한국해안 · 해양공학회논문집
제 21 권 제 2 호, pp. 108~116, 2009년 4월

고차유한요소의 파랑변형해석에의 적용에 관한 소고
A Study on Wave Transformation Analysis using Higher-Order Finite Element

정태화* · 이종인** · 김영택** · 류용욱**
Tae-Hwa Jung*, Jong-In Lee**, Young-Taek Kim** and Yong-Uk Ryu**

요 지 : 유한요소법에 사용되어 효율적으로 파랑변형을 해석할 수 있는 (Legendre 보간 함수) 방법을 소개하였다. 고차의 보간함수를 사용하는 유한요소모형은 대부분이 Lagrangian 보간 함수를 사용한다. 이 경우, 적은 수의 요소를 사용하고도 정확한 결과를 얻을 수 있다는 장점이 있지만 결과를 얻기 위해 소요되는 시간이 증가한다는 단점이 있다. Mass lumping을 통하여 계산 시간을 절약할 수는 있지만 이 경우에는 해의 정확성이 떨어진다는 단점이 있어 정확도를 향상시키기 위하여 요소의 수를 증가시켜 다시 계산시간이 증대되는 문제가 생기게 된다. 본 연구에서 Lagrangian 보간 함수의 변형된 형태인 Legendre 보간함수에 수치적분을 사용하여 mass lumping을 수행한 것과 같이 대각 행렬을 만들어 시간 절약의 효과를 얻으면서도 정확도가 어느 정도 유지되는 방법을 소개하였다. Boussinesq 방정식을 이용한 다양한 수치 계산을 통하여 본 연구에서 제안하는 방법의 우수성을 검증하였다.

핵심용어 : Boussinesq 방정식, 유한요소법, Lagrangian, Legendre

Abstract : The present study introduces a Legendre interpolation function which is capable of analyzing wave transformation effectively in a finite element method. A Lagrangian interpolation function has been mostly used for a finite element method with a higher-order interpolation function. Although this function has an advantage of giving an accurate result with less number of elements, simulation time increases. Calculation time can be reduced by mass lumping, whereas the accuracy of solution is lowered. In this study, we introduce a modified Lagrangian interpolation function, Legendre cardinal interpolation, which can reduce simulation time with keeping up favorable accuracy. Through various numerical simulations using a Boussinesq equations model, the superiority of the Legendre cardinal interpolation function to a Lagrangian interpolation function was shown.

Keywords : Boussinesq Equation, Finite Element Method, Lagrangian, Legendre

1. 서 론

외해에서 진입하는 파랑은 회절, 굴절 및 천수 등의 현상을 겪으면서 다양하게 변화한다. 이러한 파랑변형 및 파랑변형의 영향 등을 예측하는 방법에는 크게 수리모형실험과 수치모의가 있다. 수리모형실험의 경우 경제적인 여건으로 인하여 제약 사항이 많은 반면에, 수치모의의 경우 이러한 제약 사항이 상대적으로 적기 때문에 대부분의 영역에서 수치모의를 이용한 연구가 활발히 진행되고 있다. 대표적인 수치해석기법으로 유한요소법과 유한차분법이 있다. 유한차분법의 경우 미분방정식을 근사하여 해를 구하기 때문에 사용하기 편한 장점이 있는 반면에 복잡한 지형에는 적용하기 어려운 면이 있다. 반면, 유한요소법의 경우 해를 근사하기 때문에 유한요소식을 정식화시키는 과정이 번거롭지만 다양한 지형에 적용할 수 있다는 장점이 있다. 이러한 장점으로 인하여 지형이 복잡하고 불규칙한 연안 문제에는 유한요소법이 자주 활용된다(Panchang et al., 2000; Park et al., 1994; Walkley and Berzins, 2002; Woo and Liu, 2004b).

유한요소법에서 요소 내를 보간하기 위하여 주로 Lagrangian

*한밭대학교 토목환경도시공학부 토목공학전공
**한국건설기술연구원(Corresponding author: Jong-In Lee, River, Coastal and Harbor Research Division, Korea Institute of Construction and Technology, Gyeonggi-Do, 411-712, Korea, jilee@kict.re.kr)

