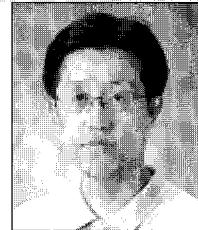


# 정규분포 확률변수인 구조의 확률적 거동

## Assumption of Gaussian Random Variable and Uncertain Structural Response



노혁천\*

\*세종대학교 토목환경공학과 조교수

### 1. 서론

구조계에 대한 추계론적 유한요소해석(Stochastic FEM)은 구조계 내에 존재하는 불확실성(uncertainty)을 해석에 고려하고, 이에 의하여 구조 응답에 나타나는 응답의 불확실성을 얻고자 하는 해석법으로서 해석에는 다양한 종류의 불확실성들이 수학적으로 모델링되어 도입된다. 일반적으로 구조 해석의 경우 크게 세 가지의 불확실성을 고려할 수 있는데, 첫째가 구조 재료의 재료상수에서 나타나는 불확실성이며, 둘째로는 구조의 기하학적 형상에 나타나는 불확실성으로서 부재단면의 공간적 임의성과 박막구조 등에 나타나는 두께 및 형상의 불확실성 등이 포함된다. 재료와 기하학적 인수의 불확실성은 공간적 분포를 나타낸다. 셋째로는 하중에 나타나는 불확실성으로서 보통의 경우 임의진동(random excitation)에 의한 구조의 응답특성과의 등을 들 수 있다. 이들 불확실성은 일반적으로 이에 대한 제어가 불가능하고 그 존재가 자연적이므로 내재적 불확실성(intrinsic uncertainty)으로 불려진다.

이와 함께 구조계에 대한 확률적 모델링에서 고려되어야 하는 것으로 각 불확실인수에 대한 수학적 모델링을 들 수 있다. 즉, 하나의 불확실인수가 어떤 확률분포를 가질 것이냐 하는 것이다. 자연계에 존재하는 많은 인수들은 보통은

정규분포(normal distribution)하는 것으로 보아도 크게 무리가 없는 경우가 많으나, 특정 인수의 경우 그 인수가 가지는 역학적, 이론적 특성에 따라 자연대수분포(Log normal distribution), 포아송분포(Poisson distribution), 최대 또는 최소치분포(max or min extreme distribution) 등의 확률적 분포로 가정할 수 있다.

기대되는 바와 같이, 하나의 확률변수(random variable)를 어떤 확률적 분포로 가정하는냐는 그 인수에 대한 실제적인 확률적 모델링인지 아닌지의 문제이기도 하지만, 구조의 응답 자체가 이러한 확률적 분포에 의하여 영향을 받게 된다는 보다 중요한 측면이 있다. 따라서 특정의 불확실 인수에 대하여 어떤 확률 분포를 가정할 것인가 하는 것은 구조응답에 대한 확률적 거동 특성 파악에서 매우 중요한 전제가 된다.

본고에서는 먼저 재료탄성계수를 정규분포 확률변수로 가정하고 이에 대한 구조거동의 정확해를 유도하여 그 해의 특성을 살펴본다. 또한 재료탄성계수에 대한 정규분포 가정의 문제점을 이론적인 관점과 동시에 수치해석을 통하여 제시한다. 나아가 정규분포가 아닌 특정의 단순 확률분포에 의한 구조거동의 특성을 살펴보고자 한다.

여기서 다루는 내용은 “확률변수상태”라는 특수한 상태에 대한 것으로, 이는 앙상블 개념하의 각 표본이 전체구조영역에서 상수값을 가지는 특수한 상태를 나타내는 것이

다. 이 경우 개별 표본의 집합은 확률변수로 귀착되며 따라서 확률변수상태로 불려진다.

