

현이론을 이용한 사장교 케이블 장력산정

Estimation of Stay Cable Tension Using String Vibration Theory

박연수* · 최선민** · 이병근*** · 김민중***

Park, Yeon-Soo · Choi, Sun-Min · Lee, Byung-Geun · Kim, Nin Jung

Abstract

Estimate method of cable tension forces can be classified into direct method and indirect method. Direct method is not accuracy and it has many restrictions. Therefore, in generally Indirect method, vibration method using natural frequency, has been applied to estimate the tension forces. In this study, cable tensions of recently constructed cable-stayed bridge are measured using string vibration method and this result comparing with result of multiple mode method. To put it brief, the error of string vibration method is not exceeding 2% under 7th mode. Specially third and 4th mode error is not exceeding 1%. safety.

Key words : cable stayed bridge, vibration method, multiple mode method, natural frequency

요 지

사장교 케이블 장력 산정 방법에는 직접적인 방법과 간접적인 방법이 있는데 직접적인 방법은 정확성에 문제가 있을 뿐만 아니라 제한사항도 많다. 따라서 일반적으로 케이블 장력 추정에는 간접적인 방법인 고유진동수를 이용하는 진동법을 사용하고 있다. 최근 시공된 사장교의 케이블에 대해 현이론을 이용한 진동법으로 케이블 장력을 산정해 그 결과를 다중진동모드를 이용한 진동법과 비교했다. 그 결과를 요약하면, 현이론 방법의 오차는 7차이하의 진동모드에서는 2%를 초과하지 않았다. 특히, 3차와 4차 진동모드의 오차는 1%를 초과하지 않았다. 그리고 진동모드의 차수가 증가하고 케이블 단면이 클수록 오차는 증가했고, 장력이 크고 케이블 길이가 길수록 오차는 낮아짐을 알 수 있었다. 즉 7차 이하의 진동모드에서 높은 정밀도를 갖는다는 것을 알 수 있다.

핵심용어 : 사장교, 진동법, 다중진동모드, 고유진동수

1. 서 론

최근에 재료의 발달 및 시공기술의 발전에 힘입어 장대교량의 가설이 급증하고 있으며 이에 따라 사장교, 현수교, 널슨 아치교 등과 같이 케이블을 주 요소로 사용하는 교량의 건설이 증가하고 있다. 본 논문에서는 사장교 케이블 장력을 간접적으로 추정하는 세 가지 진동법에 대해 이론적으로 고찰하여, 최근 시공된 사장교를 모델로 시공현장에서 직접 현장 계측을 통해 각각의 방법들을 비교해보고 현 이론을 이용한 케이블 장력 추정방법의 정밀도와 실용성 및 적용성에 대해 살펴본다.

현이론을 이용한 케이블 장력 산정방법을 통한 케이블 장력 결과를 다중진동모드를 이용한 방법의 결과와 비교해 본다.

2. 케이블 장력에 따른 이론적 배경

2.1 현의 진동이론

그림 1에 있는 현의 모델에 대한 수직력의 평형방정식을 세우면 다음과 같다.(Shinke & Hironaka, 1980)

$$-T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + T\left(\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx\right) - \rho dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + f dx = 0 \quad (1)$$

여기서, y : 진폭 x : 길이방향의 좌표

T : 장력 t : 시간

ρ : 단위길이당 질량 f : 분포외력

그림 1은 단순보에서 왼쪽아래 꼭지점에 대한 모멘트 평형 방정식과 수직성분 힘에 대한 그림이다. 위 식을 외력이 없

*정회원 · 전남대학교 토목공학과 교수(E-mail: parkys@jnu.ac.kr)

