

단일계단 지형에서 변분근사법과 고유함수 전개법에 의한 파랑변형 비교 Comparison between Variational Approximation and Eigenfunction Expansion Method for Wave Transformation over a Step Bottom

서승남*
Seung-Nam Seo*

요 지 : 단일 계단지형 위를 지나는 선형 파랑의 변형을 계산하기 위해 변분근사법과 고유함수 전개법을 사용하였다. 이들 수치해를 비교에서 반사율과 투과율 그리고 해면변위는 거의 일치한다. 그러나 계단 경계에서 유속 정합조건이 부여되었음에도 불구하고 계산된 x 방향 유속의 수직구조는 차이를 보인다.

핵심용어 : 파랑변형, 단일 계단지형, 고유함수 전개법, 변분근사법, 수치실험

Abstract : In order to compute linear wave transformation over a single step bottom, both variational approximation and eigenfunction expansion method are used. Both numerical results are in good agreement for reflection and transmission coefficients, surface displacement respectively. However x velocity profiles at the boundary of step are seen to be different to each other even though x velocity matching condition is used.

Keywords : wave transformation, single-step topography, eigenfunction expansion method, variational approximation, numerical experiment

1. 서 론

계단지형은 실제 지형을 극히 이상화한 단순 지형으로 수심이 일정한 구간 별로 구분하면 고유함수가 존재하여 이에 대한 일차결합으로 해를 구성할 수 있고 수학적으로 다루기 쉬운 장점이 있다. 일차결합에 포함되는 미지 상수는 정합조건을 이용하여 정하며 이로부터 지형에 의한 파랑변형을 계산할 수 있다. 이러한 방법 가운데 고유함수 전개법(EFEM, eigenfunction expansion method)과 변분근사법(VM, variational approximation)이 대표적인 방법이라 평가된다. 본 논문에서는 이 두 방법의 해의 특성을 해석적 방법과 수치실험을 통해 분석하고자 한다.

천해역에서 진행파만을 이용한 고유함수 전개법을 적용하여 Lamb(1932)은 단일 계단지형에 직교 입사파랑에 의한 반사율과 투과율을 계산하였고 Mei(1989)는 천해파에 대한 기존 연구결과를 정리하였다. Takano(1960)는 억

류파(evanescent wave)를 포함한 해로 확장하였고 Kirby and Dalrymple(1983)은 Takano의 방법을 이용하여 사각 입사파랑의 해를 구하였다. 그리고 Kirby et al.(1987)은 Kirby and Dalrymple의 방법을 이용하여 흐름이 존재하는 trench에서의 사각 입사파랑의 해로 확장하였다.

고유함수 전개법에 관한 국내 연구로는 서·전(1992)은 Kirby et al.(1987)의 방법을 이용하여 흐름이 존재하는 trench에서의 생성되는 억류파의 영향을 분석하였다. 조·이(1998)은 연안사주와 원호형 지형을 복합 계단지형으로 모사하는 방법으로 파랑변형의 수치해를 구하였다. 그리고 서(2008)은 고유함수 전개법과 산란체법을 이용하여 다중 계단지형에 대한 파랑변형을 계산하였다.

변분근사법은 Miles(1967)가 제시하였으며 억류파 성분을 진행파 성분으로 근사하여 단일 계단지형의 경우 해석해를 얻을 수 있다. 그러나 이 해석해는 파수의 함수로 표현되기 때문에 수치계산이 필요하다. Miles는 억류파 근사에 도입한 미지 유속을 변분형태의 적분식으로 변형하

*한국해양연구원 연안개발·에너지연구부 책임연구원(Coastal Engineering & Ocean Energy Research Department, KORDI, Ansan PO. Box 29, Seoul 425-600, Korea. snseo@kordi.re.kr)

여 이를 가장 간단한 하나의 진행파 성분을 사용하였다. 외형적으로는 진행파 성분 하나만이 표현되며 본 수치실험 결과에 의하면 이 방법의 결과는 고유함수 전개법의 결과와 거의 같다. Miles가 구성한 변분형태와 근사는 Ritz 기법에 속하며 한 두 개의 근사로도 상당히 정밀한 해를 구할 수 있다(Greenberg, 1978). Miles(1982)는 trench에 의한 파랑변형을 계산하기 위해 등각사상법과 변분근사법을 각각 사용하였다.

한편 Devillard et al.(1988)는 Miles의 산란행렬을 변형한 변환행렬을 도입하여 축차적으로 파랑변형의 해를 구하는 기법을 제시하였다. 위의 변환행렬을 이용하여 O'Hare and Davies(1992)는 연안사주 지형을 복합 계단으로 구성하여 직교 입사파랑의 수치해를 구하였으며 수리실험의 결과와 수치해는 대체적으로 일치한다.

변분근사법에 관한 국내 연구는 거의 없으며 Miles가 식 유도에 사용한 행렬식은 표현이 매우 간결하나 전개과정에 상당한 주의가 필요함으로 본 논문에서는 직접적인 방법을 사용하여 재유도하였다. 이 방법은 다중 계단지형에 대한 변분근사식의 유도에 보다 쉽고 확장이 용이할 것으로 판단되기 때문에 그 유도과정을 제 2절에 자세히 기술하였다. 또한 기존 연구 결과와 최근 연구를 종합하여 변분근사법과 고유함수 전개법의 관계를 정리하고 변분근사법의 해가 에너지보존칙을 만족함을 해석적으로 입증하였다. 위의 두 방법에 대한 수치해를 비교하기 위한 수치실험 결과는 제 3절에 기술하였다.

2. 단일계단 지형의 해

단일 계단지형 위를 지나는 파랑의 변형은 속도포텐셜 ϕ 의 Laplace 미분식으로 나타낼 수 있다. Fig. 1과 같이 x 축은 정지해면 상에 위치하고 z 축은 해면상에서 상향을 양의 방향으로 y 축은 오른손 좌표계 정의에 따른 방향을 각각 양으로 정한다. 그리고 y 방향에 대한 지형 변화율이 없는 것으로 가정한다.

2.1 경계치 문제

본 논문에서 대상 파랑은 각주파수 ω 인 단주기이고 입사각 θ_I 로 사각 입사하는 파랑의 변형으로 선형파를 대상으로 한다. 이 가정아래서는 y 방향 파수(b)가 일정하기 때문에 시간성분과 y 방향 성분 $\exp(iy - i\omega t)$ 을 분리한 속도포텐셜을 사용할 수 있다. 그러면 선형 경계치 문제는 식 (1)로 나타낼 수 있다.

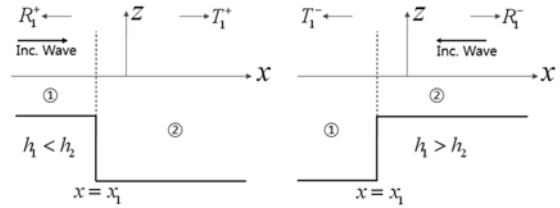


Fig. 1. Definition Sketches of a step bottom.

$$\phi_{xx} + \phi_{zz} - b^2\phi = 0, -h < z < 0 \quad (1a)$$

$$\phi_z - \frac{\omega^2}{g}\phi = 0, z = 0 \quad (1b)$$

$$\phi_z = 0, z = -h \quad (1c)$$

$$\phi_x = 0, \text{ 계단의 직벽에서} \quad (1d)$$

여기서 h 는 수심, g 는 중력가속도이다. x_1 는 지형 경계선의 좌표이고 속도포텐셜의 크기가 한정되어야 하기 때문에 방사조건이 부가된다.

계단지형은 수심이 일정한 구역으로 분리할 수 있고 이후 식에 존재하는 아래첨자 i 는 구간을 의미한다. 구역 i 에서 수심이 일정하기 때문에 변수분리법을 사용할 수 있고 이로부터 얻어지는 고유함수로 속도포텐셜을 전개할 수 있다. 고유함수를 해면조건에 대입하면 식 (2)로 표현되는 파랑분산식을 얻는다.

$$\omega^2 = gk_{i,0} \tanh k_{i,0} h_i = -gk_{i,j} \tanh k_{i,j} h_i$$

$$a_{i,0} = \sqrt{k_{i,0}^2 - b^2}, a_{i,j} = \sqrt{k_{i,j}^2 + b^2} \quad (2)$$

식 (2)의 첫 식의 우변 첫 항은 진행파에 대한 것으로 파수는 하나만 존재하는 반면에 경계 부근에만 존재하는 억류파인 둘째 항으로부터 계산되는 파수는 무한개이다. 여기서 $a_{i,n}$ ($n=0,1,\dots$)는 방향의 파수이다. 선형파를 대상으로 하기 때문에 진행파와 억류파를 중첩한 속도포텐셜은 식 (3a)가 된다.

$$\begin{cases} \phi_1 = (p_1^+ e^{ia_{1,0}x} + p_1^- e^{-ia_{1,0}x}) \chi_{1,0}(z) + \sum_{j=1}^{\infty} s_{1,j}^- e^{a_{1,j}(x-x_1)} \chi_{1,j}(z), & x \leq x_1 \\ \phi_2 = (p_2^+ e^{ia_{2,0}x} + p_2^- e^{-ia_{2,0}x}) \chi_{2,0}(z) + \sum_{j=1}^{\infty} s_{2,j}^+ e^{-a_{2,j}(x-x_1)} \chi_{2,j}(z), & x \geq x_1 \end{cases} \quad (3a)$$

$$\chi_{i,0}(z) = \frac{\sqrt{2} \cosh k_{i,0}(z+h_i)}{\sqrt{h_i + \frac{g}{\omega^2} \sinh^2 k_{i,0} h_i}} \quad \chi_{i,j}(z) = \frac{\sqrt{2} \cosh k_{i,j}(z+h_i)}{\sqrt{h_i - \frac{g}{\omega^2} \sinh^2 k_{i,j} h_i}} \quad (3b)$$

식 (3a)에서 상수 p 의 위첨자 +는 양의 방향, -는 음의 방향으로 각각 진행되는 파랑을 의미하고 미지상수 s 는 경계선 부근에 억류된 파랑을 의미한다. 본 논문에서는 좌우 양방향에서 파랑이 입사하는 경우를 다루기 때문에 조합 p_1^+ 와 p_2^- , p_1^- 와 p_2^+ 가운데 하나는 주어지나 또 다른 조합은 미지수이다. 식 (3b)에서 기저함수 $\chi_{i,n}(n=0,1,2,\dots)$ 를 제공하여 해단 중심에서 해면까지 적분하면 1이 되므로 이들은 단위직교 기저함수(orthonormal basis function)이다.

식 (1)의 해는 식 (3a)와 같이 기저함수의 일차결합으로 표현되었기 때문에 해를 구하는 문제는 식 (3a)에 포함된 미지상수를 구하는 문제로 바뀐다. 이 미지상수는 경계선에서의 정합조건 식 (4)로부터 얻을 수 있고 x 방향 유속 U 를 식 (4b)와 같이 정의한다.

$$\phi_1(x_1, z) = \phi_2(x_1, z) \quad (4a)$$

$$U(x_1, z) \equiv \begin{cases} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} = \frac{\partial \phi_2}{\partial x}, & -\min(h_1, h_2) \leq z \leq 0 \\ 0, & -\max(h_1, h_2) \leq z \leq -\min(h_1, h_2) \end{cases} \quad (4b)$$

한편 속도포텐셜을 구하게 되면 해면함수 η 는 동력학 해면조건인 식 (5)로부터 구한다.

$$\eta(x, y) = \frac{i\omega}{g} \phi(x, 0) e^{iby} \quad (5)$$

2.2 $h_1 < h_2$ 의 경우

고유함수 전개법에서는 식 (3a)를 식 (4)에 대입하고 미지상수를 구하기 위해 중심이 낮은 지역의 기저함수들을 곱하고 해저에서 수면까지 적분하여 미지상수에 대한 연립방정식을 구성한다. 억류파의 개수를 N 개로 정하면 $2(N+1)$ 개의 연립방정식이 만들어지고 이를 풀면 식 (3a)의 모든 미지상수가 구해짐으로 해를 구할 수 있다. 고유함수 전개법으로부터 해를 구하는 과정은 위에 기술한 바와 같이 간단하며 자세한 사항은 서(2008)를 참고하기 바란다.