## 2. 확률변수상태에서의 이론해석

### 2.1 강성행렬

구조계 영역  $\Omega_s$ 에 속하는 위치벡터  $\mathbf{x}$ 의 함수로 표현되는 불확실인수의 가장 단순한 수학적 형태는 다음과 같다.

$$P(\mathbf{x}) = \bar{P}[1 + f(\mathbf{x})], \quad \mathbf{x} \in \Omega_s \quad (1)$$

즉, 불확실인수  $P(\mathbf{x})$ 는 평균값인  $\bar{P}$ 와 변동성분인  $\delta P = f(\mathbf{x})\bar{P}$ 로 나누어지게 된다. 재료탄성계수를 확률변수상태로 가정할 경우 확률변수의 공간적 분포를 나타내는 추계장함수(stochastic field function)  $f(\mathbf{x})$ 는 특정한 상수  $Y$ 로 대체될 수 있으며, 따라서 불확실 재료탄성계수는 식 (1)로부터 다음과 같은 형태가 됨을 알 수 있다.

$$E(\mathbf{x}) = \bar{E}[1 + Y] = \bar{E} + \delta E, \quad \text{where } f(\mathbf{x}) = Y, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_s \quad (2)$$

변위법에 근간한 유한요소해석에서 나타나는 강성행렬은 다음의 식과 같이 얻어지고

$$\mathbf{k} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \quad (3)$$

응력 변형률 행렬인  $\mathbf{D}$ 는 식 (2)의 불확실 재료탄성계수  $E(\mathbf{x})$ 를 상수배로 가지므로, 강성행렬은 다음과 같이 평균 강성행렬과 변동강성행렬로 분해된다.

$$\mathbf{k} = (1 + Y)\bar{\mathbf{k}} = \bar{\mathbf{k}} + Y\bar{\mathbf{k}} = \bar{\mathbf{k}} + \delta \mathbf{k} \quad (4)$$

여기서  $\bar{\mathbf{k}} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D}(\bar{E}) \mathbf{B} dV$ ,  $\delta \mathbf{k} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D}(\delta E) \mathbf{B} dV$ 이다.

### 2.2 변위벡터

변위는 유연도 행렬과 작용하중과의 관계로 산정되며 다음의 식을 따른다.

$$\mathbf{U} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F} \quad (5)$$

여기서  $\mathbf{K}$ 는 전체구조강성행렬로서 재료탄성계수에 의한 불확실성을 포함하고 있으며,  $\mathbf{F}$ 는 작용하중벡터로서 확

정론적인 양으로 가정한다. 전체강성행렬은 요소강성행렬의 연계성에 따른 합으로 표현되며, 식 (4)와 같이 평균강성행렬과 변동강성행렬의 합으로 얻어진다. 그런데 변동강성행렬이 모든 요소에 대하여 동일하게  $Y\bar{\mathbf{K}}$ 로 표현되므로 변위벡터는 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\mathbf{U} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F} = \frac{1}{1+Y} \bar{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{F} = (1 - Y + Y^2 - Y^3 + \dots) \mathbf{U}_0 = \mathbf{U}_0 + \Delta \mathbf{U} \quad (6)$$

식 (6)에서 벡터  $\mathbf{U}_0$ 는 확정론적변위를 나타내며 식에서 함의하는 바와 같이  $\mathbf{U}_0 = \bar{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{F}$ 로 얻을 수 있다. 즉, 강성행렬  $\bar{\mathbf{K}}$ 는 평균강성행렬이지만  $\mathbf{U}_0$ 는 평균변위를 의미하지는 않는다. 평균변위는 식 (6)에 대한 평균연산을 통하여 얻을 수 있다. 정규분포에 의한 확률변수는 우함수 형태의 확률밀도함수(probability density function: pdf)이므로 그 대표값인  $Y$  또한 그 특성을 따르게 되며, 따라서 식 (6)의  $\Delta \mathbf{U}$ 에 대한 평균연산은 0의 값을 가지지 않는다.