**정회원 · 전남대학교 토목공학과 박사과정

***전남대학교 토목공학과 박사과정

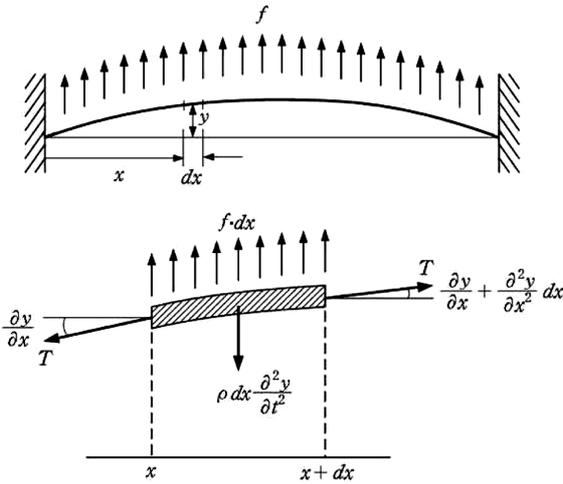


Fig 1. Vibration theory of model

는 고유치문제로 전환하여 정리하면 다음과 같다. (신주환 등, 1999)

$$\frac{w}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad (2)$$

여기서 w : 단위길이당 중량

g : 중력가속도

위의 식을 양단 고정 경계조건으로부터 풀면 다음과 같다.

$$T = \frac{4wl^2}{n^2} f_n^2 \quad (3)$$

여기서 f_n : n 차 고유진동수

l : 케이블의 길이

식 (3)과 같이 케이블이 완전한 현의 거동을 한다고 가정하면, 모든 진동모드에 대해서 동일한 크기의 장력이 얻어진다. 그러나 실제 케이블은 휨강성과 sag 효과에 의한 영향이 포함되어있기 때문에 모든 진동모드에 대해서 선형적인 관계를 갖지는 않는다.

2.2 보의 진동이론

2.2.1 다중 진동모드 이용법

전 시간에 걸쳐서 휨강성이 일정하다고 생각하고 경계조건을 양단고정으로 하여 정리하면 다음과 같다.

$$T = \frac{4wl^2}{g} \left(\frac{f_n}{n}\right)^2 - \frac{EI\pi^2}{l^2} n^2 \quad (4)$$

다시 식 (4)를 최소자승법을 이용하여 일차회귀항으로 표현하면 다음과 같다. (김남식 등, 2002)

$$\left(\frac{f_n}{n}\right)^2 = \frac{T \cdot g}{4wl^2} + \frac{(EI)_{eq} \pi^2 g}{4wl^4} \cdot n^2 = b + a \cdot n^2 \quad (5)$$

$$T = \frac{4wl^2}{g} \cdot b \quad (6)$$

$$(EI)_{eq} = \frac{4wl^4}{\pi^2 g} \cdot a \quad (7)$$

이 방법은 케이블의 다중진동모드를 이용하는 방법으로써, 측정된 고유진동수와 모드차수(order of mode)와의 상관관계를 분석함으로써 케이블의 장력과 이에 대응하는 등가정적휨강성(equivalent static flexural rigidity, $(EI)_{eq}$)을 추정할 수 있다.

2.1.2 단일 진동모드 이용법

Shinke가 제안한 근사식으로 표현하면 다음과 같다.

i) sag가 작은 경우 ($\Gamma \leq 3$)

$$T = \frac{4w}{g} (f_1 l)^2 \left\{ 0.857 - 10.89 \left(\frac{c}{f_1}\right)^2 \right\} \quad (3 \leq \xi \leq 17) \quad (8)$$

$$T = \frac{4w}{g} (f_1 l)^2 \left\{ 1 - 2.2 \left(\frac{c}{f_1}\right) - 2 \left(\frac{c}{f_1}\right)^2 \right\} \quad (\xi \geq 17) \quad (9)$$

ii) sag가 큰 경우 ($\Gamma < 3$)

$$T = \frac{w}{g} (f_2 l)^2 \left\{ 1.02 - 6.26 \frac{c}{f_2} \right\} \quad (\xi \geq 17) \quad (10)$$

