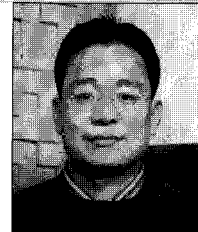


역유한요소법을 사용한 잔류응력의 평가

Evaluation of Residual Stresses by using Inverse Finite Element Method



김 현 규*

* 서울산업대학교 기계공학부 조교수

1. 서론

대부분의 구조해석은 경계에서 주어진 구속과 하중 조건에 대한 변형과 응력을 해석하는 문제인데, 반대로 경계의 하중이나 내부의 응력 상태를 구하는 역(inverse)문제의 해석이 필요하게 된다. 이와 같은 역문제는 구하고자 하는 하중이나 응력과 다른 영역의 경계에서 변위 또는 변형을 등을 측정하여 구하고자 하는 하중과 응력을 구하게 되는데 지질학, 열전달, 유체역학 등의 많은 분야에서도 유사한 역문제가 존재하게 된다. 일부의 측정된 정보를 바탕으로 재료의 물성, 이미지(image), 신호처리, 가진원 등을 구하는 다양한 역문제가 존재하게 된다. 역학적인 관점에서는 구조물의 일부 변형을 측정하여 부여되는 하중의 크기와 분포를 알아내는 역문제가 있게 되는데, 내부의 잔류응력을 알아내는데 응용될 수 있게 된다. 여기서는 잔류응력이 존재하는 구조물을 절단(cutting)을 통하여 전단면의 잔류응력 방출로 인한 변형에 대하여 일부 영역의 변위를 측정하고 역문제를 해석하여 절단면의 잔류응력을 평가하는 방법을 설명하고자 한다.

구조물의 잔류응력을 측정하는 방법 중에서 응력완법 중의 하나인 구멍뚫기법을 기반으로한 연구^{1),2)}가 있었으며 X선을 활용한 표면 잔류응력 측정을 응용한 연구³⁾가 이루어

어지고 있으며 최근에 압입시험기를 이용한 표면의 잔류응력 측정의 연구⁴⁾가 이루어지고 있다. 또한 ESPI (Electronic Speckle Pattern Interferometry)를 사용하여 표면잔류응력을 평가하는 연구⁵⁾가 있는데 잔류응력이 없는 상태와 현재상태의 fringe 패턴의 간섭을 이용하여 잔류응력을 평가하는 방법이다. 이와 같은 연구들은 대부분 표면의 잔류응력을 측정하고 국부적인 평가를 위하여 적용되고 있으며 정확도에서도 개선되어야 할 점들이 많게 된다. 특히 3차원 구조물 내부의 잔류응력을 평가하는 방법은 상당히 어렵기 때문에 내부의 잔류응력을 모두 알아낼 수 있는 방법은 없지만 좀 더 개선된 방법을 찾기 위한 지속적인 노력이 이루어지고 있다. 앞에서 설명한 바와 같이 구조물 내부에 존재하는 잔류응력을 알아내는 문제는 수학적으로 역문제가 되는데 내부의 잔류응력을 고유변형률(eigenstrains)로 수식화하여 계산하는 연구^{6),7)}가 있었다. 이 방법들은 부족한 정보를 바탕으로 내부의 잔류응력을 근사적으로 예측하고자 하는 방법으로 정확도나 활용도 면에서 좀 더 개선이 필요한 방법들이다. 측정 변위로부터 하중을 평가하는 역문제를 해석하기 위하여 Maniatty 등⁸⁾은 단순한 반복계산을 통한 대각선 정규화(regularization)방법을 사용하였고, Schnur과 Zabara⁹⁾는 단위 하중을 반복적으로 부여하여 측정 변위와 하중의 민감성 행렬을 구하는 방법으로 구조물의 하중을 계산하는