#### 2.2.1 변위의 평균 (1차 모멘트)

식 (6)에 대한 평균연산으로부터 변위의 평균은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\bar{\mathbf{U}} = \varepsilon[\mathbf{U}] = \varepsilon\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} Y^{2k}\right) \mathbf{U}_0 = (1 + \mu) \mathbf{U}_0 \quad (7)$$

확률변수  $Y$ 의 짝수역에 대한 평균합을 나타내는  $\mu$ 는  $n$ 차 모멘트에 대한 재귀식을 이용하면 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\mu = \varepsilon\left[\sum_{k=1}^{\infty} Y^{2k}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{k! 2^k} \sigma_f^{2k} \quad (8)$$

여기서  $\sigma_f$ 는 추계장의 표준편차를 의미한다. 식 (7)과 (8)에 나타난 바와 같이 변위의 평균은 추계장의 확률적특성( $\sigma_f$ )과 전개차수  $k$ 에 의존하고 있다. 식 (8)의  $\mu$ 는 변위에 대한 Taylor전개에서 고차항을 포함할 때 개선되어지는 결과를 나타내는 부분이다.

#### 2.2.2 변위의 공분산 (2차 모멘트)

어떤 확률변수에 대한 공분산은 그 확률변수의 평균을 중심으로 한 변량의 제곱에 대한 평균으로 얻어진다. 식 (6)과 (7)을 이용하면 평균을 중심으로 한 변량은 다음과 같이 얻어진다.

$$\delta \mathbf{U} = \mathbf{U} - \bar{\mathbf{U}} = (-Y + Y^2 - Y^3 + \dots - \mu) \mathbf{U}_0 \quad (9)$$

그러므로 공분산연산  $\gamma[\mathbf{U}] = \varepsilon[\delta\mathbf{U}\delta\mathbf{U}^T]$ 을 수행하면 변위의 공분산은 다음과 같다.

$$\gamma[\mathbf{U}] = \{-4\sigma_f^2 + 5\mu - 6\sigma_f^4 - \mu^2\} \mathbf{U}_0^2 \quad (10)$$

### 2.2.3 변위의 변동계수

식 (7)의 평균과 식 (10)의 공분산을 이용하여 다음과 같이 변동계수(coefficient of variation)를 얻을 수 있다.

$$\text{c.o.v} = \frac{\sqrt{-4\sigma_f^2 + 5\mu - 6\sigma_f^4 - \mu^2}}{1 + \mu} \quad (11)$$

### 2.3 응력

유한요소법에 의한 응력의 계산은 변위에 근간하여 다음의 식으로 요소별로 계산된다.

$$\sigma = \mathbf{DBU} \quad (12)$$

전송된 바와 같이 응력 변형률 행렬  $\mathbf{D}$ 는 식 (2)의 불확실 재료탄성계수를 상수배로 가지기 때문에  $\mathbf{D} = \bar{\mathbf{D}} + \delta\mathbf{D}$ 로 쓸 수 있으며, 변위는 식 (6)을 따라  $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 + \Delta\mathbf{U}$ 로 쓰여진다. 따라서 이들을 식 (12)에 대입하면 응력은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\sigma = \bar{\mathbf{D}}\mathbf{B}\mathbf{U}_0 + \bar{\mathbf{D}}\mathbf{B}\Delta\mathbf{U} + \delta\mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{U}_0 + \delta\mathbf{D}\mathbf{B}\Delta\mathbf{U} \quad (13)$$

변위에 대한 평균과 공분산의 산정에서 사용된 방법을 식 (13)에 그대로 적용하면 평균응력은 확정론적 응력인  $\sigma_0 = \bar{\mathbf{D}}\mathbf{B}\mathbf{U}_0$ 와 같음을 알 수 있다. 응력의 공분산 산정을 위하여 평균을 중심으로 한 변량을 취하면 다음과 같으며,

$$\begin{aligned} \delta\sigma &= \sigma - \bar{\sigma} = \sigma - \sigma_0 \\ &= \bar{\mathbf{D}}\mathbf{B}\Delta\mathbf{U} + \delta\mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{U}_0 + \delta\mathbf{D}\mathbf{B}\Delta\mathbf{U} \end{aligned} \quad (14)$$

식 (14)에 식 (6)의  $\Delta\mathbf{U}$ 와  $\delta\mathbf{D}$ 를 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\delta\sigma = 0 \times (\bar{\mathbf{D}}\mathbf{B}\mathbf{U}_0) \quad (15)$$

즉, 응력의 평균을 중심으로 한 변량은 0이 되며, 따라서 응력의 공분산은 0이 된다.