여기서 w : 단위길이당 중량

g : 중력가속도

f_n : n 차 고유진동수

l : 케이블의 길이

$$c = \sqrt{\frac{Elg}{wl^4}} \quad \xi = \sqrt{\frac{T}{EI}} l$$

$$\Gamma = \sqrt{\frac{wl}{128EA(\delta)^3 \cos^5 \theta}} \left(\frac{0.31\xi + 0.5}{0.31\xi - 0.5} \right)$$

δ = sag / 케이블의 수평성분의 길이

위의 식에서 ξ 와 Γ 는 케이블의 성질을 나타내는 무차원항으로서 ξ 는 휨강성의 영향을 나타내는 항이고 Γ 는 sag의 영향을 나타내는 항이며, Γ 에 따라서 (8)식과 (9)식은 1차 진동(대칭 1차)에 대한 근사식, (10)식은 2차 진동(역대칭 1차)에 대한 근사식이다.

2.3 유효길이 산정

가장 일반적인 유효길이 산정방법은 그림 2에서 보는 바와 같이 케이블 전체길이에서 케이블 직경을 제한 길이를 유효길이라고 가정하는 것이다.

$$l_{eff} = l - d \quad (11)$$

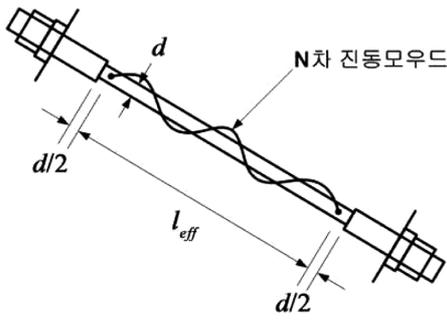


Fig 2. cable of effective length

진동법으로 측정된 사장재 케이블의 장력은 케이블 길이와 도입장력의 크기에 따라 오차는 변한다. 이러한 오차를 소거하기 위해 무차원 변수인 '장력-축강성비'를 사용하여 보완된 식이 제시되었는데 다음과 같다.(윤자걸 등, 1999)

$$l_{eff} = (l-d) - 0.1494e^{-\frac{1684T}{EA}} \quad (12)$$

여기서, T : 장력, EA : 축강성
 d : 케이블직경 l : 케이블의 전체길이

3. 장력 산정

3.1 케이블 상세

케이블의 번호는 모델이 된 사장교가 위치한 지명의 이니셜 J측과 H측으로 구분하여 교대에서 교량 중앙방향 순으로 1번부터 15번까지 부여하였으며, J측에서 H측을 바라볼 때 교축중심으로 오른쪽을 R, 왼쪽을 L로 표기하였다.

3.2 현의 진동이론을 이용한 방법

진동법을 이용한 세 가지 장력 산정 방법은 모두 고유진동수를 기본 데이터로 한다. 고유 진동수는 현장 계측을 통해

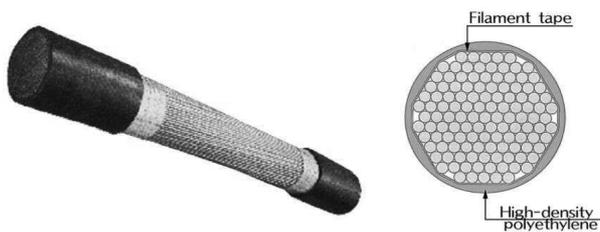


Fig 3. Cable form and section

Table 1. cable resources

Cable Type	Prefabricated Wire Cable
Cable composition	소선직경 : 7 mm 소선다발의 twist 각도 : 3~4° 다발구성 : $\Phi 7 \times 73, 109, 139, 155$
Corrosion-resistant system	1st : HDPE Tube 2nd: Filament Tape 3rd : PE Tube로 이중피복
The modulus of elasticity	$2.0 \times 105 \text{ N/mm}^2$
Tensile strength	$1,800 \text{ N/mm}^2$

획득한 가속도값을 FFT 분석하여 각 진동모드별 추출하는데, 표 2는 이렇게 얻어진 고유 진동수를 앞에서 살펴 본 현이론식인 식(3)에 대입하여 각 진동모드별 케이블의 장력을 산정하는 예를 보여준 그림이다.

