구하였다. 평면파 근사식의 경우 산란체법에 의한 해는 연립방정식의 해와 동일하며 산란체법에서는 각각의 단일계단에 대해 해석적으로 계산된 미지수를 이용한다. 즉 좌측에서 입사하는 파랑($p_i^+ = 1, p_{i+1}^- = 0$)에 의한 반사파($R_i^+ = p_i^-$)와 투과파($T_i^+ = p_{i+1}^+$)는 2원 1차 연립방정식이므로 해석적으로 표현되고 이와 유사하게 우측에서 입사하는 파랑($p_i^+ = 0, p_{i+1}^- = 1$)에 의한 반사파($R_i^- = p_{i+1}^+$)와 투과파($T_i^- = p_i^-$) 역시 해석적으로 구할 수 있다. 이 반사파와 투과파에 대한 식은 서(2008a)의 결과를 이용하였다.

산란체법의 경우 i 개까지 구성된 다수의 산란체에 적용하면 좌우 입사파랑에 의한 포텐셜 복소 반사율과 투과율은 식 (30)이 된다.

$$\begin{cases} R_{s,i}^+ = R_{s,i-1}^+ + \frac{T_{s,i-1}^+ R_i^+ T_{s,i-1}^-}{1 - R_i^+ R_{s,i-1}^-}, T_{s,i}^+ = \frac{T_{s,i-1}^+ T_i^+}{1 - R_i^+ R_{s,i-1}^-}, i \geq 2 \\ R_{s,i}^- = R_i^- + \frac{T_i^- R_{s,i-1}^- T_i^+}{1 - R_{s,i-1}^- R_i^+}, T_{s,i}^- = \frac{T_i^- T_{s,i-1}^-}{1 - R_{s,i-1}^- R_i^+} \end{cases}, i \geq 2 \quad (30)$$

여기서 초기조건은 식 (31)이 되고 M 개의 산란체의 경우에는 식 (30)을 이용하여 축차적으로 구해 최종 포텐셜 반사율과 투과율을 구한다.

$$\begin{cases} R_{s,1}^+ = R_1^+, T_{s,1}^+ = T_1^+ \\ R_{s,1}^- = R_1^-, T_{s,1}^- = T_1^- \end{cases} \quad (31)$$

결국 산란체법은 해를 해석적으로 구할 수 있으며 계단의 개수에 제한을 받지 않는다. 따라서 평면파 근사식을 연립방정식으로 직접 푸는 경우 계단의 개수가 증가할수록 기억용량의 증가와 더불어 계산시간의 증가로 인한 제약이 있으나 산란체법에서는 기억용량의 증가는 없으나 계산시간의 증가도 거의 무시할 수 있는 정도로 계산이 빠른 장점이 있다.

4. 수치계산

앞 절에서 기술한 MMSE(또는 MSE)와 EFEM의 해로

부터 물리변수(physical parameter)인 반사율과 투과율을 각각 계산할 수 있다. 좌측에서 입사하는 파랑이 지형변화 구간에 의한 물리변수인 반사율 K_R 과 투과율 K_T 에 관한 식은 MMSE(또는 MSE)와 EFEM에서 다르게 정의되며 식 (32)로 나타낼 수 있다. 기존 연구로부터 MSE는 MMSE에 비해 열등함으로 수치실험은 MMSE만을 대상으로 한다.

$$K_R = \begin{cases} |R_d|, & \text{for MMSE and MSE} \\ |R_{s,M}^+|, & \text{for EFEM} \end{cases} \quad K_T = \begin{cases} |T_d|, & \text{for MMSE and MSE} \\ |T_{s,M}^+| \frac{\cosh k_{M+1} h_{M+1}}{\cosh k_1 h_1}, & \text{for EFEM} \end{cases} \quad (32)$$