응력의 공분산이 0이 된다는 것은, 비록 추계장의 모사된 각 표본이 특정의 탄성계수값을 가질 수는 있으나, 작용하는 하중과 그 하중이 작용하는 면적에는 변화가 없으므로 응력은 탄성계수 값과 관계없이 모든 표본에 대하여

동일한 값을 나타내게 되어 변동성분이 없게 되므로, 합리적인 결과임을 알 수 있다. 물론 이 결과는 “확률변수상태”에 국한된다.

## 3. 정규분포 확률변수 적용의 제한에 대한 고찰

### 3.1 제안식에 의한 고찰

구조재료의 물성치에 대한 정규분포 가정은 이론적 단순성과 현장적용에 대한 실제성 등에 따라 많은 영역에서 채택되고 있으나, 확률변수의 표준편차가 매우 큰 경우에는 적용이 어렵다. 이는 식 (1)에서 보는 바와 같이 추계장  $f(\mathbf{x})$ 의 값이 1.0보다 작거나 같은 경우 탄성계수가 물리적인 의미를 가지지 않기 때문인데, 이는 분산이 큰 경우에 보다 높은 확률로 나타나게 된다. 그러나 분산이 작은 경우에는 그 확률이 매우 낮으므로 허용 가능한 오차범위 내에서 정규분포 확률변수가 채택될 수 있다. 이러한 사실을 배경으로 하여 여기서는 변위의 평균값을 나타내는 식 (7)과 (8)에 기초하여 정규분포 가정의 한계에 대하여 알아보하고자 한다.

일반적으로 식 (7)의 평균변위는 합에 대한 차수  $k$ 가 증가함에 따라 정확한 값에 수렴할 것으로 기대할 수 있다. 그러나 기대에 반하여, 평균변위는  $k$ 가 증가함에 따라 특정의 값에 수렴하지 않고 발산하며, 특히 분산이 클수록 낮은  $k$ 값에서 발산하는 결과를 보인다.

그림 1은 식 (7)에 표현된 확정론적 변위  $\mathbf{U}_0$ 에 대한 승수  $1 + \mu$ 의 변화를 식 (8)의 합에 대한 인수  $k$ 에 따라 나타낸 것이다. 그림 (a)는 변동계수가 0.1인 경우로 이 경우에서 승수  $1 + \mu$ 는  $k=15$ 까지 지속적으로 증가하며 특정 값에 수렴해가는 결과를 보이고 있다. 그러나 그림 (b)와 같이 변동계수가 큰 경우에는 어느 정도까지는 승수가 수렴해 가는 경향을 보이지만 특정의  $k$ 값 이상에서는 발산하는 결과를 나타낸다. 그림 (c)는 그림 (b)의 함수에 대한 미분으로서 변화율을 명확히 나타내기 위하여 세로축은 로그단위로 표시하였다.

주지할 만한 사실은 인수  $k$ 가 무한대일 경우, 추계장의 변동계수가 아무리 작다고 해도 평균변위는 수렴하지 않는다는 것이다. 이러한 결과는 정규분포 확률변수의 경우 피할 수 없는 것으로서 변동계수가 작다고 해도 식 (1)의 추계장  $f(\mathbf{x})$ 의 값이 1.0보다 작거나 같은 경우가 비록 낮은 확률이지만 존재하기 때문이다. 그러므로 정규분포 확률변수를 채택하기 위해서는 추계장이 1.0보다 작을 확률이 충분히 작아 무시할 수 있을 정도임을 판단하게 해주는 이론