좌측에서 입사하는 파랑에 변분근사법을 사용하게 되면 억류파 미지상수 s 는 진행파로 표현되기 때문에 결국 미지수 p_1^- 와 p_2^+ 를 구하는 문제로 귀착된다. 식 (3a)을 x 에 대해 미분하고 $x=x_1$ 를 대입하면 이는 U 가 된다. 그리고

결과 식에 $\chi_{1,n}(n=0,1,\dots)$ 를 각각 곱한 후 구간 $(-h_1, 0)$ 에 대해 적분하면 기저함수의 직교성에 의해 식 (6)을 얻는다.

$$\int_{-h_1}^0 U \chi_{1,0} dz = ia_{1,0}(p_1^+ e^{ia_{1,0}x_1} - p_1^- e^{-ia_{1,0}x_1})$$

$$\int_{-h_1}^0 U \chi_{1,j} dz = a_{1,j} s_{1,j}^- \quad (6)$$

마찬가지 방법으로 $\chi_{2,n}(n=0,1,\dots)$ 를 각각 곱한 후 구간 $(-h_2, 0)$ 에 대해 적분하면 식 (7)을 얻는다. 이 경우에는 식 (4) U 의 정의에 따라 적분하한은 $-h_1$ 으로 변경할 수 있다.

$$\int_{-h_2}^0 U \chi_{2,0} dz = \int_{-h_1}^0 U \chi_{2,0} dz = ia_{2,0}(p_2^+ e^{ia_{2,0}x_1} - p_2^- e^{-ia_{2,0}x_1})$$

$$\int_{-h_2}^0 U \chi_{2,j} dz = \int_{-h_1}^0 U \chi_{2,j} dz = -a_{2,j} s_{2,j}^+ \quad (7)$$

억류파에 대한 항을 소거하기 위해 식 (6)과 (7)의 둘째 식을 식 (3a)에 대입하고 경계선에서 동역학 정합조건 ($\phi_1 = \phi_2$)을 이용하면 식 (8)이 얻어진다.

$$(p_1^+ e^{ia_{1,0}x_1} + p_1^- e^{-ia_{1,0}x_1}) \chi_{1,0}(z) - (p_2^+ e^{ia_{2,0}x_1} + p_2^- e^{-ia_{2,0}x_1}) \chi_{2,0}(z)$$

$$= - \int_{-h_1}^0 U(\xi) G(\xi, z) d\xi$$

$$G(\xi, z) \equiv \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{\chi_{1,j}(\xi) \chi_{1,j}(z)}{a_{1,j}} + \frac{\chi_{2,j}(\xi) \chi_{2,j}(z)}{a_{2,j}} \right] \quad (8)$$

식 (9)의 함수 $G(\xi, z) = G(z, \xi)$ 이므로 대칭성을 갖는다. 유속 U 를 진행파 성분으로 표현하기 위해 새로운 미지함수 u_1 와 u_2 를 도입하여 식 (9)와 같이 가정한다.

$$U(z) \equiv (p_1^+ e^{ia_{1,0}x_1} + p_1^- e^{-ia_{1,0}x_1}) u_1(z)$$

$$+ (p_2^+ e^{ia_{2,0}x_1} + p_2^- e^{-ia_{2,0}x_1}) u_2(z) \quad (9)$$

식 (9)를 식 (8)에 대입하여 정리하고 진행파 성분은 독립적으로 변할 수 있으므로(즉 선형독립이므로) 이로부터 식 (10)이 성립한다.

$$\chi_{1,0}(z) = - \int_{-h_1}^0 u_1(\xi) G(\xi, z) d\xi$$

$$\chi_{2,0}(z) = \int_{-h_1}^0 u_2(\xi) G(\xi, z) d\xi \quad (10)$$

그리고 식 (10)에 미지함수 u_j 를 곱해 구간 $(-h_1, 0)$ 에 대해 적분하면 식 (11)이 된다.

$$(-1) \int_{-h_1}^0 \chi_{1,0}(z) u_j(z) dz = \int_{-h_1}^0 \int_{-h_1}^0 u_i(\xi) G(\xi, z) u_j(z) d\xi dz \quad (11)$$

한걸음 더 나아가 식 (11)을 식 (12)와 같은 변분형태로 변형할 수도 있다.

$$\frac{\int_{-h_1}^0 \chi_{i,0}(z) u_i(z) dz}{(-1)^j \frac{\int_{-h_1}^0 \chi_{i,0}(z) u_j(z) dz \int_{-h_1}^0 \chi_{j,0}(z) u_i(z) dz}{\int_{-h}^0 \int_{-h_1}^0 u_i(\xi) G(\xi, z) u_j(z) d\xi dz}} \quad (12)$$

식 (12)는 식 (11)에 비해 u_i 에 포함된 상수에 대해 무관한 장점이 있다. 즉 $u_i(z) = c_i \chi_i(z)$ 을 대입하면 식 (12)에서는 상수 c_i 가 상쇄되나 식 (11)에서는 상수가 존재한다.

이제 미지상수들에 대한 연립방정식을 구성하기 위해 식 (9)를 식 (6)과 (7)의 첫 식에 대입한다.

$$\begin{aligned} & p_1^- e^{-ia_{1,0}x_1} \left(\int_{-h_1}^0 u_1 \chi_{1,0} dz + ia_{1,0} \right) + p_2^+ e^{ia_{2,0}x_1} \int_{-h_1}^0 u_2 \chi_{1,0} dz \\ &= p_1^+ e^{ia_{1,0}x_1} (ia_{1,0} - \int_{-h_1}^0 u_1 \chi_{1,0} dz) - p_2^- e^{-ia_{2,0}x_1} \int_{-h_1}^0 u_2 \chi_{1,0} dz \\ & p_1^- e^{-ia_{1,0}x_1} \int_{-h_1}^0 u_1 \chi_{2,0} dz + p_2^+ e^{ia_{2,0}x_1} \left(\int_{-h_1}^0 u_2 \chi_{2,0} dz - ia_{2,0} \right) \\ &= -p_1^+ e^{ia_{1,0}x_1} \int_{-h_1}^0 u_1 \chi_{2,0} dz - p_2^- e^{-ia_{2,0}x_1} \left(\int_{-h_1}^0 u_2 \chi_{2,0} dz + ia_{2,0} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

식 (13)의 연립방정식을 풀기 위해서 미지함수 u_i 는 Miles (1967)과 같이 u_i 를 식 (14a)로 설정하고 수식 전개에 편의상 다음 변수를 정의한다. 변수 X_1 은 식 (8)과 구간 $(h_1, 0)$ 에 대한 기저함수의 직교성을 이용하여 얻는다.

$$u_i(z) = c_i \chi_{i,0}(z), \quad (i = 1, 2) \quad (14a)$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = \sqrt{\frac{a_{2,0}}{a_{1,0}}} \\ \lambda_1 N_1 = \int_{-h_1}^0 \chi_{1,0}(z) \chi_{2,0}(z) dz \\ X_1 = a_{1,0} \int_{-h_1}^0 \int_{-h_1}^0 \chi_{1,0}(\xi) G(\xi, z) \chi_{1,0}(z) d\xi dz \\ \quad = a_{1,0} \sum_{j=1} \frac{\left(\int_{-h_1}^0 \chi_{1,0}(z) \chi_{2,j}(z) dz \right)^2}{a_{2,j}} \end{cases} \quad (14b)$$

입사구역에서 진행파의 x 방향 파수 $a_{1,0}$ 는 실수이나 구역 2의 수심이 깊어 전반사가 일어나는 경우 $a_{2,0}$ 는 허수가 된다. 그러므로 변수 λ_1 은 복소수이고 $\lambda_1 N_1$ 은 항상 실수이다. 한편 X_1 에서 역류파의 x 방향 파수는 식 (2)로부터 실수이므로 이 역시 실수이다. 식 (12)와 (14)를 식 (13)에 대입하면 식 (15)를 얻는다.

$$\begin{bmatrix} -1 + iX_1 & \lambda_1 N_1 \\ -\lambda_1 N_1 & (\lambda_1 N_1)^2 - i\lambda_1^2 X_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^- e^{-ia_{1,0}x_1} \\ p_2^+ e^{ia_{2,0}x_1} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} iX_1 + 1 & -\lambda_1 N_1 \\ \lambda_1 N_1 & -(\lambda_1 N_1)^2 - i\lambda_1^2 X_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^+ e^{ia_{1,0}x_1} \\ p_2^- e^{-ia_{2,0}x_1} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

식 (15)를 진행파의 미지상수에 대해 다시 정리하면 식 (16)을 얻는다.

$$\begin{cases} p_1^- \\ p_2^+ \end{cases} = \begin{bmatrix} R_1^+ & T_1^- \\ T_1^+ & R_1^- \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^+ \\ p_2^- \end{Bmatrix}$$

$$R_1^+ = \frac{N_1^2 - 1 - iX_1}{N_1^2 + 1 - iX_1} e^{2ia_{1,0}x_1}, T_1^+ = \frac{2N_1/\lambda_1}{N_1^2 + 1 - iX_1} e^{i(a_{1,0} - a_{2,0})x_1}$$

$$T_1^- = \frac{2N_1\lambda_1}{N_1^2 + 1 - iX_1} e^{i(a_{1,0} - a_{2,0})x_1}, R_1^- = \frac{1 - N_1^2 - iX_1}{N_1^2 + 1 - iX_1} e^{-2ia_{2,0}x_1} \quad (16)$$

식 (16)은 진행파의 미지상수들에 대한 관계식이고 역류파의 영향이 포함되어 있으며 우변의 행렬은 지형과 파랑의 특성에 대한 함수임을 알 수 있다. 위 식은 선형파의 문제이므로 임의의 파고를 사용할 수 있고 좌측에서 입사하는 파랑의 속도포텐셜(p_1^+)을 1로 정하면 투과파의 속도포텐셜(p_2^+)을 직접 구할 수 있다. 또한 우측에서 입사하는 경우($p_2^- = 1$)도 관련 값을 직접 계산할 수 있다.

식 (16)로 표현된 속도포텐셜의 산란행렬은 Miles의 산란행렬의 식 (5.8)로 변형할 수 있다. Miles 속도포텐셜의 정의인 식 (2.10)를 사각입사로 확장하고 본 논문에서 정의된 식 (3a)과 Miles의 정의를 비교하면 식 (17)이 된다.

$$p_1^+ = -A_1, \quad p_1^- = -B_1, \quad p_2^+ = B_2, \quad p_2^- = A_2 \quad (17)$$

그리고 식 (16)에 $x_1 = 0$ 를 대입하면 Miles의 산란행렬이 얻어진다.

식 (16)에서 역류파를 무시하면($X_1 = 0$) plane-wave 근사해가 되며 이 경우에 기존 결과와 동일함을 보이고자 한다. 서(2008)는 속도포텐셜의 기저함수를 식 (3b)와 다른 함수 $f_{i,n}(n=0,1,\dots)$ 를 사용하였다.

$$f_{i,0}(z) = \cosh k_{i,0}(z + h_i), \quad f_{i,j}(z) = \cos k_{i,j}(z + h_i) \quad (18)$$

식 (18)로부터 계산한 plane-wave 근사해는 식 (19)가 된다.

$$\begin{Bmatrix} \tilde{p}_1^- \\ \tilde{p}_2^+ \end{Bmatrix} = \frac{1}{a_{1,0} I_{12}^2 + a_{2,0} I_{11} I_{22}} \times$$

$$I_{ij} = \int_{-h_1}^0 \cosh k_{i,0}(h_i+z) \cosh k_{j,0}(h_j+z) dz, (i,j=1,2)$$

$$\begin{bmatrix} (a_{1,0}I_{12}^2 - a_{2,0}I_{11}I_{22})e^{2ia_{1,0}x_1} & (2a_{2,0}I_{12}I_{22})e^{i(a_{1,0}-a_{2,0})x_1} \\ (2a_{2,0}I_{11}I_{22})e^{i(a_{1,0}-a_{2,0})x_1} & (a_{2,0}I_{11}I_{22} - a_{1,0}I_{12}^2)e^{-2ia_{1,0}x_1} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \tilde{p}_1^+ \\ \tilde{p}_2^- \end{Bmatrix}$$

$$(19)$$

식 (19)의 둘째 식은 실수이며 이를 이용하면 식 (14b)의 변수 N_1 는 식 (20)이 된다.

$$\lambda_1 N_1 = \int_{-h_1}^0 \frac{\cosh k_{1,0}(h_1+z) \cosh k_{2,0}(h_2+z)}{\sqrt{I_{11}} \sqrt{I_{22}}} dz = \frac{I_{12}}{\sqrt{I_{11}I_{12}}}$$

$$N_1^2 = \frac{a_{1,0}I_{12}^2}{a_{2,0}I_{11}I_{12}} \quad (20)$$

식 (20)를 식 (16)의 plane-wave 근사해에 대입하면 반사파에 대한 값은 일치하나 투과파에 대한 값은 상이하기 때문에 물리변수인 반사율과 투과율을 비교하고자 한다.