본 절에서는 식 (32)를 Booij(1983)의 사면지형과 Davies and Heathershaw(1984) 그리고 Guazzelli et al.(1992)의 사주지형에 적용하여 계산한 반사율을 비교하였다. 본 수치실험에서는 해저면이 변하는 구간의 시점 $x_1=0$ 와 종점 $x_2=x_r$ 에 Np 개의 등간격 격자점을 위치시키고 MMSE(또는 MSE)의 경우에는 좌우에 nf 개의 격자점을 추가로 설정하여 총 격자점의 수는 $2nf+Np$ 개로 구성한다. 그리고 점 $x=0$ 의 격자번호를 $j=0$, $x=x_r$ 를 $j=Np$ 로 각각 나타내면 x_1 과 x_2 의 격자번호는 각각 $-nf$, $nf+Np$ 가 된다. 반면에 EFEM의 경우에는 일정 수심구역에 존재하는 추가 격자점이 없으며($nf=0$) 내부경계 Np 개로부터 $Ns(=Np)$ 개의 계단이 구성된다.

MMSE(또는 MSE)의 해에 존재하는 α 는 파수의 적분으로 주어진다. 파랑 분산식을 반복적으로 파수를 직접 계산하는 경우 α 는 수치적분의 방법으로 계산하게 된다. 그래서 본 논문에서는 이를 포함한 β_n 의 모든 적분에 사다리꼴 적분식을 사용하였다. 반사율과 투과율의 계산에는 β_5 까지 계산하여 이들을 식 (27)에 대입하여 산출하였으며 모든 경우 7개까지 항을 합하면 유효숫자 6째까지 일치한다. 그리고 사다리꼴 적분 때문에 추가 격자점 개수는 1이상이어야 하며 본 실험에서는 $nf=5$ 로 설정하였고 0보다 큰 경우에 산출결과는 동일함을 밝힌다.

Fig. 2은 Booij(1983)의 사면계단에 대한 실험결과이며 입사구역의 수심은 0.6 m, 투과구역은 0.2 m이고 사면의 폭(또는 경사 S)은 변수이다. 주기는 2초로 상대수심 조건(kh)은 0.4644~0.8648 이므로 전이구역에 해당하며 직교입사의 경우이다.

Fig. 2의 결과로부터 S 가 0.1보다 큰 경우 EFEM의

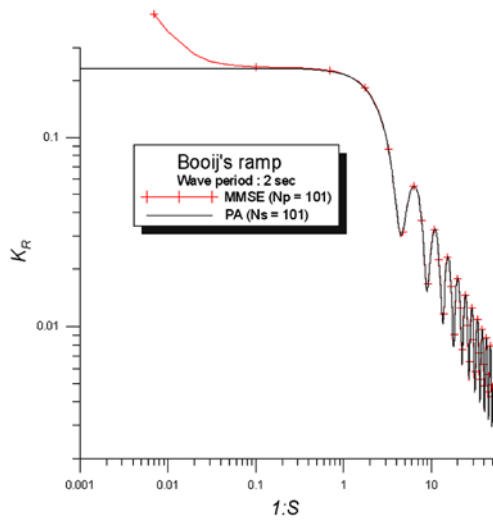


Fig. 2. Comparison of results from PA and MMSE for Booi's ramp ($h_0=0.6$ m, $h_{101}=0.2$ m).

평면파 근사식(PA)과 MMSE의 해는 본 해상력에서는 차이가 없다. 그러나 사면경사가 이 보다 작아 매우 급한 경우 MMSE의 해는 PA의 해에 비해 상당한 차이를 보인다. 경사가 급한 경우에는 MMSE에 내재된 가정이 성립하지 않기 때문으로 판단되고 서(2008b)에 의하면 PA의 해는 역류파를 포함한 EFEM의 해에 비해 약간 작다. 참고로 Chamberlain and Porter(1995)와 Porter(2003)은 횡축을 무차원한 사면의 폭으로 정하였고 그들의 횡축 시점은 $S = 0.124$ 에 해당한다.