다항식을 사용한다. 일반적으로 고차의 Lagrangian 다항식을 보간 함수로 사용할 경우에는 식이 너무 복잡해지기 때문에 대부분의 경우 선형 보간 식을 사용하여 지배방정식을 정식화한다(Kato et al., 1998; Woo and Liu, 2004a). 하지만, 선형 보간 함수를 사용할 경우, 식을 정식화시키는 과정은 간단하지만 해의 정확성을 높이기 위해서는 많은 수의 요소가 필요하며 만약 지배방정식에 많은 미분 항들이 있는 경우 적용하기 어렵다는 단점도 있다. 이럴 경우 불가피하게 고차의 유한 요소를 사용하여야 한다(Sanz-Serna and Christie, 1981; Woo and Liu, 2001). Lagrangian (또는 Hermite 형태) 고차 다항식을 사용하는 경우 대부분 요소 내 절점은 등 간격으로 배치한다. 이럴 경우 다음과 같은 문제점이 생길 수 있다. 첫째, 다항식의 차수가 증가하여 해를 구하는데 많은 시간이 요구된다. 둘째, 실행 시간을 줄이기 위하여 질량 행렬에 대하여 동일행에서 모든 성분들을 합하여 하나의 성분으로 나타내고 나머지 성분들은 0으로 만드는 lumping을 사용할 경우에는 해의 정확성이 떨어지게 된다. 이러한 문제점을 해결하기 위한 방법의 하나로 요소 내 절점의 위치를 조절하는 방법이 있다(Legendre 다항식을 사용하면 이와 같은 특징을 가지는 보간 함수를 수월하게 표현할 수 있기 때문에 이 후 Legendre 보간 함수라고 지칭하겠다). 이와 같은 방법을 이용하면 수치 적분을 수행하였을 경우에 질량 행렬이 대각 행렬이 되는 특징이 있다. 따라서, Legendre 보간 함수를 사용하면서 수치적분을 수행할 경우 해의 정확성을 유지하면서 질량 행렬에 대하여 lumping을 수행한 것과 같이 빠르게 해를 구할 수 있다는 장점이 있다. Legendre 보간 함수를 이용한 연구는 Patera(1984)에 의해 처음으로 제안되었으며 Eskilsson and Sherwin(2003) 및 Eskilsson et al.(2006) 등에 의해 파랑문제에 적용이 되었다(그들의 논문에서는 spectral element 라고 표현하였으나 이는 고차의 다항식이라는 의미가 강하기 때문에 본 문에서는 사용하지 않았다). 그러나 그들의 논문에서는 Legendre 보간 함수가 가지는 특징에 대하여 별다른 언급을 하지 않았다. Eskilsson and Sherwin(2003)의 논문에서 선형 보간 함수를 사용한 유한요소법의 결과와 고차의 Legendre 보간 함수에 수치적분을 사용하여 구한 유한요소법의 결과를 비교하여 Legendre 보간 함수의 장점을 강조한 점이 있으나 그의 논문에선 고차의 Legendre 보간 함수와 선형 Lagrangian 보간 함수를 비교하였기 때문에 Legendre 보간 함수 자체가 가지는 고유의 특성을 평가하였다고 보기는 힘들다. 따라서, 본 연구에서는 동일한 차수의 Lagrangian 보간 함수와 Legendre 보간 함수를 약비선형과 약분산성을 고려할 수 있는 Boussinesq 방정식(Nwogu, 1993)에 적용하여 수치적분을 수행한 Legendre 보간 함수의 장점을 검토해보았다.

2. 이론적 배경

해양에서 다루는 파는 상대 수심에 따라 그 특성이 다르게 나타난다. 심해에서는 파의 분산성(σ: 수심대파장비)이 두드러지게 나타나며 천해로 접근할수록 분산성은 작아지면서 비선형성(ε: 파고대수심비)이 커지게 된다. 따라서 이러한 파의 특성을 적절히 모의하기 위해서는 분산성과 비선형성을 모두 고려할 수 있는 지배방정식을 사용할 필요가 있다. 이러한 방정식 중에서 대표적인 방정식이 Boussinesq 방정식이다. Peregrine(1967)이 처음으로 변수심에 적용 가능한 모델을 제안한 이후로 Witting(1984), Madsen et al.,(1991), Nwogu(1993), Gobbi and Kirby(1999) 등 많은 학자들에 의해 Boussinesq 형태의 지배방정식이 개발되었다.

2.1 지배 방정식

본 연구에서는 지배 방정식으로 Nwogu(1993)가 제안한 다음과 같은 형태의 Boussinesq 방정식을 사용하였다. 이 모델은 약비선형(ε<<1)과 약분산성(σ<<1) 파랑에 대해 모의가 가능하다.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}((\eta+h)u)+\frac{\partial}{\partial x}\left(A_1 h^3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+A_2 h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}(hu)\right)=0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}+g\xi\right)+B_1 h^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}+B_2 h\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(h\frac{\partial u}{\partial t}\right)=0 \quad (2)$$

여기서, η는 자유수면변위를 의미하며, u는 수평유속, h는 수심 그리고 A_1, A_2, B_1, B_2는 다음과 같이 정의되는 상수이다.

$$A_1=\frac{1}{2}\theta^2-\frac{1}{6} \quad (3)$$

$$A_2=\theta+\frac{1}{2} \quad (4)$$

$$B_1=\frac{1}{2}\theta^2 \quad (5)$$

$$B_2=\theta \quad (6)$$

여기서 θ는 다음과 같이 정의되는 상수이다.

$$\theta = \frac{z}{h} \tag{7}$$

θ의 값은 선형분산관계식의 결과와 비교하였을 때 θ= -0.531일 경우에 가장 작은 오차를 주기 때문에 일반적으로 이 값을 사용한다.

2.2 정식화

식 (1)에 포함된 고차 미분항으로 인하여 유한요소법을 Boussinesq 방정식에 적용시키는데는 크게 두 가지 방법이 사용된다. 하나는 고차의 보간함수를 사용하는 방법이며 다른 하나는 보조변수를 사용하여 고차 미분항의 차수를 낮추는 방법이다. 본 연구에서는 Walkey and Berzins (1999)에 의해 제안된 보조변수를 사용하는 방법을 이용하여 식을 정식화하였다. 보조변수를 사용할 경우 식 (1)과 (2)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}((\eta + h)u) + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2} + g\xi\right) + B_1 h^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + B_2 h \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(h\frac{\partial u}{\partial t}\right) = 0 \tag{9}$$

$$w - A_1 h^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - A_2 h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}(hu) = 0 \tag{10}$$

일정 수심이라고 가정한 후, 식 (8)~(10)에 Galerkin 방법을 적용하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{M^e}\frac{\partial \eta^e}{\partial t} = -\mathbf{D^e}((h + \eta^e)u^e + w^e) \tag{11}$$

$$(\mathbf{M^e} - (b_1 + b_2)h^2\mathbf{K^e})\frac{\partial \eta^e}{\partial t} = -\mathbf{D^e}\left(\frac{(u^e)^2}{2} + g\eta^e\right) \tag{12}$$

$$\mathbf{M^e} w^e = -(a_1 + a_2)h^3 \mathbf{K^e} u^e \tag{13}$$

여기서, η^e, u^e및 w^e는 각각 절점에서의 η, u 및 w 값을 의미하며 $\mathbf{M^e}$, $\mathbf{D^e}$ 및 $\mathbf{K^e}$는 각각 다음과 같이 정의되는 행렬들이다.