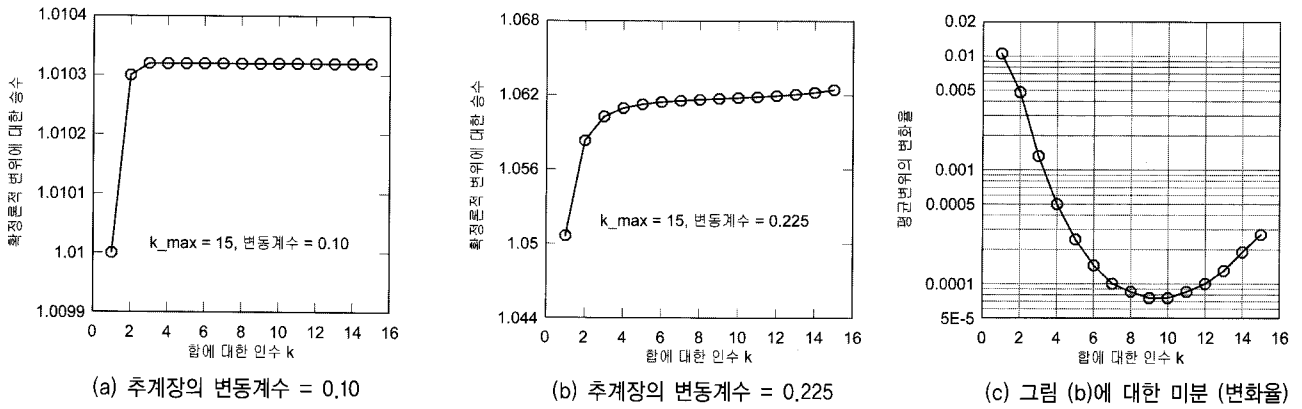


그림 1 추계장의 변동계수와 평균변위

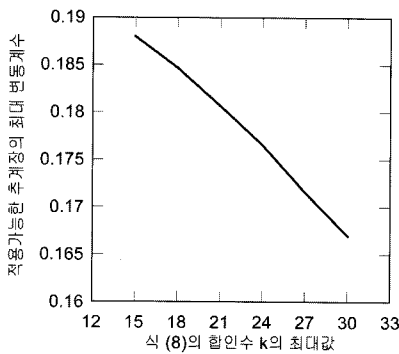


그림 2 식 (8)의 합에 대한 인수 k와 추계장의 변동계수

에 기초한 개략적인 판단기준이 필요하다. 이러한 판단기준은 식 (7)과 (8)에 나타난 인수  $k$ 의 최대값을 고찰하여 얻을 수 있으며, 그림 2는 그 결과를 제시하고 있다.

그림 2는 식 (7)과 (8)의 평균변위의 변화도가  $1 \times 10^6$ 보다 작다는 수렴기준을 택하여 얻은 것으로, 예를 들어, 만일  $k$ 를 25까지만 택할 경우 정규분포 확률변수에서 채택 가능한 최대 변동계수가 0.175임을 나타내고 있다. 물론 최대  $k$ 를 증가시키에 따라 채택할 수 있는 추계장 변동계수의 최대값은 감소하게 된다. 일반적으로 추계론적 해석에서 전개법을 적용할 경우 선행항까지만 고려하고, 최대차수로 보통 2차항까지만 채용한다는 사실을 고려한다면  $k$ 가 10 이상의 값을 가지는 해석은 매우 엄밀한 해석임을 알 수 있다.

### 3.2 이론적 고찰

구조 강성에 대한 정규분포 가정의 이론적 불확정성을 살펴보기 위하여 가장 단순한 구조형태의 하나인 중앙점에 집중하중  $p$ 가 작용하는 길이  $l$ 인 단순보를 고려해 보자. 문제의 단순화를 위하여 여기서도 ‘확률변수상태’에 대하여 고찰한다. 즉, 상관관계거리가 무한대인 경우로 재료탄

성계수가 하나의 특정 표본에 대하여 공간적으로 일정한 값을 가지는 상태를 대상으로 한다. 이 경우 단순보의 중앙점에서의 변위는 다음으로 주어진다.

$$\tilde{U}_{x=l/2} = \frac{pl^3}{48\tilde{E}I} \quad (16)$$

여기서,  $\tilde{U}$ ,  $\tilde{E}$  등은 상수 추계장( $f(X) = Y$ )에 대한 재료탄성계수와 그에 따른 변위를 나타낸다. 이를 하나의 스프링으로 모델링할 경우 스프링상수는  $K = 48\tilde{S}/l^3$ 로 표현되며,  $\tilde{S} = \tilde{E}I$ 이다. 따라서 정규분포 가정에 따른 변위의 2차 모멘트는 다음과 같다.