표 2에서 보는 바와 같이 1개의 케이블에 대해서 현의 진동모드별로 각각 다른 장력값이 산정되는 것을 알 수 있다. 여기서 케이블이 이론상에서처럼 완전한 현의 거동($f_n = n f_1$)을 한다면, 모든 진동모드에 대해서 동일한 크기의 장력이 얻어져야 하지만 실제 케이블은 휨강성과 sag 효과에 의한 영향이 포함되어있기 때문에 모든 진동모드에 대해서 선형적인 관계를 갖지는 않는다 것을 보여주고 있다.

3.3 다중진동모드를 이용한 방법

표 3은 계측과 FFT분석으로 얻어진 각 모드별 고유진동수를 최소사승법으로 일차 회귀분석 하여 기울기와 절편을 구하고, 다중진동모드를 이용한 장력산정식인 식(6)에 대입하여 케이블의 장력값을 산정하는 예를 보여준 그림이다.

4. 장력 계산 결과의 비교분석

4.1 현이론의 장력오차

그림 5.6.7.8은 15개 케이블의 4가지 경우에서 나타난 전

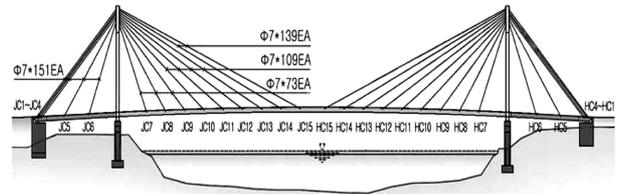


Fig 4. A plot plan of cable

Table 2. string vibration theory estimation of Tension for example

w(t/m)	0.0476	
Effective length(m)	98.75	
Mode number (n)	Frequency(f)	Tension(T)
2	2.002	189.64
3	3.027	192.69
4	4.053	194.31
5	5.078	195.22
6	6.055	192.75
7	7.080	193.62
8	8.154	196.62
9	9.180	196.91
10	10.254	199.00
11	11.279	198.99
12	12.354	200.60
13	13.428	201.93
14	14.551	204.46

Table 3. multi-Vibration mode theory estimation of Tension for example

w(t/m)	0.0476	Effective length(m)	98.75
Mode number (n)	Frequency(f)	n ²	(f/n) ²
2	2.002	4	1.002001
3	3.027	9	1.018081
4	4.053	16	1.026676
5	5.078	25	1.031443
6	6.055	36	1.018417
7	7.080	49	1.022988
8	8.154	64	1.038871
9	9.180	81	1.040400
10	10.254	100	1.051445
11	11.279	121	1.051371
12	12.354	144	1.059870
13	13.428	169	1.066930
14	14.551	196	1.080263

[OUTPUT]

Slope(a)	0.0003349	Intercept(b)	1.0130120
----------	-----------	--------------	-----------

체적인 경향은 진동모드의 차수가 증가함에 따라 오차도 증가하고 저차모드에 가까울수록 오차가 감소하며 음(-)의 오차가 나타나는 경우가 많아짐을 알 수 있다.

그림 5는 JC_Right 케이블의 장력오차를 나타내는 그래프로 JC7_R 케이블이 15차 모드에서 13.87%로 가장 큰 오차를 나타내고, JC15_R 케이블이 17차모드에서 2.44%로 가장 작은 오차를 나타내고 있다.

그림 6은 JC_Left 케이블의 장력오차를 나타내는 그래프로 JC6_L 케이블이 16차 모드에서 14.78%로 가장 큰 오차를 나타내고, JC15_L 케이블이 17차모드에서 2.50%로 가장 작은 오차를 나타내고 있다.