$$\mathbf{M^e} = \int_{-1}^{1} J^e \mathbf{N}\mathbf{N^T} d\xi \tag{14}$$

$$\mathbf{D^e} = \int_{-1}^{1} \mathbf{N}\frac{\partial \mathbf{N^T}}{\partial \xi} d\xi \tag{15}$$

$$\mathbf{K^e} = \int_{-1}^{1} \frac{1}{J^e}\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi}\frac{\partial \mathbf{N^T}}{\partial \xi} d\xi \tag{16}$$

여기서 J^e는 Jacobian을 그리고 $\mathbf{N}$(또는 $[N_0, N_1, ..., N_P]$)은 P차의 보간 함수를 의미한다. 보간 함수로는 일반적으로 식 (17)과 같이 표현되는 Lagrangian 보간 함수를 사용하며 보통 요소 내 절점의 위치는 등 간격이 되도록 한다.

$$N_p(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi = \xi_p \\ \dfrac{\Pi_{q=0,q\neq p}^{P}(\xi - \xi_q)}{\Pi_{q=0,q\neq p}^{P}(\xi_p - \xi_q)} & \text{otherwise} \end{cases} \quad 0 \le p \le P \tag{17}$$

절점의 위치를 이렇게 설정할 경우 보간 함수의 항이 고차로 가는 경우에는 행렬식을 푸는데 시간이 오래 소요되는 단점이 있다. 이러한 단점을 극복하기 위하여 질량(mass) 행렬에 대하여 lumping을 할 수 있지만 이 경우에는 해의 정확성이 떨어지는 문제점이 발생한다(Walkley and Berzins, 1999). 이에 대한 대안으로 제시된 방법이 Legendre 보간함수를 사용하는 방법이다. Patera(1984)에 의해 처음으로 제시된 이 방법은 해의 정확성을 떨어뜨리지 않으면서 mass lumping을 한 것과 비슷한 정도의 계산 시간 절감을 가질 수 있다는 장점이 있다. Legendre 함수를 이용한 보간 함수는 다음과 같이 나타내어진다.

$$N_p(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi = \xi_p \\ \dfrac{(\xi - 1)(\xi + 1)L_P'(\xi)}{P(P+1)L_P(\xi_P)(\xi_P - \xi)} & \text{otherwise} \end{cases} \quad 0 \le p \le P \tag{18}$$

여기서 L_P는 P차의 Legendre 다항식을 나타내며 ξ_p는 $(\xi-1)(\xi+1)\partial_\xi L_P(\xi)=0$을 만족하는 요소 내 절점의 위치이다. 3차의 다항식을 사용하는 경우 식 (17)과 (18)은 각각 다음과 같이 나타내어지며 Fig. 1과 같은 형상을 지닌다.

For Lagrangian 보간 함수:

$$N_1 = \frac{1}{16}(1 - \xi)(-1 + 3\xi)(1 + 3\xi) \tag{19a}$$

$$N_2 = \frac{9}{16}(-1 + \xi)(1 + \xi)(-1 + 3\xi) \tag{19b}$$

$$N_3 = -\frac{9}{16}(-1 + \xi)(1 + \xi)(1 + 3\xi) \tag{19c}$$

$$N_4 = \frac{1}{16}(1 + \xi)(-1 + 3\xi)(1 + 3\xi) \tag{19d}$$

For Legendre 보간 함수:

$$N_1 = \frac{(\xi - 1)(\sqrt{5}\xi + 1)(\sqrt{5}\xi - 1)}{-8} \tag{20a}$$

$$N_2 = \frac{5(\xi - 1)(\xi + 1)(\sqrt{5}\xi - 1)}{8} \tag{20b}$$

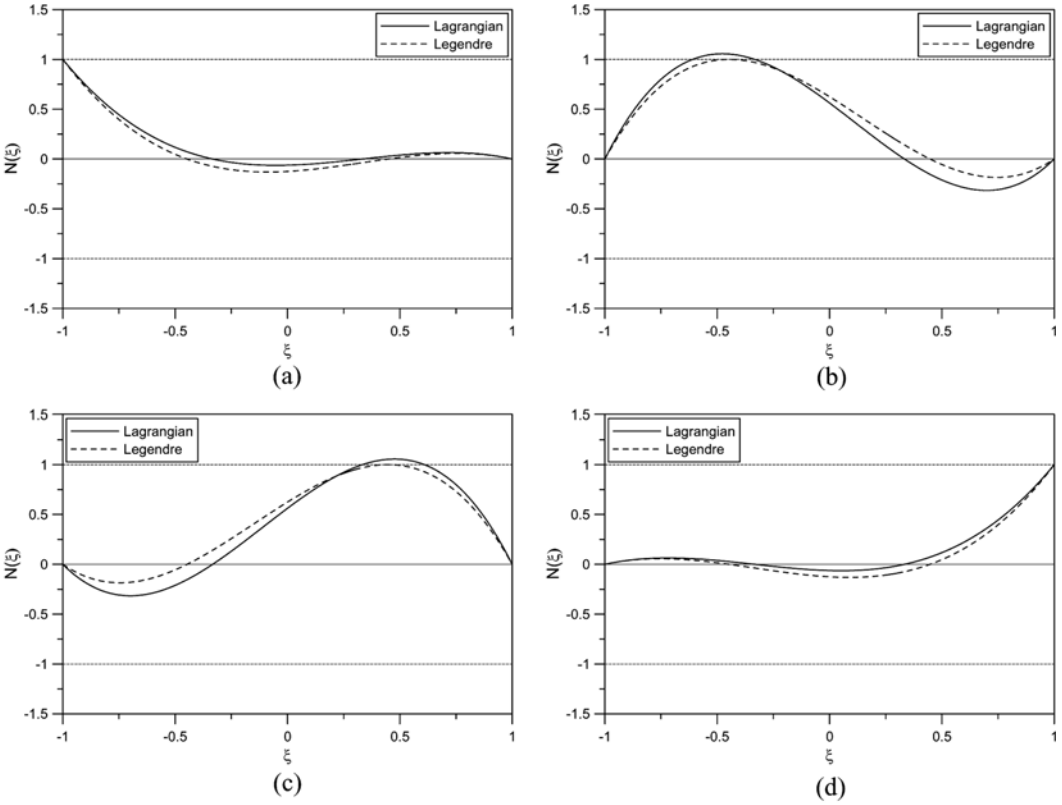

Fig. 1. Comparison between Lagrangian and Legendre interpolation function for third-order: (a) N_1; (b) N_2; (c) N_3; (d) N_4.

$$N_3 = \frac{5(\xi-1)(\xi+1)(\sqrt{5}\xi+1)}{-8} \tag{20c}$$

$$N_4 = \frac{(\xi+1)(\sqrt{5}\xi+1)(\sqrt{5}\xi-1)}{8} \tag{20d}$$

식 (14)~(16)을 직접 적분하면 4×4 행렬이 발생하게 되며 전체 요소에 대하여 합하게 되면 밴드 폭의 크기가 4가 되는 행렬이 발생하게 된다. 이러한 경우 요소의 개수가 커짐에 따라 많은 계산시간이 필요하게 된다는 불편함이 있다. 질량 행렬의 경우에는 lumping을 사용하여 대각 형렬로 만들어 계산시간을 단축시킬 수는 있으나 이 경우에는 해의 정확성이 떨어진다. 그러나 Legendre 행렬을 사용하는 경우에는 lumping을 하지 않고 Gauss-Radau-Legendre 수치적분을 수행하여 질량행렬을 대각행렬로 만들 수 있다(Karniadakis and Sherwin, 2005). Gauss-Radau-Legendre 수치적분에 대하여 간략하게 언급하면 기본적인 개념은 일반적인 Gauss 적분과 동일하다. 즉 어떤 함수의 적분값을 -1과 1사이의 특정 위치에 대한 함수값에 가중치를 곱한 값들의 합으로 나타낼 수 있다. 일반적인 Gauss 적분과 다른점은 Gauss-Radau-Legendre의 적분에서는 특정 위치의 값이 Legendre 보간 함수의 절점의 위치와 동일하다는 것이다. 따라서 적분점의 수는 항상 차수보다 하나 많게 된다. 특정 위치와 가중값은 각각 다음과 같이 정의된다.

$$\xi_i = \begin{cases} -1, & i=0 \\ \xi^{1,1}_{i-1,P-1}, & i=1,\ldots,P-1 \\ 1, & i=P \end{cases} \tag{21}$$

$$w_i^{0,0} = \frac{2}{P(P+1)[L_P(\xi_i)]^2}, i=0,\ldots,P \tag{22}$$

본 연구에서 사용하는 3차 고차요소의 경우에 대하여 식 (21)과 (22)를 계산하면, 적분점의 값은 -1, $-1/\sqrt{5}$, $1/\sqrt{5}$, 1이 되며 이에 해당하는 가중값은 각각 1/6, 5/6, 5/6, 1이 된다.

식 (15)와 (16)을 계산하는데 필요한 미분값은 다음과 같이 구해진다.

$$d_{ij} = \begin{cases} \dfrac{-P(P+1)}{4}, & i=j=0 \\ \dfrac{L_P(\xi_i)}{L_P(\xi_j)}\dfrac{1}{\xi_i-\xi_j}, & i\neq j, 0\le i,j\le P \\ 0, & i=j, 1\le i\le P-1 \\ \dfrac{P(P+1)}{4}, & i=j=P \end{cases} \tag{23}$$

이렇게 구해진 행렬식을 요소별로 합하면 전체 행렬 **M**, **D** 그리고 **K**를 구할 수 있으며 이 값들을 이용하여 다음과 같이 η 및 u 값을 구할 수 있다.

$$\eta^{n+1} = \eta^n + \mathbf{M}^{-1}\frac{\Delta t}{12}(23\mathbf{E^n} - 16\mathbf{E^{n-1}} + 5\mathbf{E^{n-2}}) \tag{24}$$

$$u^{n+1} = u^n + [\mathbf{M} - (b_1+b_2)h^2\mathbf{K}]^{-1} \frac{\Delta t}{12}(23\mathbf{F^n} - 16\mathbf{F^{n-1}} + 5\mathbf{F^{n-2}}) \tag{25}$$

여기서, 윗첨자 n은 n번째 시간항을 의미하며, Δt는 시간간격, **E**와 **F**는 각각 식 (11) 및 (12)의 오른쪽 항을 의미한다. 이렇게 u^{n+1}값이 구해지면 이 값을 이용하여 w^{n+1}을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$w^{n+1} = -(a_1+a_2)h^3\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}u^{n+1} \tag{26}$$

3. 결과 분석

규칙파 및 고립파 조건에서 Legendre 요소를 사용한 유한요소모형의 우수성을 검토해 보았다. 각각의 파에 대하여 Lagrangian 요소를 사용하면서 식 (14)의 행렬식을 직접 푼 경우(La-A), lumping 을 사용한 경우(La-B) 그리고 Legendre 요소를 사용하면서 행렬식을 직접 푼 경우(Le-A)와 수치적분을 이용하여 푼 경우(Le-B), 이렇게 4개의 경우에 대하여 계산하여 결과값을 비교하였다.