$$\varepsilon[U^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{p}{k}\right)^2 p_K(k) dk \quad (17)$$

정규분포 확률밀도함수  $p_K(k)$ 는 항상 0보다 크므로 식 (17)로부터 다음의 조건을 얻을 수 있다.

$$\varepsilon[U^2] \geq \int_{-\delta}^{\delta} \left(\frac{p}{k}\right)^2 p_K(k) dk \quad \forall \delta > 0 \quad (18)$$

여기서 정규분포 확률밀도함수의 폐구간  $[-\delta, +\delta]$ 에 대하여 다음의 조건을 만족하는 상수  $C$ 를 설정할 수 있다.

$$\exists c > 0 \text{ for } \delta > 0, \text{ s.t. } p_K(k) \geq c \quad \forall k \in [-\delta, +\delta] \quad (19)$$

그러므로 다음을 얻게 된다.

$$\varepsilon[U^2] \geq \int_{-\delta}^{\delta} \left(\frac{p}{k}\right)^2 c dk = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\delta}^{\delta} \left(\frac{p}{k}\right)^2 c dk + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^{\delta} \left(\frac{p}{k}\right)^2 c dk = \infty \quad (20)$$

최종결과인 식 (20)은 무한대의 값을 취하게 되며, 이는 강성의 확률분포가 정규분포인 경우 변위에 대한 2차 모멘

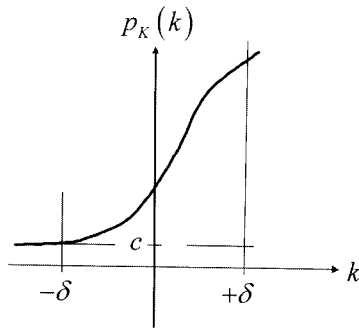


그림 3 확률밀도함수 폐구간

트가 확정적이지 않음을 나타낸다. 이러한 결과는 정규분포에만 국한되지 않으며, 식 (19)를 만족하는 어떤 확률분포에도 적용된다. 즉, 고려하고 있는 확률변수가 음의 값을 가질 확률이 존재할 경우 이에 의한 구조 거동의 2차 모멘트는 불확정한 값을 가지게 되며, 정규분포는 이런 특성을 가지는 전형적인 예라고 할 수 있다.

### 4. 수치예제

#### 4.1 평면구조

그림 4는 첫 수치예제인 10×10크기를 가지는 평면구조이다. 재료탄성계수는  $2.1 \times 10^6$ 이고, 포아송비는 0.20, 작용하중은  $q=100$ 인 등분포하중이며 구조의 하부는 단순지지 되어 있다. 수치결과는 그림 4의 A점의 변위에 대하여 제시한다. 제안된 식 (7)과 (8)에 의한 결과를 표 1에 나타내었다.

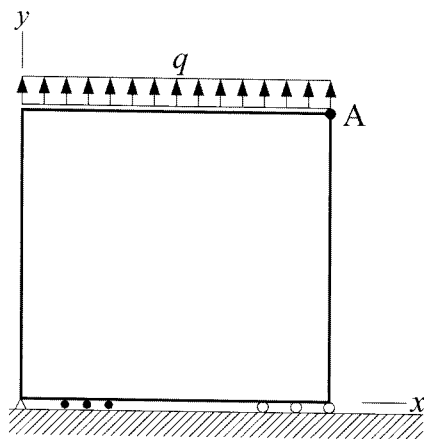


그림 4 평면구조 예제

추계장의 변동계수는 0.1과 0.182(식 (10)에서  $k=20$ 에 해당)를 택하였고, 각 경우에 대하여 결과를 제시하고 있다. 응답의 변동계수는 표 1에 제시된 바와 같이 재료탄성계수의 변동계수 대비 3.22% 및 12.74% 확대되는 결과를 보이고 있으며, 평균변위 역시 재료탄성계수의 변동계수에 따라 변화되는 결과를 보이고 있다.