그림 7은 HC_Right 케이블의 장력오차를 나타내는 그래프로 HC7_R 케이블이 16차 모드에서 19.26%로 가장 큰 오차를 나타내고, HC15_R 케이블이 19차모드에서 3.01%로 가장 작은 오차를 나타내고 있다.

그림 8은 HC_Left 케이블의 장력오차를 나타내는 그래프로

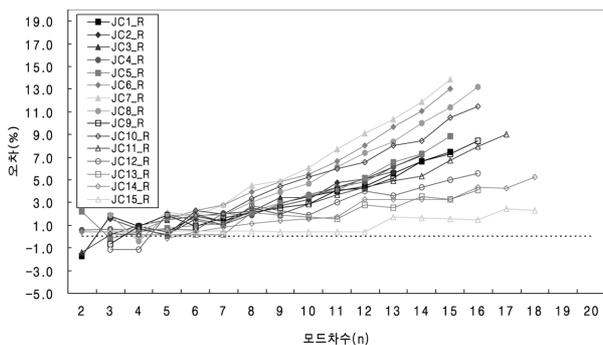


Fig 5. JC_Right cable of tension error

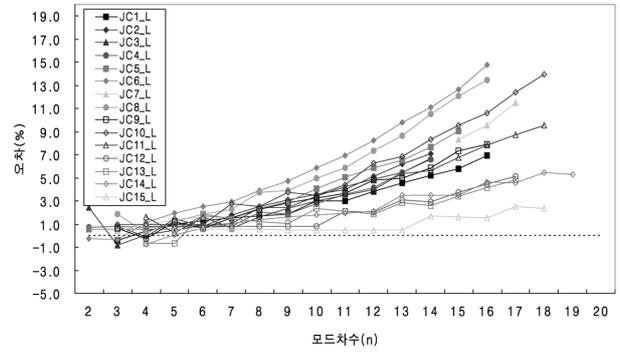


Fig 6. JC_Left cable of tension error

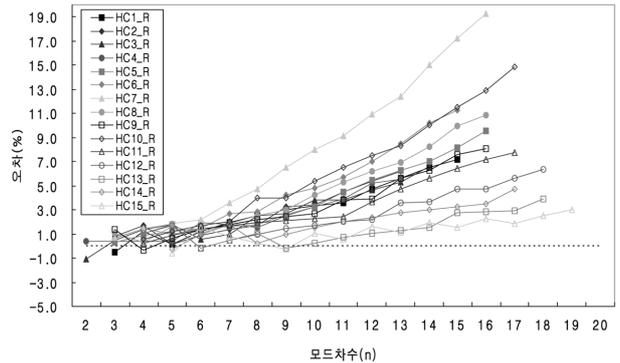


Fig 7. HC_Right cable of tension error

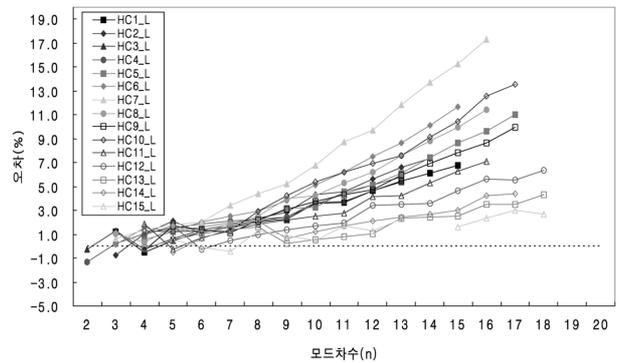


Fig 8. JC_Left cable of tension error

로 HC7_L 케이블이 16차 모드에서 17.28%로 가장 큰 오차를 나타내고, HC15_L 케이블이 17차모드에서 3.03%로 가장 작은 오차를 나타내고 있다.