진폭 (a_R^+, a_T^+) 은 동력학 해면조건인 식 (5)로부터 계산하고 좌측 입사파에 의한 반사율 (K_R^+) 과 투과율 (K_T^+) 은 식 (16)의 경우 식 (21a)가 되어 동일하다.

$$K_R^+ = \frac{a_R^+}{a_i^+} = \frac{\omega/g|p_1^+| \cosh k_{1,0}h_1/\sqrt{I_{11}}}{\omega/g|p_1^+| \cosh k_{1,0}h_1/\sqrt{I_{11}}}$$

$$= |R_1^+| = \left| \frac{a_{1,0}I_{12}^2 - a_{2,0}I_{11}I_{22}}{a_{1,0}I_{12}^2 + a_{2,0}I_{11}I_{22}} \right|$$

$$K_T^+ = \frac{a_T^+}{a_i^+} = |T_1^+| \frac{\sqrt{I_{11}} \cosh k_{2,0}h_2}{\sqrt{I_{22}} \cosh k_{1,0}h_1}$$

$$= \left| \frac{2a_{1,0}I_{11}I_{12}}{a_{1,0}I_{12}^2 + a_{2,0}I_{11}I_{22}} \right| \frac{\cosh k_{2,0}h_2}{\cosh k_{1,0}h_1} \quad (21a)$$

식 (21a)에서 구역 2의 x방향 진행파수 $a_{2,0}$ 가 허수이면 식 (3a)로부터 파형은 지수 감소함으로 전반사가 발생한다. 그러므로 $x \rightarrow \infty$ 에서 진폭비로 정의되는 반사율은 완전반사로 $K_R^+ = 1$ 이 되고 $x \rightarrow \infty$ 에서 진폭비로 정의되는 투과율은 $K_T^+ = 0$ 이 된다.

한편 우측 입사파의 경우에는 식 (21b)가 되며 이 경우 $a_{2,0}$ 는 입사파이기 때문에 실수이다. 그리고 조건 $h_1 < h_2$ 으로부터 $a_{1,0}$ 은 항상 실수이므로 식 (21b)는 이 조건에서 항상 성립한다.

$$K_R^- = \frac{a_R^-}{a_i^-} = \frac{|p_2^+| \cosh k_{2,0}h_2/\sqrt{I_{22}}}{|p_2^+| \cosh k_{2,0}h_2/\sqrt{I_{22}}}$$

$$= |R_1^-| = \left| \frac{a_{2,0}I_{11}I_{22} - a_{1,0}I_{12}^2}{a_{1,0}I_{12}^2 + a_{2,0}I_{11}I_{22}} \right|$$

$$K_T^- = \frac{a_T^-}{a_i^-} = |T_1^-| \frac{\sqrt{I_{22}} \cosh k_{1,0}h_1}{\sqrt{I_{11}} \cosh k_{2,0}h_2}$$

$$= \left| \frac{2a_{2,0}I_{12}I_{22}}{a_{1,0}I_{12}^2 + a_{2,0}I_{11}I_{22}} \right| \frac{\cosh k_{1,0}h}{\cosh k_{2,0}h_2} \quad (21b)$$

식 (16)의 plane-wave 산란행렬을 진폭비인 반사율과 투과율로 나타낸 식 (21)은 서(2008)의 결과와 동일하다. 그러므로 속도포텐셜로 나타낸 산란행렬은 정의에 따라 다르나 이로부터 구한 반사율과 투과율은 정의에 따라 변하지 않고 동일하다. 따라서 평면파 근사식의 경우 plane-wave 근사해와 변분근사식으로 구한 반사율과 투과율은 동일하다.

식 (16)으로 주어진 해와 연관된 에너지보존식을 반사율과 투과율로 나타내면 식 (22)가 된다.

$$1 = K_R^2 + K_T^2 \frac{k_{i,0}^2}{a_{i,0}n_i} \frac{a_{i,0}n_j}{k_{j,0}^2}, (i=1, j=2) \text{ or } (i=2, j=1) \quad (22)$$

여기서 n 은 군속도와 파속의 비이며 식 (19)에 정의된 I_{ii} 는 식 (23a)로 변형할 수 있다.

$$I_{ii} = \frac{\tanh k_{i,0}h_i}{k} n_i \cosh^2 k_{i,0}h_i \quad (23a)$$

식 (23a)와 파랑분산식을 이용하면 에너지보존식에 포함된 식 (23b)를 얻는다.

$$\frac{\cosh^2 k_{2,0}h_2 a_{2,0}n_2}{\cosh^2 k_{1,0}h_1} \frac{k_{1,0}^2}{k_{2,0}^2} \frac{a_{1,0}n_1}{a_{1,0}I_{11}} = \frac{a_{2,0}I_{22}}{a_{1,0}I_{11}} \quad (23b)$$

전반사가 일어나는 경우에는 위에 기술한 바와 같이 에너지보존식이 성립하고 $a_{2,0}$ 가 실수인 전반사가 일어나지 않는 경우에는 식 (20)으로부터 N_1 과 λ_1 는 실수이고 식 (14b)로부터 X_1 도 실수이다. 좌측 입사에 대한 식 (22)에 식 (16)과 (20)를 대입하여 정리하면 식 (24a)을 얻어 에너지보존식을 만족한다.

$$(K_R^+)^2 + (K_T^+)^2 \frac{n_2 k_{1,0}^2 a_{2,0}}{n_1 k_{2,0}^2 a_{1,0}} = \frac{(a_{1,0}I_{12}^2 - a_{2,0}I_{11}I_{22})^2 + (a_{2,0}I_{11}I_{22}X_1)^2}{(a_{1,0}I_{12}^2 + a_{2,0}I_{11}I_{22})^2 + (a_{2,0}I_{11}I_{22}X_1)^2}$$

$$+ \frac{4a_{1,0}a_{2,0}I_{12}^2 I_{11}I_{22}}{(a_{1,0}I_{12}^2 + a_{2,0}I_{11}I_{22})^2 + (a_{2,0}I_{11}I_{22}X_1)^2} = 1 \quad (24a)$$

우측 입사의 경우 동일한 방법으로 정리하면 식 (24b)를 얻는다.

$$(K_R^-)^2 + (K_T^-)^2 \frac{n_1 k_{2,0}^2 a_{1,0}}{n_2 k_{1,0}^2 a_{2,0}} =$$

$$\frac{(a_{2,0}I_{11}I_{22} - a_{1,0}I_{12}^2)^2 + (a_{2,0}I_{11}I_{22}X_1)^2}{(a_{1,0}I_{12}^2 + a_{2,0}I_{11}I_{22})^2 + (a_{2,0}I_{11}I_{22}X_1)^2}$$

$$+ \frac{4a_{1,0}a_{2,0}I_{12}^2 I_{11}I_{22}}{(a_{1,0}I_{12}^2 + a_{2,0}I_{11}I_{22})^2 + (a_{2,0}I_{11}I_{22}X_1)^2} = 1 \quad (24b)$$

식 (24)에 $X_1=0$ 를 대입하면 plane-wave 근사해에 대한 에너지보존식이 얻어지고 이 역시 성립한다.

2.3 $h_1 > h_2$ 의 경우

이 경우에는 2 구간의 수심이 낮기 때문에 적분하한은 $-h_2$ 를 기준으로 하여 그 밖의 수식 전개는 앞 절과 유사하다. 변분근사법에 대해서만 기술하면 식 (6)와 식 (7)과 같이 각각의 기저함수를 곱한 후 구간 $(-h_2, 0)$ 에 대해 적분하면 식 (25)를 얻게 된다.

$$\int_{-h_1}^0 U \chi_{1,0} dz = \int_{-h_2}^0 U \chi_{1,0} dz = ia_{1,0}(p_1^+ e^{ia_{1,0}x_1} - p_1^- e^{-ia_{1,0}x_1})$$

$$\int_{-h_1}^0 U \chi_{1,j} dz = \int_{-h_2}^0 U \chi_{1,j} dz = a_{1,j} s_{1,j}^-$$

$$\int_{-h_2}^0 U \chi_{2,0} dz = ia_{2,0}(p_2^+ e^{ia_{2,0}x_1} - p_2^- e^{-ia_{2,0}x_1})$$

$$\int_{-h_2}^0 U \chi_{2,j} dz = -a_{2,j} s_{2,j}^+ \quad (25)$$

식 (25)에 존재하는 역류파에 대한 항을 소거하고 동력학 정합조건을 이용하면 식 (8)의 적분하한만이 $-h_2$ 로 바뀐 동일한 식을 얻는다. 이에 식 (9)로 정의된 유속 U 를 대입하고 정리하면 식 (10)-(13)과 동일하나 적분하한만이 바뀐 식들이 얻어진다.

연립방정식 (13)에서 적분하한만이 바뀐 식을 계산하기 위해 미지함수 u_i 를 식 (26a)로 설정한다. 그리고 식 (14b)과 유사한 식 (26b)과 같이 변수를 정의한다.

$$u_i(z) = c_i \chi_{2,0}(z), (i = 1, 2) \quad (26a)$$

$$\begin{cases} \lambda_2 = \sqrt{\frac{a_{1,0}}{a_{2,0}}} \\ \lambda_2 N_2 = \int_{-h_2}^0 \chi_{1,0}(z) \chi_{2,0}(z) dz \\ X_2 = a_{2,0} \int_{-h_2}^0 \int_{-h_2}^0 \chi_{2,0}(\xi) G(\xi, z) \chi_{2,0}(z) d\xi dz \\ = a_{2,0} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\int_{-h_2}^0 \chi_{2,0}(z) \chi_{1,j}(z) dz)^2}{a_{1,j}} \end{cases} \quad (26b)$$

식 (26)을 식 (12)와 유사한 변분형태의 적분에 대입하면 식 (27)을 얻는다.

$$\int_{-h_2}^0 \chi_{1,0}(z) u_1(z) dz = -\frac{a_{2,0}}{X_2} (\lambda_2 N_2)^2,$$

$$\int_{-h_2}^0 \chi_{1,0}(z) u_2(z) dz = \frac{a_{2,0} \lambda_2 N_2}{X_2},$$

$$\int_{-h_2}^0 \chi_{2,0}(z) u_1(z) dz = -\frac{a_{2,0} \lambda_2 N_2}{X_2},$$

$$\int_{-h_2}^0 \chi_{2,0}(z) u_2(z) dz = \frac{a_{2,0}}{X_2} \quad (27)$$

식 (27)을 위에서 구한 연립방정식에 대입하여 정리하면 산란행렬을 포함한 식 (28)이 얻어진다.

$$\begin{Bmatrix} p_1^- \\ p_2^+ \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1^+ & T_1^- \\ T_1^+ & R_1^- \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^+ \\ p_2^- \end{Bmatrix}$$

$$R_1^+ = \frac{1 - N_2^2 + iX_2}{N_2^2 + 1 - iX_2} e^{2ia_{1,0}x_1}, T_1^+ = \frac{2\lambda_2 N_2}{N_2^2 + 1 - iX_2} e^{i(a_{1,0} - a_{2,0})x_1}$$

$$T_1^- = \frac{2N_2/\lambda_2}{N_2^2 + 1 - iX_2} e^{i(a_{1,0} - a_{2,0})x_1}, R_1^- = \frac{N_2^2 - 1 - iX_2}{N_2^2 + 1 - iX_2} e^{-2ia_{2,0}x_1} \quad (28)$$

구역 2의 수심이 구역 1보다 낮은 경우 지형에 의한 파랑변형의 해는 식 (28)로 주어지고 이는 구역 2의 수심이 깊은 경우의 해인 식 (16)과 한 쌍을 이룬다. 이때 plane-wave 근사해는 $X_2=0$ 를 대입하면 얻어지며 이로부터 계산된 반사율과 투과율은 기존 결과(서, 2008)와 동일하다. 또한 반사율과 투과율로 표현하면 에너지보존식이 성립한다.