#### 4.2 평판구조

평판의 예로는 20×20의 크기를 가지는 단순지지 평판을 택하였다(그림 5). 평판의 재료는 탄성계수 10,920.0, 포아송비는 0.3이다. 이 경우 평판의 휨강도(flexural rigidity)는 1,000의 값을 가진다. 하중은 상재 등분포하중으로서 크기는 1.0이다. 그림 5에 제시된 바와 같이 구조 및 하중의 대칭성을 고려하여 1/4모델을 사용하였다.

평판문제에서도 추계장의 변동계수는 0.1과 0.182(식 (10)에서  $k=20$ 에 해당)를 택하였고, 그 결과를 표 2에 나타내었다. 제안식인 식 (7)과 (8)에 의한 결과는 확정론적 변위에 대한 승수의 관점에서 평면문제와 동일한 결과를 나타내고 있다. 응답의 변동계수 역시 재료탄성계수의 변동계수 대비 3.22% 및 12.74% 확대되는 결과를 보이고 있다. 이와 같이 평면 및 평판의 두 문제에 대하여 동일한 확률론적 거동을 보이는 것은 두 문제 모두에서 재료탄성계수가 동일하게 선형함수로 작용하기 때문으로 재료상수의 값과 구조적 특성 즉, 평면문제인지 또는 평판문제인지에 따라 거동 자체는 상이하지만, 평균거동에 추가되는 불확실 거동성분은 평균거동을 중심으로 동일한 특성을 가진다는 사실을 알 수 있다. 물론 이러한 특징은 선형인수인 재료탄성계수에 국한된다.

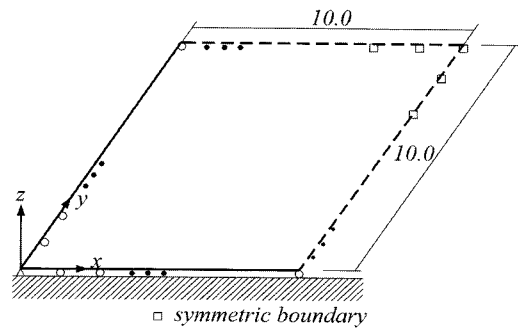


그림 5 평판구조 예제

표 1 평면구조에 대한 해석 결과

재료탄성계수의 동계수 <sup>(a)</sup>	평균변위 $\bar{u}$	확정론적 변위 $u_0$	$\bar{u}/u_0$ or $1+\mu$	응답의 변동계수 <sup>(b)</sup>	(b)/(a) × 100
0.100	$4.8110 \times 10^{-4}$	$4.7619 \times 10^{-4}$	1.01031616	0.10321514	103.22
0.182	$4.9388 \times 10^{-4}$		1.03715012	0.20519441	112.74

표 2 평판구조에 대한 해석 결과

재료탄성계수의 동계수 <sup>(a)</sup>	평균변위 $\bar{u}$	확정론적 변위 $u_o$	$\bar{u}/u_o$ or $1 + \mu$	응답의 변동계수 <sup>(b)</sup>	(b)/(a) × 100
0.100	$6.6518 \times 10^{-1}$	$6.5839 \times 10^{-1}$	1.01031616	0.10321514	103.22
0.182	$6.8285 \times 10^{-1}$		1.03715012	0.20519441	112.74

표 3 삼각형형태의 확률밀도함수에 따른 확률변수상태에서의 이론해

Pdf 형태	추계장의 변동계수 <sup>(a)</sup>	평균변위 $\bar{u}$	확정론적 변위 $u_o$	$\bar{u} / u_o$ or $1 + \mu_i$	응답의 변동계수 <sup>(b)</sup>	(b)/(a) × 100
I	0.10	$4.8107 \times 10^{-4}$	$4.7619 \times 10^{-4}$	1.0102	0.1022	102.18
II	0.20	$4.9734 \times 10^{-4}$		1.0444	0.2197	109.87
III	0.30	$5.3244 \times 10^{-4}$		1.1181	0.3876	129.20