4.2 모드차별 오차

그림 9.10.11.12에서는 7차 진동모드 이하에서는 오차 평균이 2%미만으로 나타났다. 그리고 모드차수별 오차 중 3차 진동모드와 4차 진동모드에서 가장 작은 값을 나타냈으며 오차 최대값도 60개 케이블 전체에서 3차와 4차 진동모드의 오차는 2%를 초과하지 않았음을 알 수 있었다.

그림 9는 JC Right Cable의 모드차수별 오차의 평균값을 나타낸 그래프이다. 이 경우에는 4차모드에서 0.63%의 가장 작은 오차를 나타내고 있다.

그림 10은 JC Left Cable의 모드차수별 오차의 평균값을 나타낸 그래프이다. 이 경우에는 4차모드에서 0.66%의 가장 작은 오차를 보이고 있다.

그림 11은 HC Right Cable의 모드차수별 오차의 평균값을 나타낸 그래프이다. 이 경우에는 3차모드에서 0.70%의 가장 작은 오차를 보이고 있다.

그림 12는 JC Right Cable의 모드차수별 오차의 평균값을 나타낸 그래프이다. 이 경우에는 3차모드에서 0.76%의 가장 작은 오차를 보이고 있다.

4.3 장력변화에 따른 오차

그림 13은 JC6R 케이블에 대해 장력변화단계를 64.69 ton에서 147.87 ton까지 7단계로 설정하여 오차변화를 나타낸 그래프다.

그림 14는 JC7R 케이블에 대해 장력변화 단계를 79.20 ton에서 157.84ton까지 7단계로 설정하여 오차변화를 나타낸 그래프다.

그림 15는 HC6R 케이블에 대해 장력변화 단계를 51.22ton에서 140.53ton까지 7단계로 설정하여 오차변화를 나타낸 그래프다.

그림 16은 HC7R 케이블에 대해 장력변화 단계를 60.18ton에서 129.19ton까지 7단계로 설정하여 오차변화를 나타낸 그래프다.