다음에 동일한 하나의 정현파가 2, 4 그리고 10개로 구성된 사주지형에 대한 Davies and Heathershaw(1984)의 수리실험 결과(채운 원)와 MMSE 그리고 PA의 해를 비

Table 2. Experimental setup of Davies and Heathershaw(1984)

Case	A (cm)	λ_1 (cm)	x_r (cm)	h_0 (cm)
DH1	5	100	200	15.6
DH2	5	100	400	15.6
DH3	5	100	1000	31.3

교하였다. 본 실험조건에 대한 지형은 식 (33)으로 표현되며 h_0 는 일정 수심을, x_r 은 연안사주가 존재하는 길이를 그리고 A 와 λ 는 정현파 지형의 진폭과 파장을 각각 의미한다. 그리고 Table 2에 식 (33)의 매개변수를 나타내었다.

$$h(x) = \begin{cases} h_0, & x \leq 0 \\ h_0 - A \sin(2\pi x/\lambda), & 0 \leq x \leq x_r \\ h_0, & x \geq x_r \end{cases} \quad (33)$$

Fig. 3는 정현파 하나에 100개의 격자점을 두어 계산한 결과로 입사파랑의 파수 k_w 와 지형의 파수 k_r 의 비가 1인 부근을 제외하면 PA와 MMSE의 해는 거의 같다.

이 실험에 대한 기존 연구(Kirby, 1986; Massel, 1993; O'Hare and Davis, 1993; Chamberlain and Porter, 1995; Suh et al., 1997; 조이, 1998; Porter, 2003; Kim and Bai, 2004; 서, 2007; 서, 2008b 등)를 분석하면 $2k_w/k_r=2$ 에서 Kirby(1986)의 모든 경우와 역류파를 포함한 조이(1998)와 서(2008b) 그리고 stream function으로부터 MMSE를 유도한 Kim and Bai(2004)의 DH2 결과는 0 또는 이에 접근한다. 이 부근을 제외하면 Fig. 3에 제시된 바와 같이 PA와 MMSE 해는 거의 일치하여 본 결과는 기존 결과와 일치한다.

마지막 수치실험은 두 개의 상이한 정현파가 중첩된 지형에 관한 Guazzelli et al.(1992)의 실험을 대상으로 하였다. 지형은 식 (34)로 나타낼 수 있고 여기서 λ_1 과 λ_2

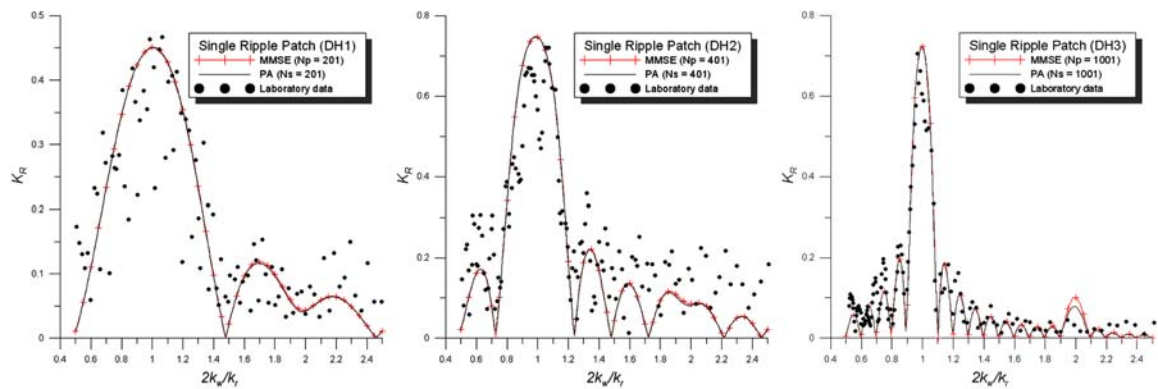


Fig. 3. Comparison of results from PA, MMSE and laboratory data of Davies and Heathershaw(1984): depth of case (a) $h_0 = 15.6$ cm; (b) $h_0 = 15.6$ cm; (c) $h_0 = 31.3$ cm.