2.4 2.2절의 해를 이용하여 $h_1 > h_2$ 의 해를 구하는 간편법

고유함수 전개법은 연립방정식을 풀어야 하기 때문에 본 절의 간편법을 사용할 수 없다. 그러나 변분근사법은 2개의 연립방정식으로부터 해석해가 얻어짐으로 간편법을

사용할 수도 있다. 제 2.3절의 수식 유도과정을 살펴보면 제 2.2절의 과정과 동일하나 이 방법으로 $h_1 > h_2$ 의 해를 구하기 위해 상당한 노력이 요구되므로 간편법이 필요하다.

우선 식 (28)과 식 (16)을 비교하면 유사하다. 차이점은 적분하한을 식 (28)에서는 낮은 수심 h_2 , 식 (16)에 h_1 을 기준하여 변수의 첨자가 각각 정해졌기 발생한다. 한편 지형을 기준으로 볼 때 Fig. 1에서 우측 그림의 우측 입사파랑의 경우는 이를 z 축에 대칭이동 후 다시 평행이동하면 좌측 그림의 좌측 입사파랑의 경우와 형상이 동일하다.

Fig. 1에서 좌측 그림의 좌측 입사파랑은 x 축 양의 방향으로 진행하므로 $\exp\{i(a_{1,0}x - \omega t)\}$ 에 비례하는 반면에 x 축 음의 방향으로 진행하는 우측 그림의 우측 입사파랑은 $\exp\{i(-a_{2,0}x - \omega t)\}$ 에 비례한다. 한편 이들 입사파랑에 의한 반사파는 좌측 그림에서는 식 (16)의 R_1^+ 이나 우측 그림에서는 식 (28)의 R_1^- 가 된다. 따라서 식 (16)의 R_1^+ 과 식 (28)의 R_1^- 은 현상학적으로 동일하나 해당 구역의 상이함과 입사파 진행방향의 차이로 인해 수식에 차이가 있다. 이 차이는 위에 기술한 바를 감안하여 식 (16)의 R_1^+ 에 $a_{1,0}$ 를 $-a_{2,0}$ 로 대체하고 변수의 첨자를 1에서 2로 변경하면 식 (28)의 R_1^- 이 된다.

Fig. 1에서 좌측 그림의 좌측 입사파랑에 의한 투과파의 해는 식 (16)의 T_1^+ 이고 이에 상응하는 우측 그림의 우측 입사파랑의 투과파 해는 식 (28)의 T_1^- 이다. 이 경우에도 같은 논리를 적용하여 식 (16)의 T_1^+ 에 $a_{1,0}$ 를 $-a_{2,0}$, $a_{2,0}$ 를 $-a_{1,0}$ 로 각각 대체하고 변수의 첨자를 1에서 2로 변경하면 식 (28)의 T_1^- 이 된다.

동일한 논리를 좌측 그림의 우측 입사파랑에 의한 해와 우측 그림의 좌측 입사파랑의 해에 적용하면 관련 해를 얻게 된다. 따라서 $h_1 < h_2$ 경우의 해인 식 (16)과 $h_1 > h_2$ 경우의 해인 식 (28)는 한 쌍을 이루며 어느 하나를 알면 나머지는 위에 기술한 방법을 적용하여 간단히 구할 수 있다. 다만 식 (14b)와 식 (26b)로 정의된 변수를 사용하여야 한다.

2.5 변분근사법의 속도포텐셜 관련식

앞 절에서 구한 해를 이용하면 식 (3a)로 정의된 속도포텐셜을 구할 수 있어 결국 파랑변형을 완벽하게 나타낼 수 있다. 미지상수 전부가 구해지는 고유함수 전개법은 연립방정식의 해를 식 (3a)에 대입하면 되나 변분근사법에서는 해가 진행파의 미지상수로 표현되어 복잡하다.

변분근사법에 대한 $h_1 < h_2$ 의 경우를 기술하면 이 경우의 해인 식 (16)은 파봉이 $x=0$ 에 위치한 입사파에 의한 변형이며 해의 유도에는 식 (14a)로 정의된 미지함수 u_j 가 사

용되었다. 식 (14a)를 식 (9)에 대입하면 유속 U 를 구할 수 있고 이를 식 (6)과 (7)에 대입하면 역류파의 모든 미지상수 $s_{1,j}^-$ 와 $s_{2,j}^+$ 각각 구하게 된다.

따라서 이 경우에 대한 $x \leq x_1$ 에서 속도포텐셜은 식 (29a)가 되며 기저함수의 직교성이 사용되었다.

$$\phi_1(x, z) = \left\{ p_1^+ (e^{ia_{1,0}x} + R_1^+ e^{-ia_{1,0}x}) + p_2^- T_1^- e^{-ia_{1,0}x} \right\} \chi_{1,0}(z) \quad (29a)$$

그리고 $x \geq x_1$ 에서 성립하는 속도포텐셜은 식 (29b)가 되며 산란행렬은 식 (16)을 사용하여야 한다. 실제 계산에서는 역류파의 개수를 N 로 절단하여 사용한다.

$$\phi_2 = \left\{ p_1^+ T_1^+ e^{ia_{1,0}x} + p_2^- (R_1^- e^{ia_{2,0}x} + e^{-ia_{2,0}x}) \right\} \chi_{2,0}(z) - \left\{ c_1 [p_1^+ (e^{ia_{1,0}x_1} + R_1^+ e^{-ia_{1,0}x_1}) + p_2^- T_1^- e^{-ia_{1,0}x_1}] + c_2 [p_1^+ T_1^+ e^{ia_{2,0}x_1} + p_2^- (R_1^- e^{ia_{2,0}x_1} + e^{-ia_{2,0}x_1})] \right\} \times \sum_{j=1}^N \frac{S_{1,j}(x, z)}{a_{2,j}} \quad (29b)$$

$$S_{1,j}(x, z) \equiv e^{-ia_{2,j}(x-x_1)} \chi_{2,j}(z) \int_{h_1}^0 \chi_{1,0} \chi_{2,j} d\xi \quad (29c)$$

식 (29b)에 미지상수 c_1 과 c_2 는 미지함수 u_i 에 포함된 것이며 해에서 이들은 변분형태 식 (12)를 사용하여 상쇄되거나 속도포텐셜을 계산하기 위해서는 이를 정하여야 한다.

경계면에서 좌우 해면 속도포텐셜이 같아야하는 조건을 사용하여 c_1 과 c_2 에 대한 관계식을 얻을 수 있다. 유속에 대해서 동일한 방법을 사용하면 또 다른 식이 얻어지나 이 연립방정식을 정리하면 c_1 과 c_2 에 대한 행렬이 동일하여 해를 구할 수 없다. 그래서 본 논문에서는 $c_1=1$ 로 정하고 해면 속도포텐셜 정합조건으로부터 c_2 를 계산하였다.

마찬가지 방법으로 $h_1 > h_2$ 의 경우에 대한 속도포텐셜을 구한 결과는 식 (30)이 되고 여기서 산란행렬은 식 (28)을 사용하여야 한다.

$$\phi_1 = \left\{ p_1^+ e^{ia_{1,0}x} + (p_1^+ R_1^+ + p_2^- T_1^-) e^{-ia_{1,0}x} \right\} \chi_{1,0}(z) + \left\{ c_1 [p_1^+ e^{ia_{1,0}x_1} + (p_1^+ R_1^+ + p_2^- T_1^-) e^{-ia_{1,0}x_1}] + c_2 [(p_1^+ T_1^+ + p_2^- R_1^-) e^{ia_{2,0}x_1} + p_2^- e^{-ia_{2,0}x_1}] \right\}$$

$$\begin{aligned} & \times \sum_{j=1}^N \frac{S_{2,j}(x,z)}{a_{1,j}} \\ \phi_2 = & \left\{ (p_1^+ T_1^+ + p_2^- R_1^-) e^{ia_{2,0}x} + p_2^- e^{-ia_{2,0}x} \right\} \chi_{2,0}(z) \\ S_{2,j}(x,z) = & e^{a_{1,j}(x-x_1)} \chi_{1,j}(z) \int_{-h_2}^0 \chi_{2,0} \chi_{1,j} d\xi \quad (30) \end{aligned} \quad + \left\{ \begin{aligned} & c_1 [p_1^+ (e^{ia_{1,0}x_1} + R_1^+ e^{-ia_{1,0}x_1}) + p_2^- T_1^- e^{-ia_{1,0}x_1}] + \\ & c_2 [p_1^+ T_1^+ e^{ia_{2,0}x_1} + p_2^- (R_1^- e^{ia_{2,0}x_1} + e^{-ia_{2,0}x_1})] \end{aligned} \right\} \times \sum_{j=1}^N S_{1,j}(x,z) \quad (31a)$$

식 (30)에 포함된 c_1 과 c_2 는 식 (29)에서와 같이 $c_1=1$ 로 정하고 해면 속도포텐셜 정합조건으로부터 c_2 를 계산하였다.

위에서 구한 속도포텐셜은 지배방정식 (1)의 해이므로 이로부터 유속과 해면함수 등 경계치 문제와 관련된 모든 변수를 구할 수 있다. 예로 해면함수는 식 (5)를 이용하여 계산할 수 있고 x 방향의 유속을 구하면 식 (31)이 된다.

$h_1 < h_2$ 의 경우

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x} = ia_{1,0} \left\{ p_1^+ (e^{ia_{1,0}x} - R_1^+ e^{-ia_{1,0}x}) - p_2^- T_1^- e^{-ia_{1,0}x} \right\} \chi_{1,0}(z)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial x} = ia_{2,0} \left\{ p_1^+ T_1^+ e^{ia_{2,0}x} + p_2^- (R_1^- e^{ia_{2,0}x} - e^{-ia_{2,0}x}) \right\} \chi_{2,0}(z)$$

$h_1 < h_2$ 의 경우

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x} = ia_{1,0} \left\{ p_1^+ e^{ia_{1,0}x} - (p_1^+ R_1^+ + p_2^- T_1^-) e^{-ia_{1,0}x} \right\} \chi_{1,0}(z) +$$

$$\left\{ \begin{aligned} & c_1 [p_1^+ e^{ia_{1,0}x_1} + (p_1^+ R_1^+ + p_2^- T_1^-) e^{-ia_{1,0}x_1}] + \\ & c_2 [p_1^+ T_1^+ e^{ia_{2,0}x_1} + p_2^- (R_1^- e^{ia_{2,0}x_1} + e^{-ia_{2,0}x_1})] \end{aligned} \right\} \sum_{j=1}^N S_{2,j}(x,z)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial x} = ia_{2,0} \left\{ p_1^+ (T_1^+ e^{ia_{2,0}x}) + p_2^- (R_1^- e^{ia_{2,0}x} - e^{-ia_{2,0}x}) \right\} \chi_{2,0}(z) \quad (31b)$$

식 (31)로부터 수심이 상대적으로 낮은 지역의 x 방향 유속은 진행파 성분만으로 근사되나 깊은 지역에서는 경계면에서 동일한 부피 이송량을 보이기 위해 역류파 성분이 포함된다.