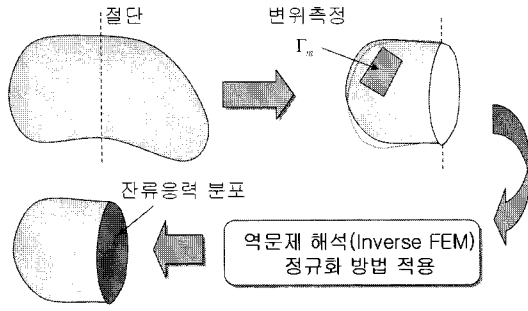


Fig. 1 Evaluation of residual stresses on a cutting plane

방법을 제시하였다. 또한 내부의 잔류응력을 역문제 해결 방법으로 접근한 연구들^{(10), (11)}이 있었는데, 최근에 내부의 잔류응력을 알아내는 방법으로 부분 극분해(polar decomposition) 방법을 사용하여 역문제를 해결하는 새로운 방법이 제시⁽¹²⁾되었다.

구조물 내부의 잔류응력 분포를 알아내는 방법으로 관심 영역을 절단한 후에 다른 영역에서의 변위를 측정하고 역문제 해석을 통하여 절단면의 잔류응력을 구하는 방법이 있는데 그림 1에서 개략적으로 보여주고 있다. 구조물의 경계에서 변위를 측정하는데 필연적으로 측정 오차가 발생하게 되고 평가되는 응력이나 하중의 안정성에 큰 영향을 줄 수 있게 된다. 그러므로 내부의 응력이나 하중을 평가하기 위하여 효율적인 변위 측정 방법과 역문제 해결 방법이 요구된다. 변위의 측정을 통하여 잔류응력을 평가하는 역문제는 측정 변위의 작은 오차로 인하여 결과가 불안해 질 수 있는데, 일반적으로 역 시스템을 안정화시키는 방법이 정규화하는 것이다. 역문제를 효과적으로 해석하기 위하여 적절한 정규화 방법의 선택과 수준을 결정해야 하는데 역문제의 대표적인 방법이 Tikhonov 정규화와 truncated SVD (Singular Value Decomposition) 정규화 방법이다. 많은 분야에서 정규화에 관한 연구들^{(13), (14)}이 있는데, 여기서는 유한요소법을 사용한 역문제 수식화와 Tikhonov와 truncated SVD 정규화 방법을 설명하고자 한다.

2. 탄성체에서 역문제의 정의

선형탄성 문제의 평형방정식은 다음과 같다.

$$\sigma_{ij,j} = 0 \text{ in } \Omega \quad (1)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} \quad (2)$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3)$$

여기서 Ω 는 탄성체 영역이고 σ_{ij} 는 응력성분, ϵ_{ij} 는 변형률 성분, λ 와 μ 는 Lamé 상수이다. 또한 주어진 경계조건은 다음과 같다.

$$u_i = \bar{u}_i \text{ on } \Gamma_u \quad (4)$$

$$\sigma_{ij} n_j = \bar{t}_i \text{ on } \Gamma_t \quad (5)$$

여기서 Γ_u 와 Γ_t 는 변위와 트래クション(traction)이 주어진 경계를 나타낸다. 역문제의 중요한 목표는 트래クション이 주어진 경계의 일부 $\Gamma_c \in \Gamma_t$ 에서 다른 부분 $\Gamma_m \in \Gamma_t$ 의 변위를 측정하여 구하는 것이다.

$$u(x) = u^m(x), \quad x \in \Gamma_m \quad (6)$$

여기서 $\Gamma_c \cap \Gamma_m = \emptyset$ 이다. 그림 2에 변위를 측정하는 영역 Γ^m 과 구하고자 하는 하중 영역 Γ^c 를 보여주고 있다. 기본적으로 역문제의 이론해는 다음과 같은 적분방정식으로 나타나게 된다.

$$u(z) = \int_{\Gamma_c} G(z,x) t(x) dS \quad (7)$$

여기서 $z \in \Gamma_m$ 이고, $G(z,x)$ 는 kernel 함수이다. 위의 식은 Fredholm의 적분방정식으로 하중이 단지 Γ_c 에서만 주어지는 경우에 유효하게 된다. 식 (6)과 같은 적분방정식을 해석적으로 구하기 위하여 kernel 함수를 나타내어야 하는데, 일반적인 형상에 대하여 직접적인 해결방법이 거의 불가능하므로 수치적인 방법을 도입하게 된다. 본 연구에서는 유한요소법을 도입하여 측정 변위와 traction과의 관계를 나타내는 관계식을 유도하게 되는데, 역 시스템이 쉽게 불안하게 되는 문제를 갖게 된다.