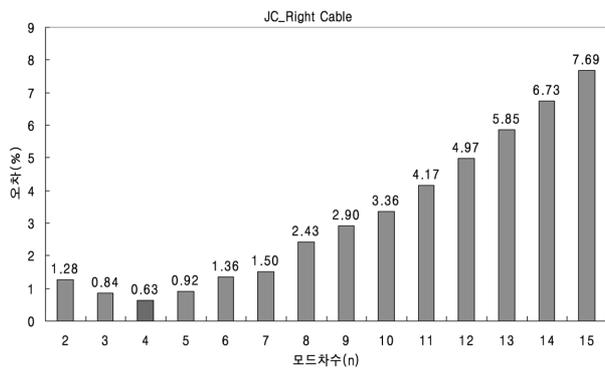


Fig 9. JC_Right cable of mode number error

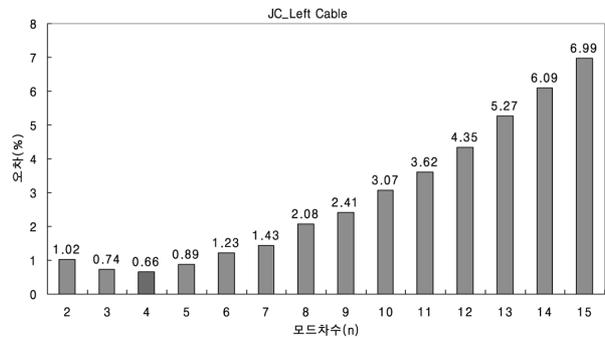


Fig 10. JC_Left cable of mode number error

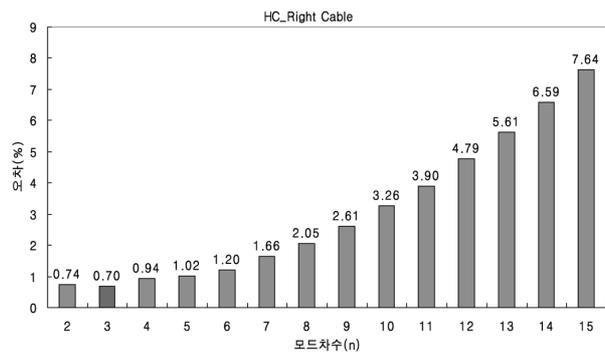


Fig 11. HC_Right cable of mode number error

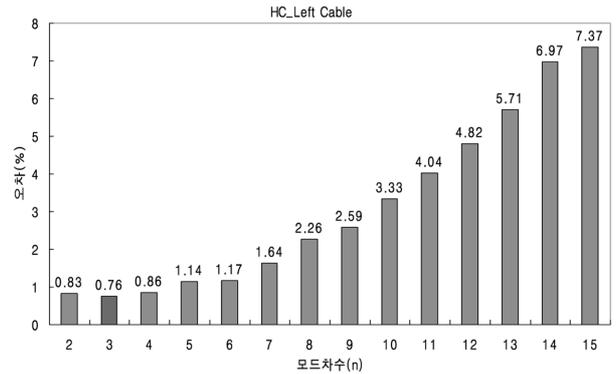


Fig 12. HC_Left cable of mode number error

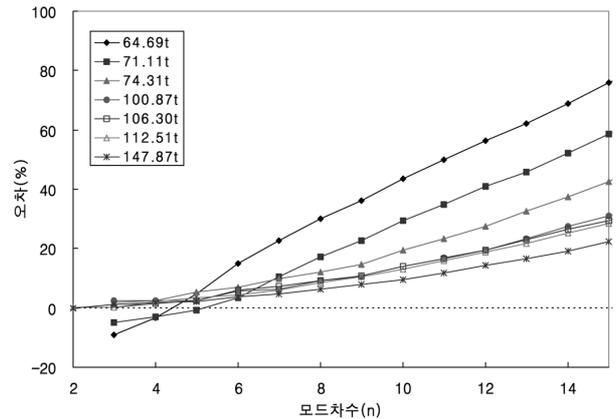


Fig 13. JC6R cable of tension change error

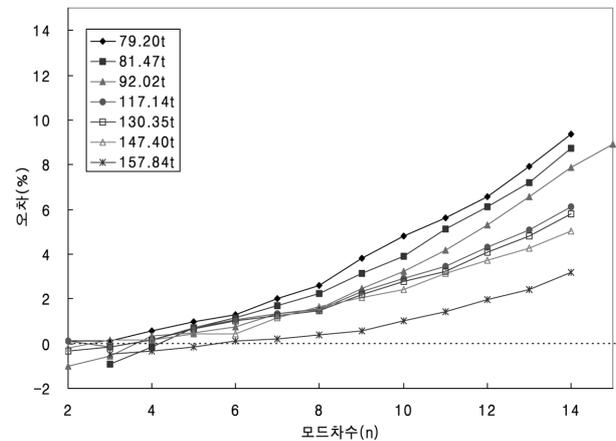


Fig 14. JC7R cable of tension change error

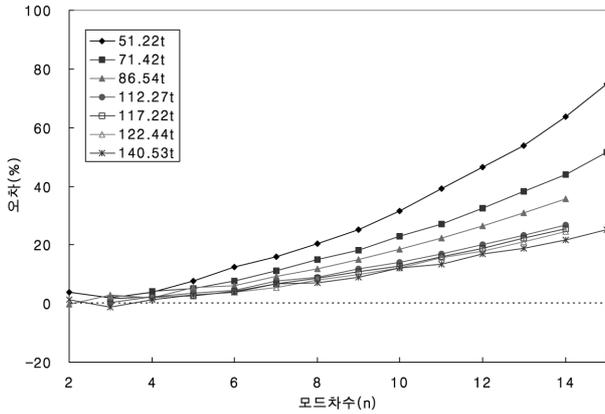


Fig 15. HC6R cable of tension change error

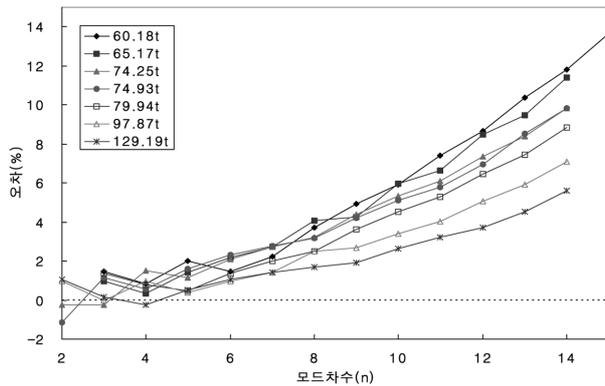


Fig 14. JC7R cable of tension change error

JC6R과 HC6R의 오차 변화와 JC7R과 HC7R의 오차 변화가 상당한 차이가 있는데 이것은 케이블 두께 즉, 휨강성의 영향으로 판단할 수 있다. 그러므로 케이블에 도입되는 장력의 크기가 증가할수록 오차는 감소함을 알 수 있었다.

5. 결 론

본 논문에서는 모드차수별 오차, 장력변화에 따른 오차, 길이 변화에 따른 오차를 분석하여 현이론 방법의 정밀도와 적용성에 대해 살펴보았고 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

(1) 15개 케이블의 4가지 경우에서 나타난 전체적인 경향은

진동모드의 차수가 증가함에 따라 오차도 증가하고 저차모드에 가까울수록 오차가 감소하며 음(-)의 오차가 나타나는 경우가 많아짐을 알 수 있다.