Table 1. Convergence of computed results by variational approximation and eigenfunction expansion for normal incident waves

변분근사법($h_2/h_1=1.2$)						
$k_{1,0}h_1$	0.101		0.796		1.851	
N	반사율	투과율	반사율	투과율	반사율	투과율
0	0.04532	0.95495	0.03293	0.98127	0.00747	1.01884
2	0.04535	0.95495	0.03448	0.98122	0.00934	1.01883
4	0.04536	0.95495	0.03496	0.98120	0.01016	1.01882
8	0.04536	0.95495	0.03500	0.98120	0.01024	1.01882
16	0.04536	0.95495	0.03504	0.98120	0.01030	1.01882
32	0.04536	0.95495	0.03504	0.98120	0.01031	1.01882
64	0.04536	0.95495	0.03505	0.98120	0.01031	1.01882
고유함수 전개법($h_2/h_1=1.2$)						
$k_{1,0}h_1$	0.101		0.796		1.851	
N	반사율	투과율	반사율	투과율	반사율	투과율
0	0.04532	0.95495	0.03293	0.98127	0.00747	1.01884
2	0.04537	0.95494	0.03537	0.98119	0.01083	1.01881
4	0.04538	0.95494	0.03569	0.98118	0.01141	1.01880
8	0.04538	0.95494	0.03574	0.98117	0.01149	1.01880
16	0.04538	0.95494	0.03577	0.98117	0.01155	1.01880
32	0.04538	0.95494	0.03577	0.98117	0.01156	1.01880
64	0.04538	0.95494	0.03578	0.98117	0.01156	1.01880

Table 1. Convergence of computed results by variational approximation and eigenfunction expansion for normal incident waves

변분근사법($h_2/h_1=3$)						
$k_{1,0}h_1$	0.101		0.796		1.851	
N	반사율	투과율	반사율	투과율	반사율	투과율
0	0.26427	0.73657	0.07244	0.97985	0.00471	1.06078
2	0.26597	0.73621	0.15215	0.97100	0.01221	1.06071
4	0.26602	0.73620	0.15434	0.97066	0.01443	1.06068
8	0.26606	0.73619	0.15590	0.97042	0.01558	1.06067
16	0.26607	0.73619	0.15626	0.97036	0.01591	1.06066
32	0.26607	0.73619	0.15638	0.97035	0.01602	1.06066
64	0.26607	0.73619	0.15641	0.97034	0.01604	1.06066
고유함수 전개법($h_2/h_1=3$)						
$k_{1,0}h_1$	0.101		0.796		1.851	
N	반사율	투과율	반사율	투과율	반사율	투과율
0	0.26427	0.73657	0.07244	0.97985	0.00471	1.06078
2	0.26597	0.73621	0.15243	0.97095	0.01480	1.06068
4	0.26604	0.73619	0.15581	0.97043	0.01759	1.06063
8	0.26607	0.73619	0.15710	0.97023	0.01845	1.06061
16	0.26609	0.73618	0.15781	0.97012	0.01899	1.06060
32	0.26609	0.73618	0.15804	0.97009	0.01916	1.06060
64	0.26609	0.73618	0.15814	0.97007	0.01923	1.06060
변분근사법($h_2/h_1=6.5$)						
$k_{1,0}h_1$	0.101		0.796		1.851	
N	반사율	투과율	반사율	투과율	반사율	투과율
0	0.42629	0.57454	0.01602	1.04665	0.00490	1.06104
2	0.42961	0.57354	0.11911	1.03933	0.00775	1.06102
4	0.43079	0.57318	0.14680	1.03544	0.01101	1.06099
8	0.43091	0.57314	0.14955	1.03501	0.01242	1.06097
16	0.43100	0.57312	0.15229	1.03457	0.01427	1.06095
32	0.43101	0.57311	0.15285	1.03448	0.01471	1.06094
64	0.43102	0.57311	0.15300	1.03446	0.01484	1.06094
고유함수 전개법($h_2/h_1=6.5$)						
$k_{1,0}h_1$	0.101		0.796		1.851	
N	반사율	투과율	반사율	투과율	반사율	투과율
0	0.42629	0.57454	0.01602	1.04665	0.00490	1.06104
2	0.42972	0.57351	0.12562	1.03849	0.01248	1.06097
4	0.43074	0.57319	0.14569	1.03562	0.01436	1.06094
8	0.43084	0.57317	0.14830	1.03521	0.01570	1.06093
16	0.43094	0.57314	0.15157	1.03469	0.01730	1.06089
32	0.43096	0.57313	0.15247	1.03455	0.01777	1.06089
64	0.43098	0.57312	0.15292	1.03447	0.01800	1.06088

3. 수치실험

변분근사법과 고유함수 전개법의 특성을 분석하기 위해 수렴성, 경계면에서의 유속분포, 해면변위에 대한 수

치실험을 실시하였다. Table 1에는 억류파의 개수(N)에 따른 직교입사 파랑의 반사율과 투과율을 계산하여 수렴성을 조사하였다. 두 계산결과에서 계단의 단차가 작을수록 수렴이 빠르며 천해역으로 갈수록 빠른 수렴을 보인다. 변

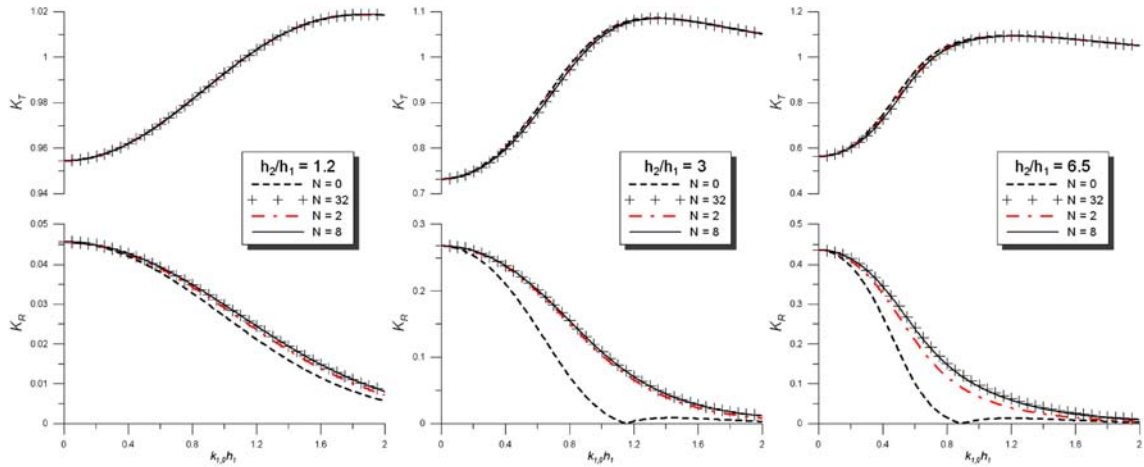


Fig. 2. Computed reflection and transmission coefficients by variational approximation for normal incident waves.

분근사법과 고유함수 전개법의 수렴도는 변분근사법이 약간 빠른 경향을 보이거나 전반적으로는 비슷하다.

Fig. 2에는 변분근사법을 이용하여 직교입사 파랑의 반사율과 투과율에 대한 계산결과를 나타내었다. 그림에서 N 이 0인 경우는 진행파 근사가 되며 심해역으로 갈수록 진행파 근사의 결과 특히 반사율은 32개 역류파를 이용한 결과와 뚜렷한 차이가 있다. 앞에서 기술한 바와 같이 변분근사법은 해석적으로 에너지보존식을 만족하며 반사율에서 큰 차이를 보이는 파랑의 경우, 투과율은 반사율에 비해 아주 크기 때문에 반사율과 투과율의 제곱에 비례하는 에너지보존식에서는 이 차이의 영향은 크지 않다. 계단의 단차가 클수록 반사율도 증가하며 천해파의 경우에

는 역류파의 개수에 따른 변화가 거의 없는 것으로 나타난다. 한편 심해파로 갈수록 파랑은 저면의 영향이 작아지게 됨으로 반사율은 0, 투과율은 1의 각각 값으로 수렴한다.

서·김(1991)은 Fig. 2의 $h_2/h_1=6.5$ 경우에 대해 경계적분 요소법으로 반사율을 계산하였고 본 변분근사법의 결과는 경계적분 요소법의 결과와 거의 일치한다. Fig. 2의 결과 중 3개의 파랑에 대한 EFEM과 변분근사법의 결과인 Table 1에서 수렴된 반사율과 투과율은 약간의 차이를 보이나 Fig. 2의 해상도에서는 일치할 만큼 작다.

Fig. 3에는 위와 동일한 단일 계단지형에서 상이한 주기의 직교입사 파랑에 대한 해면변위 결과를 나타내었다. 입사구역의 파장으로 표준화한 거리와 입사진폭(a_1)으로 표

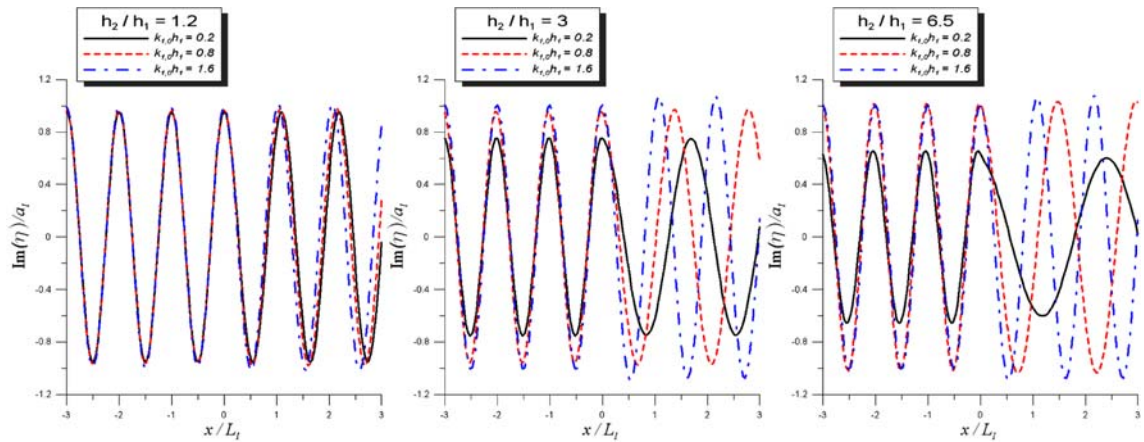


Fig. 3. Computed free surface displacements by variational approximation for normal incident waves; number of evanescent modes $N=30$.