Table 3. Experimental setup of Guazzelli et al. (1992)

Case	A(cm)	λ_1 (cm)	λ_2 (cm)	x_r (cm)	h_0 (cm)		
					a	b	c
G1	1	12	6	48	2.5	3	4
G2	0.5	6	4	48	2.5	3	4
G3	1	6	4	48	2.5	3	4

는 구성 사주의 파장이며 반사율의 결과는 파장이 긴 $\lambda_1(k_r \approx 2\pi/\lambda_1)$ 을 기준으로 나타내었고 Table 3에 지형의 제원을 나타내었다.

$$h(x) = \begin{cases} h_0, & x \leq 0 \\ h_0 - A[\sin(2\pi x/\lambda_1) + \sin(2\pi x/\lambda_2)], & 0 \leq x \leq x_r \\ h_0, & x \geq x_r \end{cases} \quad (34)$$

본 수치실험의 격자점은 정현파 지형 중 긴 정현파를 기준으로 파장 당 100개로 구성하였다. 수치실험 결과는 G1b를 제외한 모든 8개를 도시하고 PA와 MMSE의 해를 Fig. 4에 비교하였다.

수치실험을 수행한 Guazzelli et al.(1992)은 횡축을 주

파수($T_w=1/f_w$)로 나타내었고 $f_w \approx 1.8 \sim 2.0$ 보다 큰 경우 수조에 설치된 해안으로부터의 반사율은 무시할 수 있으며 이 주파수보다 작은 경우의 반사율은 0.1~0.2에 해당한다고 밝혔다. 즉 파장이 상대적으로 긴 경우에는 짧은 파장의 파랑보다 수조실험의 결과는 반사에 더 영향을 받고, 이는 Fig. 5에서 G1의 경우 $2k_w/k_r \approx 1$, G2와 G3의 경우 $2k_w/k_r \approx 0.5$ 에 각각 해당한다.

역류파를 포함한 Guazzelli et al.(1992)의 수치실험에서 본 횡축의 값이 G1의 경우 1.8, G3의 경우 1.4를 기준으로 이보다 작으면 계산된 반사율은 증가하고 크면 감소하는 경향을 보인다. 또한 계산된 반사율의 위상은 횡축 좌표의 작은 쪽으로 이동하고 역류파를 포함한 경우가 수치실험 결과와 더 잘 일치한다. 이러한 현상은 역류파를 포함한 MMSE를 G1a에 적용한 Athanassoulis and Belibassakis(1999)의 수치실험 결과에서도 동일하다.

Fig. 5의 결과를 분석하면 $2k_w/k_r \approx 2$ 를 기준으로 이보다 크면 MMSE의 반사율이 PA보다 뚜렷이 크고, 작으면 MMSE의 반사율이 약간 작아지는 경향을 알 수 있다. 따라서 위의 기존 결과의 분석으로부터 PA 모형이 MMSE 모형보다 본 사주지형에 대해 보다 좋은 결과를 가져다준다.