- (2) 케이블 시공 초기에 가설된 JC6R, JC7R, HC6R, HC7R 케이블에 대해 장력변화에 따른 오차 변화 추이를 살펴본 결과 장력이 증가함에 따라 오차는 감소한다는 것을 알 수 있는데 그 이유는 장력이 커지면 새그비가 작아지기 때문으로 판단된다.
- (3) 이상의 결론을 종합해 보면, 현이론법은 7차 이하의 진동모드에서 높은 정밀도를 보이며, 케이블 길이가 길고 장력이 클수록 정밀도는 높아진다는 것을 알 수 있다. 또한 대상교량에 있어서 현이론법이 더 신속하고 간편하게 장력을 추정할 수 있음을 알 수 있었다.

감사의 글

본 연구는 2007년 전남대학교 연구년교수연구비 지원사업으로 이루어진 것으로 본 연구를 가능하게 한 학교당국에 감사드립니다.

참고문헌

- 김남식, 정 운 (2002) Development of Cable Exciting System for Evaluating Dynamic Characteristics of Stay Cables. 한국소음진동공학회 논문집, 한국소음진동공학회, 제12권, pp. 956-963.
- 신주환, 박준상, 이민구, 김상호, 황학주 (1993) 케이블의 장력측정에 관한 연구. 대한토목학회 학술발표회 논문집, 대한토목학회, pp. 292-295.
- 윤자걸, 손진, 장승필 (1999) A Study on Tension Measurement for Cable-Supported Bridge. 대한토목학회 학술발표회 논문집, 대한토목학회, pp. 117-120.
- Humar, J.L. (1990) *Dynamics of Structures*. Prentice-Hall, Inc, NJ.
- Irvine, H. M. (1981) *Cable Structures*. MIT Press, Cambridge, Mass.
- Shinke, T., Hironaka, K., Zui, H., Nishimura, H. (1980) Practical formulas for estimation of cable tension by vibration methods. *Proceedings of JSCE*, Vol. 294, pp. 25-34.

- ◎ 논문접수일 : 09년 2월 17일
- ◎ 심사의뢰일 : 09년 2월 18일
- ◎ 심사완료일 : 09년 3월 23일