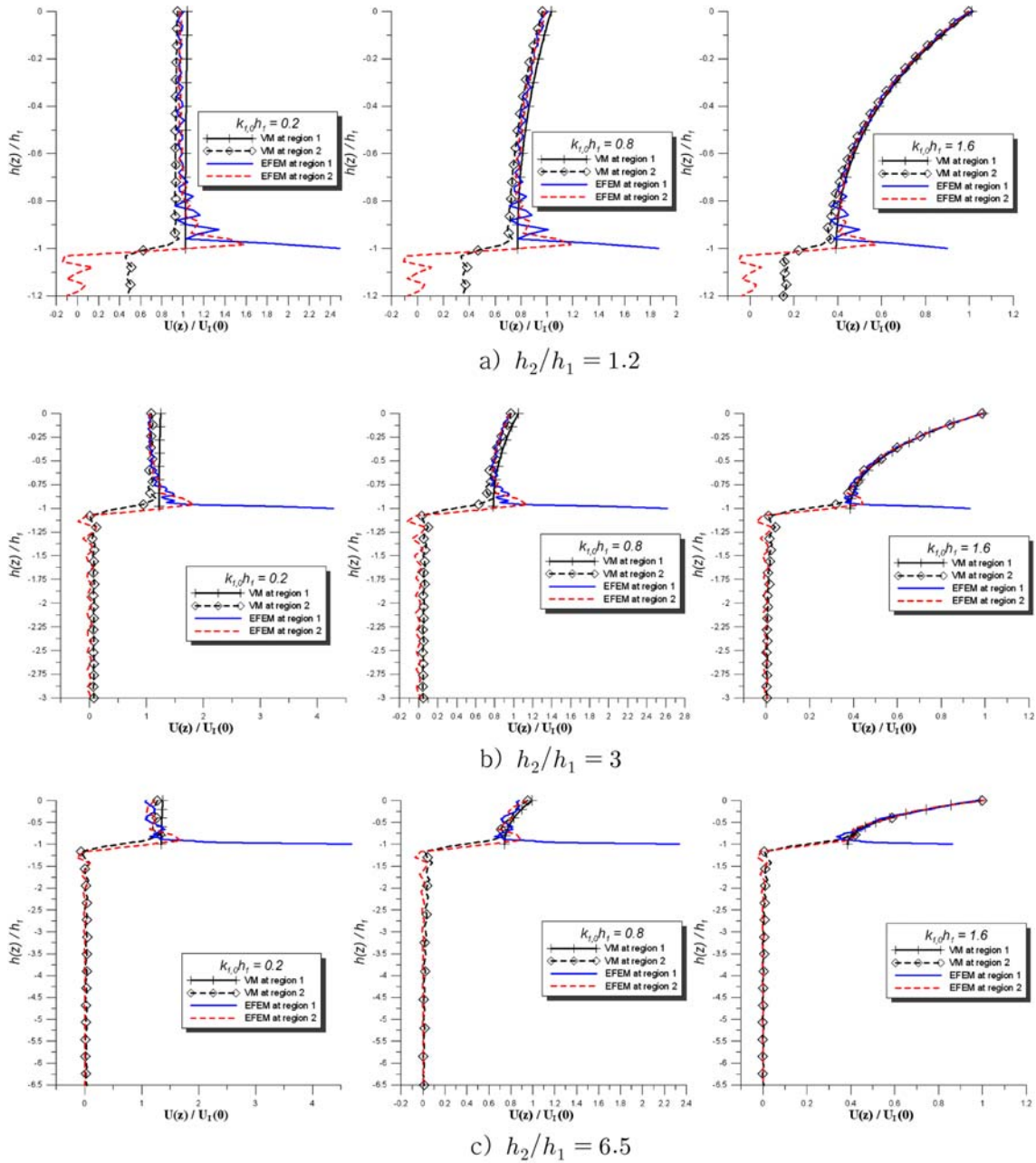


Fig. 4. Computed vertical profiles of x velocity component along the step boundary for normal incident waves; number of evanescent modes $N=30$.

준화한 진폭으로 나타내어, 계단의 단차가 가장 작은 $h_2/h_1=1.2$ 경우에는 입사파랑과 거의 같으나 단차가 가장 큰 $h_2/h_1=6.5$ 에서는 천해파로 갈수록 반사율이 커져 입사파와 상이함을 보인다. 이 결과는 변분근사법으로 계산한 것이고 고유함수 전개법으로 계산한 결과도 그림의 해상도

에서는 동일하여 생략하였다. 그림에서 사용한 역류파의 개수는 30개이고 $x=0$ 에 경계면이 존재하고 각각의 그림에서 이점 부근에서 해면이 연속임을 보여준다.

Fig. 4에는 경계면에서 직교입사 파랑에 의한 x방향 유속의 수직구조를 나타내었다. 고유함수 전개법의 결과는

실선(구역 1)과 점선(구역 2), 변분근사법의 결과는 기호를 갖는 대응 선으로 각각 나타내었고 두 방법에서 역류파는 30개를 동일하게 사용하였다. 실험 대상지형에서 구역 1의 수심은 구역 2의 수심보다 상대적으로 낮고 입사파랑은 왼쪽에서 오른쪽으로 진행한다. 계산된 유속은 입사파랑의 정수면 유속 $U_f(0)$ 으로 표준화하였다.

유속 계산의 가장 큰 특징은 사용된 방법에 따라 비교적 큰 차이가 있고 고유함수 전개법의 경우 구역 1의 저면 부근에서 가파른 증가를 보이는 반면에 변분근사법의 경우에는 제 2.5절에 기술한 바와 같이 구역 1에서는 진행과 성분만이 유속 계산에 이용됨으로 오차가 생기는 것으로 추정된다. 이러한 차이는 수심이 깊은 구역 2에서 구역 1보다 깊은 부분에는 직벽이 존재하므로 볼투과 조건으로부터 x 방향 유속이 0이 된다. 따라서 계단의 직벽에서는 이 유속은 불연속이며 이로 인한 수치계산의 어려움 즉 Gibbs 현상(Arfken, 1970)이 발생하게 된다.

계단의 단차가 작은 $h_2/h_1=1.2$ 경우 변분근사법으로 구역 2에서 계산한 유속은 직벽에서 0의 값을 보이지 않으며 심해파로 갈수록 그 차이가 작게 된다. 반면에 고유함수 전개법의 경우에는 구역 2의 계산 유속에서 Gibbs 현상이 뚜렷이 보이며 이는 유속을 정합하는 조건으로부터 발생하는 것으로 판단된다. 유속 계산에 대한 실험을 종합하면 두 방법 모두 정밀도가 떨어져 적용시에 상당한 주의가 필요하다.

Fig. 4의 유속 수직구조는 예상을 벗어날 만큼 특이하고 특히 EFEM의 저층 유속분포는 더 특이하다. Athanassoulis and Belibassakis(1999)는 EFEM은 해저면에서의 유속이 불연속에 대해 지적하였으나 정량적인 결과는 보이지 않았다. 본 결과에 대한 계산의 검증을 위해 부록에 EFEM의 계산된 자료를 포함하여 해저면에서의 유속 불연속과 분포에 대해 분석하였다.

Fig. 5에는 45° 로 왼쪽에서 오른쪽으로 입사하는 파랑이 $h_2/h_1=3$ 지형에 의해 변형된 해면변위를 나타내었다. 이 경우 $k_{1,0}h_1=0.7923$ 보다 작은 천해파랑은 구역 2에서 전반사가 발생하여 해면은 지수함수의 형상으로 바뀌고, 구역 1에서는 반사파에 의한 중복파가 형성되며 Fig. 5a는 여기에 속한다. Fig. 5b의 파랑은 전반사보다 약간 파장이 짧은 경우로 구역 2에서는 y 축 방향과 거의 같게 파랑이 진행하며 경계면에서 해면이 연속임을 보인다. 한편 심해파에 가까운 Fig. 5c는 구역 2에서 x 축에 대해 약 48° 로 굴절된 파랑이 형성되며 구역 1에서는 반사파로 인해 부분 중복파가 형성된다.

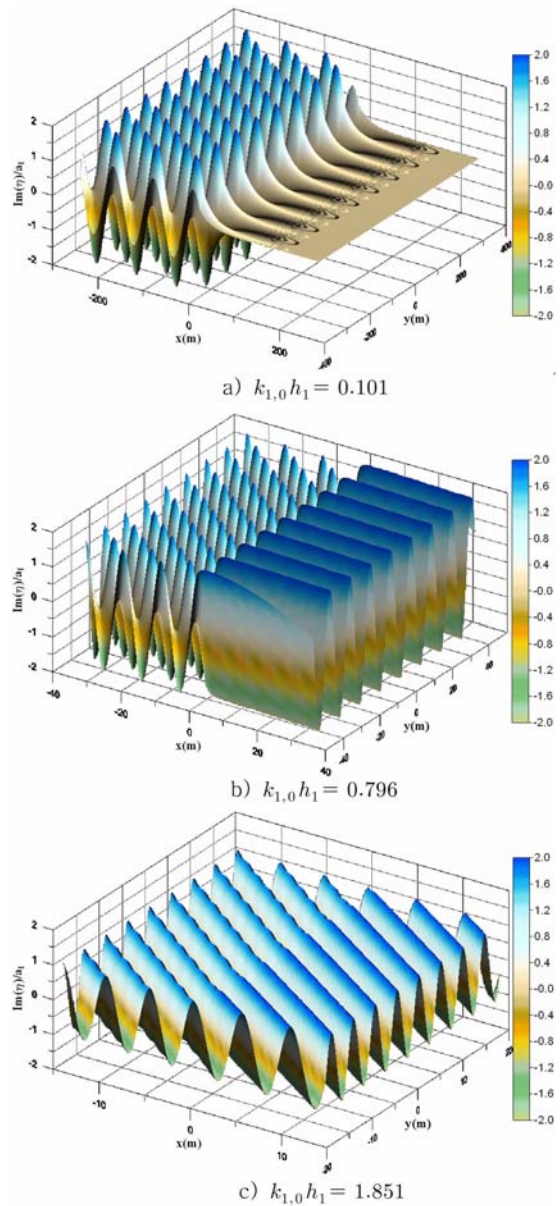


Fig. 5. Computed free surface displacements by variational approximation for 45° incident waves; $h_2/h_1=3$, $N=30$, x wave number vector component of region 2 $a_{2,0}=0$ at $k_{1,0}h_1=0.7923$.

Mei(1989)는 천해역에서 진행파만을 고려한 사각입사의 파랑변형을, 해석적 방법을 사용하여 설명하였다. Fig. 5에 도시한 결과는 Mei의 제 4.3절 해석과 일치하며 이를 보이기 위해 간단한 평면파 근사식을 사용한다. 제 2절에서 평면파 근사의 경우 EFEM과 변분근사식의 반사율과 투과율이 동일함을 보였기 때문에 여기서는 EFEM을 이용하여

Mei의 결과를 전체 수심조건으로 확장하기로 한다.

식 (3)의 시간과 y 성분을 분리한 속도포텐셜을 다시 정의하여 식 (32)로 나타낸다.

$$\phi_i = (p_i^+ e^{ia_{1,0}x} + p_i^- e^{-ia_{1,0}x}) \cosh k_{i,0}(z+h_i) \quad (32)$$

한편 좌에서 우로 진행하는 입사 파랑의 해면변위는 식 (33a), 구역 1과 2의 해면변위는 각각 식 (33b)와 식 (33c)로 표현할 수 있고 입사파의 파봉은 $x=0$ 에 위치한다.

$$\eta_I = A e^{ia_{1,0}x} \quad (33a)$$

$$\eta_1 = A(e^{ia_{1,0}x} + R e^{-ia_{1,0}x}), \text{ as } x \rightarrow -\infty \quad (33b)$$

$$\eta_2 = A T e^{ia_{2,0}x}, \text{ as } x \rightarrow +\infty \quad (33c)$$

여기서 A 는 입사파의 진폭이고 복소수인 R 과 T 는 각각 주어진 입사파에 의한 반사율과 투과율이다. 식 (32)로부터 유도된 물리변수인 반사율과 투과율에 대한 식 (21a)과 이들의 정의에 따라 식 (33)에서 구한 크기는 같아야 함으로 식 (33d)가 얻어진다.

$$K_R^+ = |R|, K_T^+ = |T| \quad (33d)$$

식 (5)의 해면조건에 식 (32)를 대입하고 본 논문에서 설정된 $p_1^+ = 1, p_2^- = 0$ 를 이용하면 관계식 (34a)를 얻는다. 설정된 $p_1^+ = 1$ 에 의해 A 는 복소수이며 이로 인해 식 (33)에서 해면변위는 허수부를 취한다.

$$A = \frac{i\omega}{g} \cosh k_{1,0} h_1, p_1^- = R, p_2^+ = T \frac{\cosh k_{1,0} h_1}{\cosh k_{2,0} h_2} \quad (34a)$$

그리고 식 (21a)과 식 (33d)로부터 식 (34b)를 얻는다.

$$R = \frac{a_{1,0} I_{12}^2 - a_{2,0} I_{11} I_{22}}{a_{1,0} I_{12}^2 + a_{2,0} I_{11} I_{22}}, T = \frac{2a_{2,0} I_{11} I_{22}}{a_{1,0} I_{12}^2 + a_{2,0} I_{11} I_{22}} \frac{\cosh k_{2,0} h_2}{\cosh k_{1,0} h_1} \quad (34b)$$

여기서 실수인 I_{ij} 는 식 (19)에 정의된 변수이고 이 적분을 계산하면 식 (34c)가 된다.

$$I_{12} = \frac{\sinh(k_{1,0} h_1 + k_{2,0} h_2) + \sinh k_{2,0} (h_1 - h_2)}{2(k_{1,0} + k_{2,0})} + \frac{\sinh(k_{1,0} h_1 - k_{2,0} h_2) - \sinh k_{2,0} (h_1 - h_2)}{2(k_{1,0} - k_{2,0})} \\ I_{ii} = \frac{[\tanh k_{i,0} h_i + k_{i,0} h_i (1 - \tanh^2 k_{i,0} h_i)] \cosh^2 k_{i,0} h_i}{2k_{i,0}} \quad (34c)$$

파랑이 깊은 수심에서 낮은 수심으로 진행하면 ($h_1 > h_2$),

Snell 법칙($b=k_i \sin \theta_i$)에 의해 구역 2의 파향각은 입사각보다 작아 전반사가 생기지 않는다. 한편 $h_1 < h_2$ 이면 구역 2의 파향각이 입사각보다 크기 때문에 전반사가 생길 수 있고 여기서는 보다 복잡한 이 경우만을 대상으로 한다. Fig. 5에서는 입사각이 45° , 수심비 $h_2/h_1=3$ 로 각각 고정되었기 때문에 입사 주기가 달라져 $k_{1,0} h_1=0.7923$ 이 되면 투과각이 90° 인 전반사가 일어난다. Mei는 본 논문과 달리 입사 주기를 고정하고 입사각을 변수로 간주하여 입사각이 커지면 전반사가 발생하는 경우를 다루었으나 물리적 현상은 위와 동등하다.