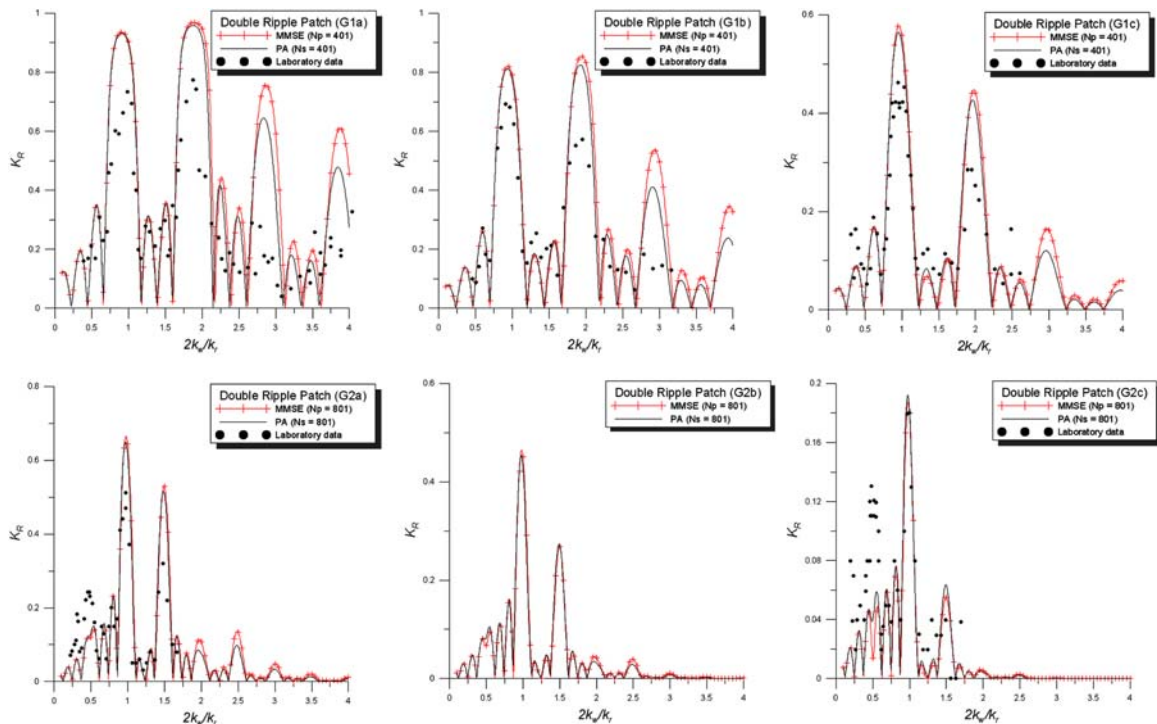


Fig. 4. For caption see next page.

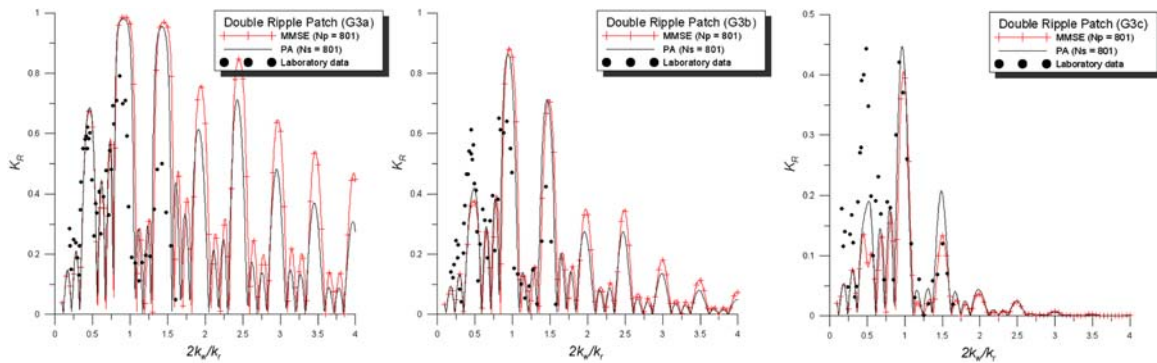


Fig. 5. Comparison of results from PA, MMSE and laboratory data for Guazzelli et al. (1992): depth of case (a) $h_0 = 2.5$ cm; case (b) $h_0 = 3$ cm; case (c) $h_0 = 4$ cm.

5. 결 론

진행파만을 고려한 MMSE 모형과 EFEM 평면파(PA) 모형의 정밀도를 비교하기 위해 각 모형의 수치결과를 비교하였다. 역류파를 포함한 경우에는 진행파만의 모형보다 정밀한 해를 얻을 수 있는 반면에 진행파 모형들은 수치계산이 용이하고 기억용량과 계산시간과 같은 제약이 적은 임의지형에 의한 반사율을 산정하는 데 유리하기 때문에 일차 계산으로 이용할 수 있다. 본 연구에서는 일반적인 MMSE 모형에서는 해저곡률 항이 포함되어 지형에 절곡점이 있는 경우 이 점에서 해저곡률 항이 정의되지 않으며 이를 피하기 위해 이 항이 제거된 Porter(2003)의 MMSE를 사용하였고 이를 이용한 해석해를 제시하여 비교하였다.

본 수치실험 비교를 요약하면 Booij의 사면지형에서 사면경사가 0.1 보다 작아 매우 급한 경우 MMSE의 해는 PA의 해에 비해 상당한 차이를 보인다. 즉 사면경사 지형에 해석해를 적용한 본 결과로부터 기존 연구와 달리 MMSE는 경사 0.1까지 성립함을 보인다. 동일한 정현파로 구성된 사주지형에 대한 비교로부터 해저지형의 파장과 입사파장이 같은 $2k_w/k_r \approx 2$ 부근의 파랑조건을 제외하면 두 수치결과는 거의 같다. 그러나 상이한 두 개의 정현파로 구성된 사주지형에서는 PA 모형이 MMSE 모형에 비해 기존 수치실험과 수리실험 결과에 보다 가깝다. 따라서 본 실험에 사용된 지형에 대한 계산결과의 비교로부터 PA 모형에 의한 파랑변형 계산이 MMSE 모형에 비해 우수한 것으로 판단된다.