규칙파의 경우, 초기 조건 및 경계 조건은 다음과 같이 설정하였다.

$$\eta(x,0) = \eta_0\sin(\mathrm{kx}) \tag{27a}$$
$$u(x,0) = c\,\eta(x,0) \tag{27b}$$
$$w(x,0) = -(a_1+a_2)h^3k^2c\,\eta(x,0) \tag{27c}$$
$$\eta(x_1,t) = \eta_0\sin(kx_1-\omega t) \tag{27d}$$
$$u(x_1,t) = c\,\eta(x_1,t) \tag{27e}$$
$$w(x_1,t) = -(a_1+a_2)h^3k^2c\,\eta(x_1,t) \tag{27f}$$
$$\eta(x_2,t) = \eta_0\sin(kx_2-\omega t) \tag{27g}$$
$$u(x_2,t) = c\,\eta(x_2,t) \tag{27h}$$
$$w(x_2,t) = -(a_1+a_2)h^3k^2c\,\eta(x_2,t) \tag{27i}$$

여기서, x_1 및 x_2는 각각 영역의 시작점과 끝점의 위치이다. η_0는 진폭을 의미하며 파속 c와 각속도 ω는 각각 다음 식을 이용하여 구할 수 있다.

$$c = \frac{\omega}{kh[1-(a_1+a_2)k^2h^2]} \tag{28}$$

$$\frac{\omega^2}{ghk^2} = \frac{1-(a_1+a_2)k^2h^2}{1-(b_1+b_2)k^2h^2} \tag{29}$$

규칙파에 관한 수치 모의는 다음과 같은 조건에서 수행하였다. 상대수심(kh)은 0.167로 설정하여 천해 조건을 만족하도록 하였으며 파고는 0.01 m, 수심은 3.2 m로 하여 약 비선형을 만족하도록 하였다. 시간 간격 Δt는 0.01초로 하여 시간 차분에 의한 수치오차는 최소화하였다. Fig. 2는

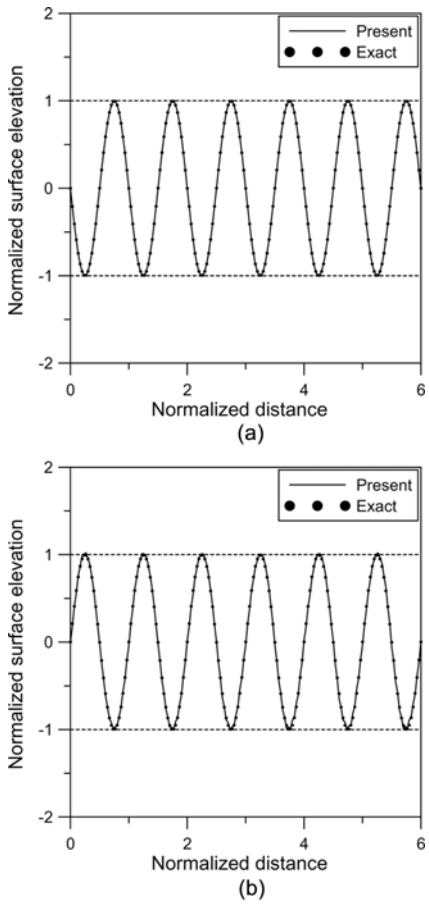

Fig. 2. Comparison of solutions between present and analytical solutions for: (a) t=0.5T; (b)5T.

t=0.5T 및 t=5T에서의 본 연구의 유한요소모형의 결과와 해석해를 비교한 그림이다. 여기서 T는 입사파의 주기를 의미한다. 유한요소모형에서는 파장당 격자를 10개로 나누고 보간 함수로는 Lagrangian함수를 사용하였다. 그림에서 보여지듯이 전체적으로 두 결과가 잘 일치하는 것을 알 수 있다. 해의 정확성을 비교하기 위하여 다음과 같이 정의되는 L^{∞}오차를 계산하여 비교해 보았다.

$$\|\eta-\overline{\eta}\|_{L^{\infty}} = \frac{\max_j|\eta_j-\overline{\eta}_j|}{\eta_0} \quad \text{for} \quad j=1,\ldots,N_{dof} \tag{30}$$

여기서 N_{dof}는 절점의 총 개수를 의미한다.

Fig. 3은 10주기 동안 프로그램을 실행한 후에 본 연구에서 사용한 유한요소모형의 결과와 해석 해를 비교한 그림이다. 행렬식을 직접 적분하여 푼 경우에는 Lagrangian 보간 함수를 사용하거나 Legendre 보간 함수를 사용하여도 큰 차이를 보이지 않았다. 두 경우 모두 파장당 3개의 요소를 사용하면 오차가 $O(10^{-1})$ 정도의 값을 보이면서 수렴하기 시작하였다. 그러나 대각행렬을 구성하는 경우는 Lagrangian 보간 함수를 사용하는 경우와 Legendre 보간 함수를 사용하는 경우에 어느 정도 차이를 보였다. 전체적으로 Legendre 보간 함수를 사용하는 것이 작은 오차를 나타내면서 Lagrangian 보간 함수를 사용하는 경우에는 파장당 6개 이상의 요소를 사용하여야만 $O(10^{-1})$ 정도로 오차가 수렴하였으나 Legendre 보간 함수를 사용하는 경우에는 파장당 4개의 요소를 사용하여도 비슷한 오차가 나오면서 수렴하였다.