만일 구역 1, 2의 파랑이 모두 천해역에 해당하는 경우 $k_{i,0} h_i \ll 1$ 이므로 식 (34c)에서 다음 근사식을 얻는다. $I_{11}=h_1$, $I_{12}=h_1$ 그리고 $I_{22}=h_2$. 이들을 식 (34b)에 대입하면 Mei의 식과 동일한 식 (35a)를 얻는다.

$$R = \frac{a_{1,0} h_1 - a_{2,0} h_2}{a_{1,0} h_1 + a_{2,0} h_2}, T = \frac{2a_{1,0} h_1}{a_{1,0} h_1 + a_{2,0} h_2} \quad (35a)$$

이 식에 비해 일반적인 식 (34b)은 제 2.2절에서 에너지 보존식을 만족함을 보였고 투과율에는 수심조건 $k_{i,0} h_i$ 의 \cosh 함수에 대한 비율이 추가된다.

입사 주기가 전반사의 파랑 주기(이 때 파수 k_c)와 같은 경우, Mei가 기술한 바와 같이 구역 2에서 파봉선은 x 축과 평행(또는 파향선은 y 축과 평행)하고 x 축과 평행선상의 파고는 일정하게 된다. 이를 보이기 위해 $a_{2,0}=0$ 을 식 (34b)와 식 (35a)에 각각 대입하면 식 (35b)를 얻는다.

$$\begin{cases} R = 1, T = \frac{2I_{11} \cosh k_{2,0} h_2}{I_{12} \cosh k_{1,0} h_1} \Leftarrow \text{eq. (34b)} \\ R = 1, T = 2 \Leftarrow \text{eq. (35a)} \end{cases} \quad (35b)$$

식 (35b)를 식 (33)에 대입하면 전반사 경우의 해면변위인 식 (36a)를 얻는다.

$$\eta_2 = A \left(\frac{2I_{11} \cosh k_{2,0} h_2}{a_{1,0} I_{12} \cosh k_{1,0} h_1} \right) \quad (36a)$$

한편 투과역에서 x 방향의 에너지 이송량이 0이므로 에너지 보존식은 역시 성립한다.

입사 파수가 k_c 보다 작은 경우($k_{1,0} < k_c$)인 Fig. 5a에서는 $a_{2,0}=i\alpha$ 인 허수가 되고 이를 식 (33)에 대입하고 방사조건에 의해 α 는 양의 실수이므로 구역 2의 x 방향 해면변위는 식 (36b)과 같이 감쇄형이 된다.

$$\eta_2 = A \left(\frac{2a_{1,0} I_{11} I_{12}}{a_{1,0} I_{12}^2 + i\alpha I_{11} I_{22}} \frac{\cosh k_{2,0} h_2}{\cosh k_{1,0} h_1} \right) e^{-\alpha x} \quad (36b)$$

만일 $k_{1,0}$ 이 k_c 보다 아주 조금 작은 경우 $\alpha \ll 1$ 이므로 파고는 아주 서서히 감쇄된다. 그러므로 $x \rightarrow +\infty$ 에서 변위는 0이며 식 (33)에서 투과율은 0이 된다. 한편 반사율을 구하기 위해 동일한 과정을 적용하면 반사율은 1이 되며 따라서 에너지보존식이 성립한다.

Fig. 5b, 5c와 같이 입사 파수가 k_c 보다 큰 경우($k_{1,0} > k_c$), 구역 2의 $a_{2,0}$ 가 실수이므로 x 방향 해면변위는 식 (33)으로부터 진행파인 식 (36c)이 된다.

$$\eta_2 = A \left(\frac{2a_{1,0}I_{11}I_{12} \cosh k_{2,0}h_2}{a_{1,0}I_{12}^2 + a_{2,0}I_{11}I_{22} \cosh k_{1,0}h_1} \right) e^{ia_{2,0}x} \quad (36c)$$

식 (36c)에서 입사 파수가 k_c 보다 월등히 커서 구역 1이 심해역 조건이면 수심이 깊은 구역 2는 역시 심해역으로 입사각과 투과각은 동일하게 된다. 한편 입사 파수가 k_c 보다 아주 조금 크면 투과각은 거의 90° 에 가깝게 되어 $a_{2,0} \approx 0$ 이므로 x 방향 해면변위는 아주 큰 장파의 형태를 취한 Fig. 5b에 해당한다. 이 경우의 극한인 $k_{1,0} = k_c$ 에서 해면변위는 식 (36a)이 된다.

위에 기술한 평면파 근사식에 역류파를 추가하면 미지 상수들이 재조정되어 반사율과 투과율에 차이가 발생하고 이로 인해 세부적인 파형도 달라질 수도 있다. Fig. 6에는 Fig. 5의 제원과 동일한 45° 로 좌측에서 우측으로 입사하는 파랑의 $h_2/h_1=3$ 지형에 의한 반사율과 투과율을 나타냈고 이는 Kirby and Dalrymple(1983)의 Fig. 8b에 제시된 실험이며 결과 역시 동일하다. 본 해상력에서 평면파 근

사해와 역류파를 추가한 EFEM의 해는 거의 같은 만큼 차이가 작기 때문에 평면파 근사해에 의한 해면변위는 EFEM의 해면변위와 거의 같게 된다. 따라서 Fig. 5의 결과는 위에 제시한 평면파 근사해에 의한 해면변위를 이용하여 검증할 수도 있다.

부록에 본 수치계산을 검증할 수 있도록 EFEM의 중간계산 자료를 제시하였다. 역류파가 추가되어도 앞에서 보인 입사 파수와 k_c 의 상대적인 크기에 의한 투과파 형태의 전환 거동은 동일하다.

구역 2의 x 방향 파수 $a_{2,0}$ 가 허수이면 전파사로 인해 구역 파형은 감쇄형임을 보였다. 만일 trench와 같이 3개 구역인 경우 구역 2에서 $a_{2,0}$ 가 허수이고 구역 3에서 $a_{3,0}$ 가 실수인 경우 구역 2의 감쇄파형과 trench의 폭의 상관관계에 따라 구역 3에서 진행파가 존재하기도 하고 파형이 아예 존재하지 않는 경우도 생긴다. 서·전(1992)은 평면파 근사식과 역류파를 포함한 수치실험을 통해 이를 보였다.

식 (3)에서 감쇄형인 파를 본 논문에서는 역류파로 지칭하였고 이 용어에 대한 적정성을 기술하고자 한다. 함수의 형태에 따르면 이는 감쇄파로 경계부근에만 존재하는 역류형태가 된다. 이에 대한 국외용어도 *evanescent wave*, *non-propagating wave* 또는 *decaying wave*로 다양하다. 한편 국내 용어로 소멸파도 사용한다. 본 연구와 같이 단일 계단의 경우 구역 2에서 $a_{2,0}$ 가 허수이면 $x \rightarrow +\infty$ 에서 파형은 소멸한다. 그러나 서·전(1992)의 경우와 같이 $a_{2,0}$ 가 허수라도 $x \rightarrow +\infty$ 에서 진행파가 존재함으로써 용어 “소멸파”는 너무 한정적이다. 그리고 “감쇄파”는 일반 역학의 감쇄파와 혼동을 일으킬 만큼 너무 포괄적이다. 이에 비해 “감쇄 역류파”는 서·전(1992)의 경우에도 분명한 의미를 전달하기 때문에 이를 축약한 “역류파”가 적절한 것으로 보인다.

4. 결 론

단일계단 위를 지나는 파랑변형에 대해 Miles(1967)의 변분근사법과 고유함수 전개법을 사용하여 반사율, 투과율, 해면변위, x 방향 유속 그리고 에너지보존식 성립 등을 비교분석하였다. 반사율과 투과율, 해면변위에 대한 계산결과는 두 방법이 거의 일치하나 경계면에서의 유속 결과는 상당한 차이를 보이며 두 방법 모두 유속 계산에 정밀도가 떨어지는 것으로 분석된다.

두 방법 모두 속도포텐셜을 고유함수로 전개하고 관련

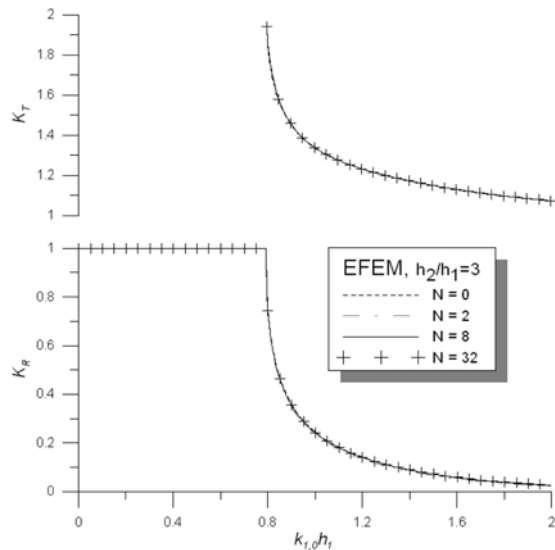


Fig. 6. Computed reflection and transmission coefficients by EFEM for 45° oblique incident waves.

된 미지상수를 정하기 위해 경계면에서 속도포텐셜과 유속이 연속인 정합조건을 사용하지만 유속 계산결과는 연속이 아니며 질량 이송량이 보존되는 것으로 판단된다. 지형을 극히 단순화한 계단지형에서는 직벽으로 인해 유속이 불연속이 되며 이를 Fourier 급수로 전개하면 Gibbs 현상이 발생하여 수치계산의 정밀도가 떨어지며 이 두 방법에 사용된 유속 정합조건은 이 현상과 직접 연관되어 있다. 따라서 본 방법들을 이용하여 유속을 계산하는 경우에는 결과분석에 상당한 주의가 필요하다.

고유함수 전개법은 역류파의 개수가 증가하면 엄밀해로 수렴하는 장점이 있으나 연립방정식의 수도 같이 증가하여 이를 풀기 위한 계산속도와 기억용량의 증가로 인한 제약을 받는다. 반면에 변분근사법은 역류파 성분을 진행파 성분으로 근사함으로 2원 1차 연립방정식이 구성되며 따라서 해석해를 구할 수 있다. 또한 이 과정에서 좌우에서 입사하는 파랑에 대한 해가 같이 얻어지는 장점이 있다. 본 논문에서는 변분근사법의 해를 기존 연구보다 쉽게 재유도하였고 구한 해는 에너지보존식을 만족함을 해석적으로 입증하였다.