마지막으로 PA 모형의 본 계산에 사용된 산란체법은 연립방정식을 풀지 않고 해석적으로 반사율과 투과율을 계

산할 수 있다. 그래서 계단의 개수가 증가하는 경우 기억 용량은 증가하지 않고 계산속도도 매우 빨라 모든 임의 지형의 파랑변형 계산에 제약을 받지 않는 PA 모형을 일차적인 계산에 이용할 수도 있다.

감사의 글

본 연구는 한국해양연구원의 기본연구사업인 “연안 국지 해일 정밀예보 지원체제 현업화 기술”, “해일침수범람 지역 예측 기술 및 재해도(Hazard Map) 작성기술 개발: 부산, 마산, 여수”과 “해상파랑 관측 및 조사” 연구에서 수행된 결과의 일부이며 연구비 지원에 감사를 드립니다.

참고문헌

- 서승남 (2008a). 산란체법에 의한 다중 계단지형에서의 파랑변형 계산. 한국해양해양공학학회논문집, 20(5), 439-451.
- 서승남 (2008b). 변분근사식과 연계된 산란체법에 의한 파랑변형 계산. 한국해양해양공학학회논문집, 20(6), 553-563.
- 조용식, 이창훈 (1998). 수심이 변하는 지형을 통과하는 파랑의 반사율과 통과율 산정. 대한토목학회논문집, 18(II-4), 351-358.
- Athanassoulis, G.A. and Belibassakis, K.A. (1999). A consistent coupled-mode theory for the propagation of small-amplitude water waves over variable bathymetry regions. J. Fluid Mech., 389, 275-301.
- Berkhoff, J.C.W. (1972). Computation of combined refraction-diffraction. Proc. 13th Coastal Eng. Conf., 1, 471-490.
- Booij, N. (1983). A note on the accuracy of the mild-slope equation. Coastal Eng., 7, 191-203.
- Chamberlain, P.G. and Porter, D. (1995). The modified mild-

- slope equation. *J. Fluid Mech.*, 291, 393-407.
- Davies, A.G. and Heathershaw, A.D. (1984). Surface-wave propagation over sinusoidally varying topography. *J. Fluid Mech.*, 144, 419-443.
- Guazzelli, E., Rey, V. and Belzons, M. (1992). Higher-order Bragg reflection of gravity surface waves by periodic beds. *J. Fluid Mech.*, 245, 301-317.
- Kim, J.W. and Bai, K.J. (2004). A new complementary mild-slope equation. *J. Fluid Mech.*, 5111, 24-40.
- Kirby, J.T. (1986). A general wave equation for waves over rippled beds. *J. Fluid Mech.*, 162, 171-186.
- Kirby, J.T. and Dalrymple, R.A. (1983). Propagation of obliquely incident water waves over a trench. *J. Fluid Mech.*, 133, 47-63.
- Massel, S.R. (1993). Extended refraction-diffraction equation for surface waves. *Coastal Eng.*, 19, 97-126.
- O'Hare, T.J. and Davies, A.G. (1993). A comparison of two models for surface-wave propagation over rapidly varying topography. *Applied Ocean Res.*, 15, 1-11.
- Porter, D. (2003). The mild-slope equations. *J. Fluid Mech.*, 494, 51-63.
- Porter, D. and Staziker, D.J. (1985). Extension of the mild-slope equation. *J. Fluid Mech.*, 300, 367-382.
- Smith, R. and Sprinks, T. (1975). Scattering of surface waves by a conical island. *J. Fluid Mech.*, 72, 373-384.
- Suh, K.D., Lee C. and Park, W.S. (1997). Time-dependent equations for wave propagation on rapidly varying topography. *Coastal Eng.*, 32, 91-117.

Received February 17, 2009

Accepted March 30, 2009