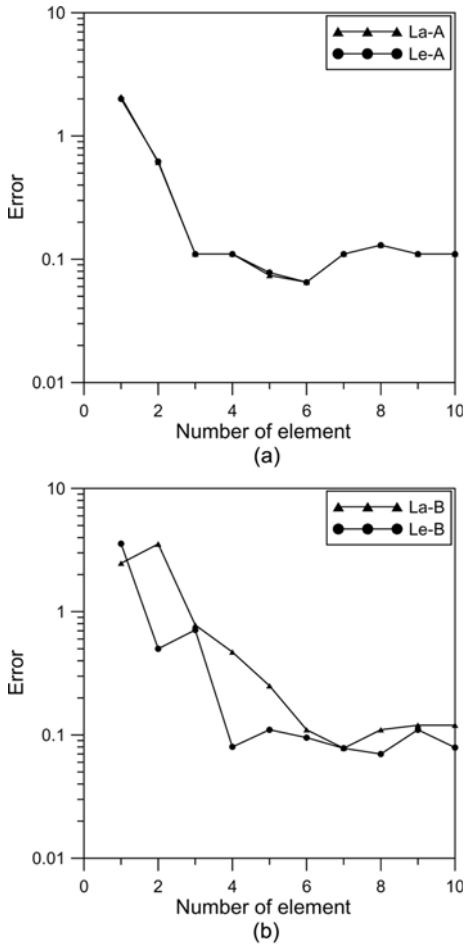

Fig. 3. Comparison of errors obtained by using Lagrangian (La) and Legendre (Le) interpolation function for periodic wave: (a) full matrix; (b) diagonal matrix.

다음으로, 고립파에 대하여 해의 정확성을 검토해 보았다. 고립파는 해의 분산성과 비선형성이 균형을 이루어 진행하는 파로서 비선형 모델의 검토용으로 많이 활용된다. Wei and Kirby(1995)는 Nwogu의 Boussinesq 방정식에 대하여 다음과 같은 해석해를 제시하였다.

$$\xi(x,t) = a_1\text{sech}^2(b(x-ct)) + a_2\text{sech}^4(b(x-ct)) \tag{31}$$

$$u(x,t) = a\text{sech}^2(b(x-ct)) \tag{32}$$

여기서 $c=\sqrt{g(\eta_0+h)}$ 이며 a_1, a_2, a 및 b는 각각 다음과 같이 정의된다.

$$a_1 = \frac{C^2-gh}{3[(\alpha+1/3)gh-\alpha C^2]}h \tag{33a}$$

$$a_2 = \frac{(C^2-gh)^2}{2ghC^2}\frac{[(\alpha+1/3)gh+2\alpha C^2]}{[(\alpha+1/3)gh-\alpha C^2]}h \tag{33b}$$

$$a = \frac{C^2-gh}{C} \tag{33c}$$

$$b = \left\{\frac{C^2-gh}{4[(\alpha+1/3)gh^3-\alpha h^2C^2]}\right\}^{1/2} \tag{33d}$$

여기서, $\alpha=\theta^2/2+1/2$이다. 규칙파와 마찬가지로 식 (31)과 (32)를 이용하여 η, u 및 w에 대하여 초기조건과 경계조건을 준 후에 영역 내 요소의 수에 변화를 주면서 수치모의를 수행하였다. 계산 조건은 다음과 같다. 수심은 0.45 m, 파고는 0.045 m, 그리고 영역의 길이는 100 m로 하였으며 시간 간격은 0.01초로 하여 시간 차분에 의한 오차는 최소화하였다. Fig. 4는 영역을 100개의 요소로 구성한 후 각각 5초 및 30초가 지난 후에 파고 분포를 나

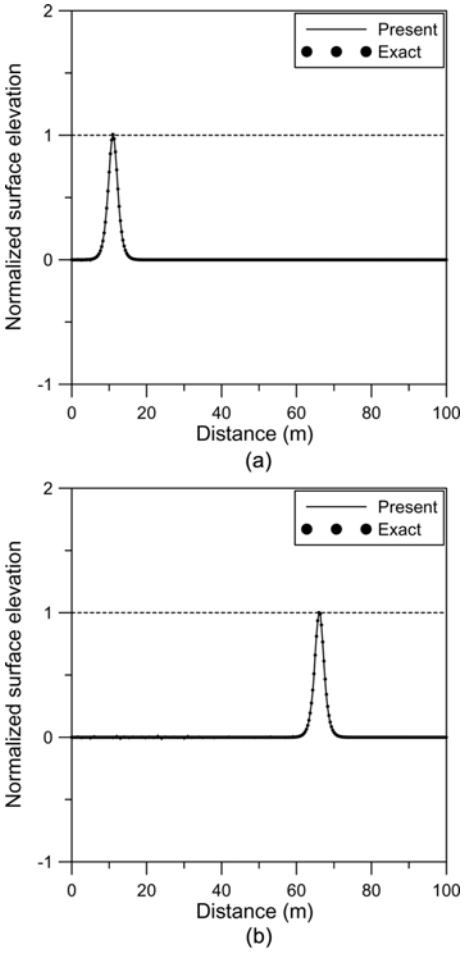

Fig. 4. Comparison of solitary wave between present and analytical solutions for: (a) t=5 sec; (b) t=30 sec.

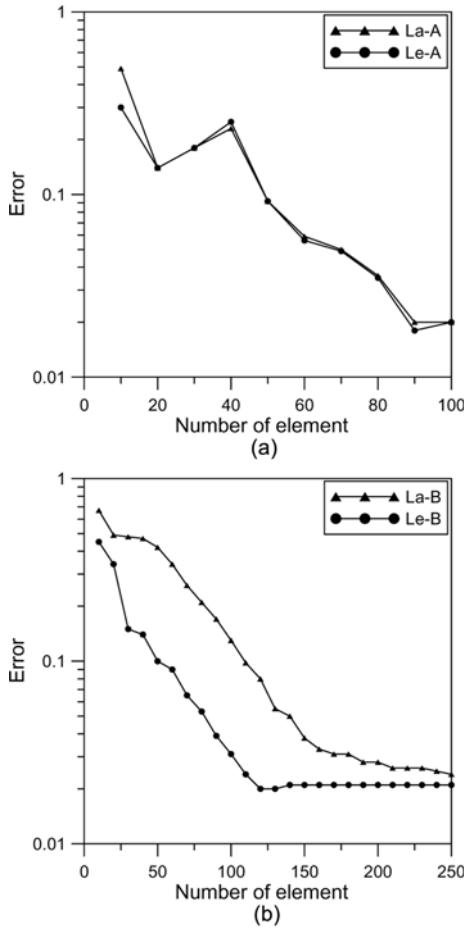

Fig. 5. Comparison of errors obtained by using Lagrangian (La) and Legendre (Le) interpolation function for solitary wave: (a) full matrix; (b) diagonal matrix.