또한 평면파 근사인 경우 고유함수 전개법과 변분근사법의 반사율과 투과율이 같음을 해석적으로 입증하였다. Devillard et al.(1988)의 변환행렬법은 Miles(1967)의 산란행렬을 변형한 것으로 이에 대한 평면파 근사해를 사용한 O'Hare and Davies(1992)의 반사율과 투과율은 결국 고유함수 전개법의 평면파 근사해에 의한 것과 동일함을 의미한다.

감사의 글

본 연구는 한국해양연구원의 기본연구사업인 “연안 국지 해일 정밀예보 지원체계 현업화 기술”, “해양관측시스템 개발”, “해일침수범람지역 예측 기술 및 재해도(Hazard Map) 작성기술 개발 : 부산, 마산, 여수” 연구에서 수행된 결과의 일부이며 연구비 지원에 감사를 드립니다.

참고문헌

서승남, 김상익 (1991). 혼합경계적분 요소법을 사용한 직

- 교입사파랑의 반사율계산 모델. 한국해양해양공학회지, 3(3), 170-175.
- 서승남, 전기천 (1992). 해저단에 지형 및 흐름에 의한 역류파랑. 한국해양해양공학회지, 4(1), 1-9.
- 서승남 (2008). 산란체법에 의한 다중 계단지형에서의 파랑 변형 계산. 한국해양해양공학회논문집, 20(5), 439-451.
- 조용식, 이창훈 (1998). 수심이 변하는 지형을 통과하는 파랑의 반사율과 통과율 산정. 대한토목학회논문집, 18(II-4), 351-358.
- Arfken, G. (1970). *Mathematical Methods for Physicists*. 2nd ed., Academic, New York.
- Athanassoulis G.A. and Belibassakis K.A. (1999). A consistent coupled-mode theory for the propagation of small-amplitude water waves over variable bathymetry regions. *J. Fluid Mech.*, 389, 275-301.
- Devillard, P., Dunlop, F. and Souillard B. (1988). Localization of gravity waves on a channel with a random bottom. *J. Fluid Mech.*, 186, 521-538.
- Greenberg, M.D. (1978). *Foundations of Applied Mathematics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Kirby, J.T. and Dalrymple, R.A. (1983). Propagation of obliquely incident water waves over a trench. *J. Fluid Mech.*, 133, 47-63.
- Kirby, J.T., Dalrymple, R.A. and Seo, S.N. (1987). Propagation of obliquely incident water waves over a trench. Part 2. Currents flowing along the trench. *J. Fluid Mech.*, 176, 95-116.
- Lamb, H. (1932). *Hydrodynamics*. Dover, New York.
- Mei, C.C. (1989). *The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves*. World Scientific, Singapore.
- Miles, J.W. (1967). Surface-wave scattering matrix for a shelf. *J. Fluid Mech.*, 28, 755-767.
- Miles, J.W. (1982). On surface-wave diffraction by a trench. *J. Fluid Mech.*, 115, 315-325.
- O'Hare, T.J. and Davies, A.G (1992). A new model for surface-wave propagation over undulating topography. *Coastal Eng.*, 18, 251-266.
- Takano, K. (1960). Effets d'un obstacle parallipédique sur la propagation de la houle. *La Houille Blanche*, 15, 247-267.

Received November 7, 2008

Accepted March 3, 2009

부 록

제 2.5절에 기술된 변분근사법의 해면과 유속 계산은 EFEM에 비해 복잡하다. 그래서 검증이 쉬운 EFEM에 대한 자료를 제시하기로 하며, 경계 저면에서 EFEM의 유속은 아주 특이한 형태를 보이므로 이에 대한 검증 목적도 있다. 역류파를 포함한 각 구역별 속도포텐셜과 이에 의한 유속은 식 (A1)과 (A2)로 주어진다.

$$\begin{aligned} \phi_1 &= (e^{ia_{1,0}x} + p_1^- e^{-ia_{1,0}x}) \cosh k_{1,0}(z+h_1) \\ &\quad + \sum_{j=1}^N s_{1,j}^- e^{a_{1,j}(x-x_1)} \cos k_{1,j}(z+h_1) \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial x} &= ia_{1,0}(e^{ia_{1,0}x} - p_1^- e^{-ia_{1,0}x}) \cosh k_{1,0}(z+h_1) \\ &\quad + \sum_{j=1}^N a_{1,j} s_{1,j}^- e^{a_{1,j}(x-x_1)} \cos k_{1,j}(z+h_1) \end{aligned} \quad (A1)$$

$$\begin{aligned} \phi_2 &= p_2^+ e^{ia_{2,0}x} \cosh k_{2,0}(z+h_2) \\ &\quad + \sum_{j=1}^N s_{2,j}^- e^{-a_{2,j}(x-x_1)} \cos k_{2,j}(z+h_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_2}{\partial x} &= ia_{2,0} p_2^+ e^{ia_{2,0}x} \cosh k_{2,0}(z+h_2) \\ &\quad - \sum_{j=1}^N a_{2,j} s_{2,j}^- e^{a_{2,j}(x-x_1)} \cos k_{2,j}(z+h_2) \end{aligned} \quad (A2)$$

본 논문에서와 같이 단일 계단의 경계면은 $x_1=0$ 에 위치하고 $p_1^+=1$ 로 설정한다. 그리고 역류파의 파수는 $n \gg 1$ 인 경우 $k_{i,n} h_i \approx n\pi$ 가 된다. 역류파 8개를 사용하여 Fig. 4b에서 $k_{1,0} h_1 = 0.8$ 인 경우에 계산한 EFEM의 미지수는 Table A1에, Fig. 5b의 미지수는 Table A2에 각각 나타내었다. Table에 주어진 $b, a_{ij}(j=1, \dots, N)$ 를 식 (2)에 대입하면 $k_{i,j}$ 를 계산할 수 있다.

해면변위 계산을 위해 식 (A1)과 (A2)를 식 (5)에 대입하고 Table A1의 값을 이용한 후 여기에 e^{iby} 를 곱해 허수부를 취하면 Fig. 5b의 점(x, y)에서의 변위를 얻는다. 한편 선상의 x 방향 수직 유속을 계산하기 위해 식 (A1), (A2) 그리고 Table A2의 값을 이용한다. 계산된 유속에서도 허수부를 취하면 $x=0$ 에 직교 입사파의 파봉이 위치한 경우의 방향 유속이 된다.

Fig. 4는 구역 1의 수심이 낮은 경우로 Table A2의 역류파 계수 $s_{1,j}^-$ 가운데 허수부는 모두 양의 값을 보이며

Table A1. Computed coefficients for a normal incident wave.

$\theta_i = 0^\circ$	$k_{1,0} h_1 = 0.8$	$k_{2,0} h_2 = 1.703$	$b = 0$	$w = 2.2828$
Coef.	p_1^-	$s_{1,1}^-$	$s_{1,2}^-$	$s_{1,3}^-$
Real	-0.6451E-01	-0.5667E-01	-0.1595E-01	-0.1200E-01
Imag	-0.1422E+00	0.6841E-01	0.2593E-01	0.2398E-01
Coef.		$s_{1,5}^-$	$s_{1,6}^-$	$s_{1,7}^-$
Real		-0.3922E-02	-0.2695E-02	-0.1969E-02
Imag		0.6656E-02	0.4509E-02	0.3267E-02
Coef.	p_2^+	$s_{2,1}^+$	$s_{2,2}^+$	$s_{2,3}^+$
Real	0.4547E+00	-0.4477E-01	-0.8681E-02	0.1816E-01
Imag	0.5745E-01	0.4622E+00	-0.6957E-01	-0.2710E-01
Coef.		$s_{2,5}^+$	$s_{2,6}^+$	$s_{2,7}^+$
Real		0.8572E-03	0.5423E-02	-0.4636E-02
Imag		-0.1221E-01	-0.9324E-02	0.1314E-01
	$a_{1,0}$	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$
	0.8000E+00	0.2964E+01	0.6198E+01	0.9368E+01
		$a_{1,5}$	$a_{1,6}$	$a_{1,7}$
Wave no.		0.1567E+02	0.1882E+02	0.2197E+02
in x-dir	$a_{2,0}$	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$
	0.5677E+00	0.8633E+00	0.2008E+01	0.3085E+01
		$a_{2,5}$	$a_{2,6}$	$a_{2,7}$
		0.5202E+01	0.6255E+01	0.7306E+01
	$K_R = 0.15615$	$K_I = 0.97203$	$E = 1.00000$	

Table A2. Computed coefficients for an oblique incident wave.

$\theta_1 = 45^\circ$	$k_{1,0}h_1=0.796$	$k_{2,0}h_2=1.691$	$b=0.56286$	$w=2.2733$	
Coef.	p_1^-	$s_{1,1}^-$	$s_{1,2}^-$	$s_{1,3}^-$	$s_{1,4}^-$
Real	0.8229E+00	-0.9501E-01	-0.2515E-01	-0.1784E-01	-0.9693E-02
Imag	-0.2225E-01	0.7293E-02	0.2876E-02	0.2698E-02	0.1228E-02
Coef.		$s_{1,5}^-$	$s_{1,6}^-$	$s_{1,7}^-$	$s_{1,8}^-$
Real		-0.6118E-02	-0.4220E-02	-0.3089E-02	-0.2359E-02
Imag		0.7432E-03	0.5032E-03	0.3645E-03	0.2766E-03
Coef.	p_2^+	$s_{2,1}^+$	$s_{2,2}^+$	$s_{2,3}^+$	$s_{2,4}^+$
Real	0.9239E+00	0.2282E-01	-0.3382E-01	0.2922E-01	-0.1409E-01
Imag	0.1886E-02	0.4556E-01	-0.8069E-02	-0.2940E-02	0.4102E-02
Coef.		$s_{2,5}^+$	$s_{2,6}^+$	$s_{2,7}^+$	$s_{2,8}^+$
Real		-0.1251E-02	0.8428E-02	-0.5963E-02	-0.1107E-02
Imag		-0.1429E-02	-0.1037E-02	0.1498E-02	-0.3519E-03
	$a_{1,0}$	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$	$a_{1,4}$
	0.5629E+00	0.3019E+01	0.6224E+01	0.9385E+01	0.1254E+02
		$a_{1,5}$	$a_{1,6}$	$a_{1,7}$	$a_{1,8}$
Wave no.		0.1568E+02	0.1883E+02	0.2197E+02	0.2512E+02
in x-dir	$a_{2,0}$	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$	$a_{2,4}$
	0.3283E-01	0.1032E+01	0.2086E+01	0.3136E+01	0.4185E+01
		$a_{2,5}$	$a_{2,6}$	$a_{2,7}$	$a_{2,8}$
		0.5233E+01	0.6280E+01	0.7328E+01	0.8376E+01
	$K_R=0.82323$	$K_I=1.94346$	$E=1.00000$		

j 증가에 따른 계수는 대체적으로 느리게 감소하고 반면에 x 방향 파수는 완만하게 증가한다. 허수부가 양인 현상은 Fig. 4의 모든 경우에서 동일하게 나타났다.

Fig. 4에 도시된 구역 1의 유속은 직교 입사파의 해면 유속으로 무차원한 유속이다. 구역 1의 저면유속은 식 (A3)가 되며 식 (2)로부터 $a_{1,j} = k_{1,j} > 0$ ($j = 0, \dots, N$) 이다.

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x} = ia_{1,0}(1-p_i^-) + \sum_{j=1}^N a_{1,j}s_{1,j}^- \quad (A3)$$

Fig. 4b 가운데 $k_{1,0}h_1=0.8$ 의 경우 식 (A1)과 Table A1을 이용하

Table A3. Normalized velocities along for a normal incident wave.

N	2	8	16	30
$u(0,0)/U_f(0)$	0.8569	0.9193	1.0074	0.9731
$u(0,-h_1)/U_f(0)$	1.2939	1.7762	2.1623	2.6116

여 계산된 저면 유속은 Table A3에 보인 바와 같이 억류 파의 개수에 따라 상이하게 된다.

결국 EFEM으로부터 구한 x 방향 유속은 억류파의 개수에 따라 다르기 때문에 이를 사용할 때 주의하여야 한다.