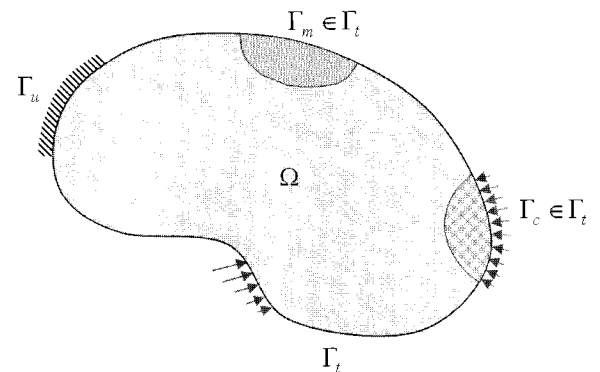


Fig. 2 Schematics of inverse problems

3. 역유한요소 수식화

전체 해석 영역을 유한요소 방정식으로 나타내면 다음과 같다.

$$Ku = f \tag{8}$$

여기서 K 는 전체 강성행렬(stiffness matrix)이고 u 는 절점 변위, f 는 절점 하중이다. 측정면 Γ_m 과 트래션을 평가하고자 하는 면 Γ_c 의 변위를 $u^m \in R^m$ 와 $u^n \in R^n$ 로 나타내고 그 외의 변위를 u^r 로 나타내면 식 (7)을 다음과 같이 나타내게 된다.

$$\begin{bmatrix} K_{rr} & K_{mr} & K_{rc} \\ K_{mr} & K_{mm} & K_{mc} \\ K_{cr} & K_{cm} & K_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^r \\ u^m \\ u^c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f^r \\ f^m \\ f^c \end{Bmatrix} \tag{9}$$

식 (9)에서 K_{rr} 의 역행렬을 구할 수 있으므로 다음과 같이 축약하여 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \overline{K_{mm}} & \overline{K_{mc}} \\ \overline{K_{mc}^T} & \overline{K_{cc}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^m \\ u^c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \overline{f^m} \\ \overline{f^c} \end{Bmatrix} \tag{10}$$

여기서 $\overline{\cdot}$ 는 축약된 행렬을 나타내며 $\overline{K_{mm}}$ 과 $\overline{K_{cc}}$ 는 각각 $m \times m$ 과 $n \times n$ 의 대칭행렬이고 $\overline{K_{mc}}$ 는 $m \times n$ 의 사각형 행렬이다.

잔류응력을 평가하기 위한 역문제는 측정된 변위 u^m 으로부터 하중 f^c 를 구하는 것이다. 식 (10)과 같은 역문제의 해는 다음과 같은 Moore-Penrose 유사(pseudo) 역행렬¹⁵⁾을 일반적으로 적용하게 된다.

$$u^c = \overline{K_{mc}^+} (\overline{f^m} - \overline{K_{mm}} u^m) \tag{11}$$

여기서

$$\overline{K_{mc}^+} = (\overline{K_{mc}^T} \overline{K_{mc}})^{-1} \overline{K_{mc}^T} \tag{12}$$

위의 식은 주어진 조건이 더 많은 경우에 오차가 최소화될 수 있는 조건을 부여하여 해의 존재성일 부연한 결과이다. 결과적으로 구하고자 하는 트래션은 식 (11)을 식 (10)에 대입하여 다음과 같이 나타내게 된다.

$$f^c = (\overline{K_{mc}^T} - \overline{K_{cc}} \overline{K_{mc}^+} \overline{K_{mm}}) u^m + \overline{K_{cc}} \overline{K_{mc}^+} \overline{f^m} + \overline{K_{cr}} \overline{K_{rr}^{-1}} f^r \tag{13}$$

식 (13)의 오른쪽 항에서 첫번째 항은 측정변위와 구하고자 하는 하중의 관계를 나타내는 민감성 행렬이 된다. 또한 나머지 영역의 변위는 다음과 같이 나타내게 된다.

$$u^r = K_{rr}^{-1} (f^r - K u^m - K_{rc} u^c) \tag{14}$$

결과적으로 식 (13)와 식 (14)는 측정된 변위를 사용하여 구하고자 하는 트래션(잔류응력)과 변위를 얻는 최종적인 관계식이 된다.