4.3 정규분포 이외의 확률분포에 대한 결과

이론식인 식 (7)과 (8)은 평균이 0인 우함수 확률밀도함수인 정규분포 확률밀도함수에 대한 것으로서 다른 형태의 우함수 확률밀도함수에 대해서도 유사한 이론식의 유도가 가능하다. 재료탄성계수를 삼각형 형태의 확률밀도함수를 가지는 확률변수로 모델링할 경우 이에 의한 평균변위는 식 (7)과 동일하게 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\bar{U} = \varepsilon[U] = \varepsilon(1 + Y_1^2 + Y_1^4 + \dots)U_o = (1 + \mu_i)U_o \quad (21)$$

여기서 짝수며 확률변수에 대한 평균의 합은 다음과 같이 정리된다.

$$\mu_i = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_{min}^{2k}}{(2k+1)(2k+2)} \quad (22)$$

식 (22)에서  $x_{min}$ 은 삼각형형태의 확률밀도함수가 값을 가지는 최소확률변수를 나타낸다. 확률변수의 변동계수는  $x_{min}$ 에 의하여 결정되며 확률변수가 0인 점에서의 확률밀도는  $-1/x_{min}$ 이다. 여기서는  $x_{min} = 0.24495, 0.48991$ , 그리고  $0.73485$  등 세 종류의 확률밀도함수에 대하여 해석하였다. 사용된 세 종류의 확률밀도함수에 대한 변동계수는 각각 0.1, 0.2, 그리고 0.3이다.

표 3은 4.1절에 사용되었던 예제와 동일한 평면문제에 대한 해석결과를 확률밀도함수의 형태별로 제시하고 있다. 표 1, 표 2의 정규분포에 대한 결과와 비교해 보면, 응답변동계수의 추계장변동계수에 대한 비율은 정규분포의 경우 삼각형 분포보다 크게 나타남을 알 수 있다. 이는 정규분포의 경우 3.2절에서 논의된 바와 같이 불확실인수가 음의 값을 가질 확률이 존재함에 의한 영향이 나타난 것이다.


5. 맺음말

본 고에서는 재료탄성계수를 정규분포 확률변수로 가정하고 이에 의한 구조거동을 확률변수상태에 대하여 제시하

였고, 특히 불확실인수에 대한 정규분포 가정의 문제점에 대하여 이론적 및 수치적으로 고찰하였다. 정규분포 확률변수로 가정된 재료탄성계수에 의한 구조 변위에 대한 이론해를 제시하고, 이에 기초하여 정규분포 가정 시 채용 가능한 최대의 변동계수를 제시하였다. 그러나 수학적 엄밀성의 측면에서 재료탄성계수에 대한 정규분포 가정은 항상 오류를 수반하게 된다.

선형 가정에 의한 해석법의 결과와는 달리 본 고에서 제시한 이론해는 구조 응답의 변동계수가 추계장의 변동계수에 대하여 비선형적으로 증가함을 보여주었고, 이러한 경향은 추계장의 변동계수가 증가함에 따라 구조의 거동에 그 영향이 큰 확률밀도함수의 좌측단에서의 확률이 커짐에 의한다는 사실을 고찰하였다. 이는 삼각형형태의 확률밀도함수에 의한 결과와의 비교에서 뚜렷이 나타났는데, 추계장 변동계수의 증가에 따른 응답변동계수의 증가율은 물론 추계장변동계수 대비 응답변동계수의 비가 정규분포에서 확연히 크게 나타났다.

참고 문헌

1. 노혁천, 이필승 (2006), 확률변수상태와 응답변화도 대한토목학회논문집, 제 26권, 제 6A호 pp.1001~1011.
2. Lin, Y. K. (1967), Probabilistic theory of structural dynamics, McGraw Hill book company, 68.
3. Ngah, M. F. and Young, A. (2007), Application of the spectral stochastic finite element method for performance prediction of composite structures, Composite Structures, 78, pp.447~456.
4. Schevenels, M., Lombaert, G. and Degrande, G. (2004), Application of the stochastic finite element method for Gaussian and non Gaussian systems, Proc. ISMA2004, pp.3299~3314. 

[담당 : 노혁천, 편집위원]