타낸 그림이다. 구간이 충분히 나누어졌을 경우에는 그림에서 보는 바와 같이 해석해와 본 연구에서 계산한 수치해가 매우 잘 일치하는 것을 볼 수 있었다.

Fig. 5는 해석해와 본 연구에서 구한 수치해의 오차를 비교한 것이다. 오차는 식 (30)에 의해 정의된다. 식 (14) 질량 행렬을 해석적으로 적분하였을 때의 결과는 Lagrangian 보간 함수를 사용하였을 경우나 Legendre 보간 함수를 사용 하였을 경우 모두 오차가 비슷하게 나왔다. 구간 내 요소의 증가함에 따라 전체적으로 오차는 감소하면서 요소개수가 90~100개 정도 상황에서 오차가 $O(10^{-2})$ 정도로 수렴하기 시작하였다. 질량 행렬을 대각 행렬로 만들기 위하여 lumping을 하였을 경우와 수치적분을 하였을 경우에는 오차가 큰 차이를 보였다. Legendre 보간 함수를 수치 적분하였을 경우에는 직접 적분하였을 경우보다는 약간 큰 오차를 보이면서 요소개수 130개 정도에서 오차가 $O(10^{-2})$ 근처로 수렴하였다. 그러나, Lagrangian 보간 함수를 사용하면서 lumping을 하였을 경우에는 요소의 개수를 250개 정도를 사용하여도 수렴하는 결과를 보여주지 못하였다.

Fig. 3과 5의 결과를 이용하여 원하는 정도의 정확도를 얻기 위해 필요한 프로그램의 실행 시간을 계산해 보았다. 프로그램의 실행 시간은 Fortran 명령어 cpu_time을 사용하였다. 규칙파 및 고립파에 대하여 La-A와 Le-A는 비슷한 정도를 가지고 있기 때문에 A에 관하여는 La-A 하나를 사용하였다. 원하는 정확도를 $O(10^{-1})$로 가정하면 파장당 요소의 수는 La-A, La –B, Le-B에 대하여 규칙파일 경우에는 각각 3개, 6개, 4개가 되며, 고립파일 경우에는 계산 영역(100 m 기준)당 50개, 100개, 50개가

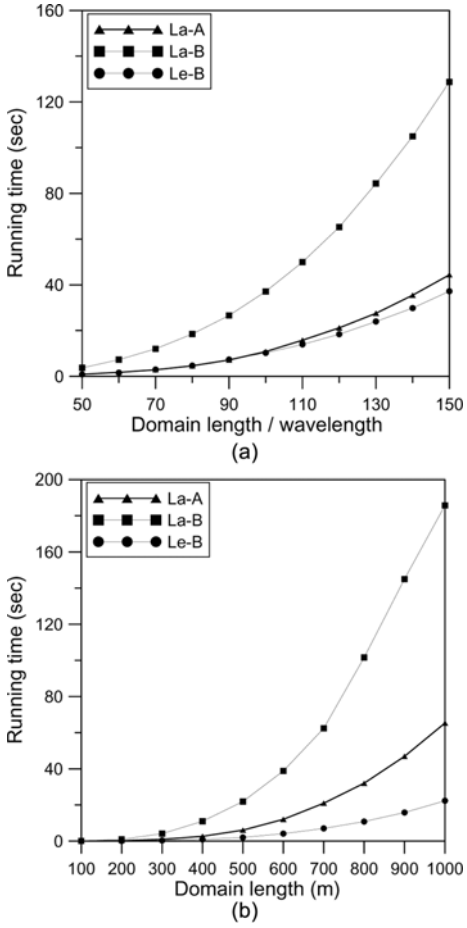

Fig. 6. Comparison of running time obtained by using Lagrangian (La) and Legendre (Le) interpolation function for: (a) periodic wave; (b) solitary wave.

된다. Fig. 6은 앞서 말한 요소의 수를 유지하면서 계산 영역에 따른 실행 시간을 나타낸 결과이다. 여기서 실행 시간은 한 시간 간격(Δt)을 수행하는데 걸리는 시간을 의미한다. 그림을 보면 Legendre 요소의 우수성을 잘 알 수 있다. 규칙파 및 고립파에 대하여 Le-B가 가장 적은 시간이 걸렸으며, La-A의 경우에는 다른 값들에 비하여 월등히 많은 시간을 요구하기 때문에 매우 비효율적이라는 것을 알 수 있다. 전체적으로 영역의 크기가 커질수록, 즉 행렬의 크기가 커질수록 계산 시간은 기하급수적으로 증가하였으며 각 그래프의 차이 또한 증가하였다. 결국, 행렬식의 크기가 커질수록 Le-B 를 사용하면 효율적임을 알 수 있다. 그러나, 여기서 주의할 점은 여기서 보인 수치 값들이 절대적인 값이 아니라는 것이다. 즉 영역의 크기나 원하는 정확도에 따라 수치적인 값들은 바뀔 수가 있다. 그러나 행렬식의 크기가 큰 경우에 Le-B가 효율적이라는 결론은 변하지 않을 것이다.

4. 결 론

본 연구에서는 3차의 Lagrangian 보간 함수와 Legendre 보간 함수를 유한요소모형에 적용하여 Legendre 보간 함수가 가지는 우수성을 검토하였다. 기존에 이와 관련된 연구는 고차의 Legendre cardinal 보간 함수와 선형 보간 함수를 비교한 것이다. 이 경우, Legendre 보간 함수를 사용하여 얻은 결과는 보간 함수 자체가 가지는 특성에서 얻을 것일 수도 있지만 고차의 보간 함수가 가지는 특성으로 인한 결과일 수 있다. 따라서 본 연구에서는 동일한 차수의 보간 함수를 사용함으로써 Legendre 보간 함수가 가지는 특징에 대하여 검토를 하였다. 고차의 유한요소모형을 적용하는 경우에는 Lagrangian 고차 다항식을 사용하면서 절점을 등 간격으로 배치시키는데 이럴 경우 행렬식이 커져서 계산 시간이 오래 걸리거나 이를 해결하기 위하여 mass lumping을 사용하면 해의 정확성이 떨어지는 문제점이 발생한다. 그러나 Legendre 보간 함수를 사용하는 경우에는 수치적분을 통하여 이와 같은 문제점들을 해결할 수 있다. 규칙파에 적용하였을 경우에는 La-A(or Le-A), Le-B, La-B 순으로 정확도를 보였으며 동일한 정확도를 가지는 상황에서 계산 시간을 구해보면 작은 영역에서는 La-A(or Le-A), Le-B, La-B 순으로 계산 시간이 짧았으며 큰 영역에서는 Le-B, La-A(or Le-A), La-B 순으로 각각 계산 시간이 적게 소요되었다. 고립파에 적용하였을 경우에는 규칙파와 마찬가지로 La-A(or Le-A), Le-B, La-B 순으로 정확도를 보였으며 계산 시간에서는 영역에 상관없이 Le-B이 가장 적게 시간이 소요되었으며 그 다음으로 La-A(or Le-A), La-B 순이다. 결론적으로, 계산 시간을 고려하지 않는 경우에는 La-A 나 Le-A를 사용하는 것이 가장 정확한 결과를 얻을 수가 있다. 그러나 영역의 크기가 증가하여 계산 시간이 많이 소요되는 경우에는 Le-B를 사용하면 계산 시간을 줄이면서 어느 정도 원하는 정확도를 가지는 결과들을 얻을 수 있다는 것을 알 수 있다.

참고문헌

Eskilsson, C., Sherwin, S.J. (2003) An hp/spectral element model for efficient long-time integration of Boussinesq-

type equations, Coastal Engineering Journal, Vol. 45, No. 2, pp. 295-320.

Eskilsson, C., Sherwin, S.J., Bergdahl, L. (2006) An unstructured spectral/hp element model for enhanced Boussinesq-type equations, Coastal Engineering, Vol. 53, pp. 947-963.

Gabbi, M.F., Kirby, J.T. (1999) Wave evolution over submerged sills: tests of a high-order Boussinesq model. Coastal Engineering, Vol. 37, pp. 57-96.

Kato, S., Takagi, T., Kawahara, M. (1998) A finite element analysis of mach reflection by using the Boussinesq equation, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 28, pp. 617-631.

Madsen, P.A., Murray, I.R. and Sorensen, O.R. (1991) A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics, Coastal Engineering, Vol. 15, pp. 371-388.

Nwogu, O. (1993) Alternative form of Boussinesq equations for nearshore wave propagation, Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering, Vol. 119, pp. 618-638.

Panchang, V., Chen, W., Xu, B., Schlenker, K., Demirbilek, Z., Okihiro, M. (2000) Exterior bathymetric effects in elliptic harbor wave models, Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering, Vol. 126, pp. 71-78.

Park, W.S., Chun, I.S., Jeoung, W.M. (1994) Infinite element for the analysis of harbor resonances, Journal of Korean Society of Coastal and Ocean Engineers, Vol. 6, pp. 139-149.

Patera, A.T. (1984) A spectral element method for fluid dynamics: Laminar flow in a channel expansion, Journal of Computational Physics, Vol. 54, pp. 468-488.

Peregrine, D.H. (1967) Long waves on a beach, J. Fluid Mech., No. 27, pp. 815-827

Sanz-Serna, J.M. and Christie, I. (1981) Petrov-Galerkin methods for nonlinear dispersive waves. Journal of Computational Physics, Vol. 39, pp. 94-102.

Walkley, M. and Berzins, M. (1999) A finite element method for the one-dimensional extended Boussinesq equations, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 29, pp. 143-157.

Walkley, M. and Berzins, M. (2002) A finite element method for two-dimensional extended Boussinesq equation, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 39, pp. 865-885.

Witting, J. M. (1984) A unified model for the evolution of nonlinear water waves, Journal of computational physics, Vol. 56, No. 2, pp. 203-239.

Woo, S.-B. and Liu, P.L.-F. (2001) A Petrov-Galerkin finite element model for one-dimensional fully non-linear and weakly dispersive wave propagation, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 37, pp. 541-575.

Woo, S.-B. and Liu, P.L.-F. (2004a) Finite-element model for modified Boussinesq equations. I: Model development, Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering, Vol. 130, pp. 1-16.

Woo, S.-B. and Liu, P.L.-F. (2004b) Finite-element model for modified Boussinesq equations. II: Applications to nonlinear harbor oscillations, Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering, Vol. 130, pp. 17-28.

Tsay, T., Liu, P.L.-F. (1983) A finite element model for wave refraction and diffraction, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 72, pp. 373-384.

Received December 9, 2008
Accepted March 18, 2009