4. 정규화 방법들

일반적으로 역 시스템은 쉽게 불안해 질 수 있고 작은 측정 오차가 결과에 큰 영향을 줄 수 있게 된다. 역해석과정에 다른 구속 조건들을 부여하여 안정화를 유도하는 방법이 일반적으로 정규화라 한다. 역 시스템에서 컨디션(condition) 수는 시스템의 안정도를 나타내는 것이므로 정규화를 적용하게 되면, 시스템의 컨디션 수가 감소하게 되는데 주로 사용하는 정규화 방법은 Tikhonov와 truncated SVD(Singular Value Decomposition) 방법이다.

Tikhonov 정규화 방법은 다음과 같이 놈(norm)을 최소화하는 문제가 된다.

$$(u^c)_\alpha = \arg \min \{ \| \overline{K_{mm}} u^m + \overline{K_{mc}} u^c - \overline{f^m} \| + \alpha \| u^c \| \} \tag{15}$$

여기서 α 는 정규화 변수이다. 식 (12)를 적용하면 유사 역행렬은 다음과 같이 된다.

$$\overline{K_{mc}^+} = (\overline{K_{mc}^T} \overline{K_{mc}} + \alpha I)^{-1} \overline{K_{mc}^T} \tag{16}$$

여기서 I 는 항등행렬이다. Tikhonov 방법에서 정규화 변수는 $\| \overline{K_{mm}} u^m + \overline{K_{mc}} u^c - \overline{f^m} \|$ 이 최소화되고, 또한 $\| u^c \|$ 가 최소화를 위한 균형이 되도록 선정해야 하는데, 일반적으로 α 가 크게 되면 역 시스템의 컨디션은 좋아지지만 $(u^c)_\alpha$ 가 정확하지 않은 결과를 주게 된다. 따라서 역 시스템의 컨디션을 향상시키며 결과가 왜곡되지 않는 최적의 정규화 변수를 선정하는 것이 중요하다.

역 시스템을 분석하는데 유용한 방법이 특이값 분해인데 사각형 행렬 $\overline{K_{mc}}$ 가 다음과 같이 분해될 수 있다.

$$\overline{K_{mc}} = U \Sigma V^T \tag{17}$$

여기서 $U = [u_1, u_2, \dots, u_m] \in R^{m \times m}$, $\Sigma = [diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n), [0]]^T \in R^{m \times n}$, $V = [v_1, v_2, \dots, v_n] \in R^{n \times n}$ 이고 다음과 같은

관계식이 만족한다.

$$\overline{K_{mc}} v_i = \lambda_i u_i \quad (18)$$

또한 $\overline{K_{mc}^T K_{mc}}$ 의 고유값들과 다음의 관계를 갖는다.

$$\overline{K_{mc}^T K_{mc}} v_i = \lambda_i^2 v_i \quad (19)$$

식 (18)과 식 (19)는 특이값 분해는 $\overline{K_{mc}^T K_{mc}}$ 의 고유값과 고유벡터로 나타난다는 것을 보여주고 유사 역행렬은 다음과 같이 된다.

$$\overline{K_{mc}^+} = V \Sigma^{-1} U^T \quad (20)$$

상대적으로 작은 특이값들이 특이 벡터에 해당하는 불안정한 결과를 나타낼 수 있게 되고 결과적으로 정규화는 이러한 상대적으로 작은 특이값들을 제거하게 된다. Tikhonov 정규화 방법은 유사 역행렬이 다음과 같이 나타난다.

$$\overline{K_{mc}^+} = V \left[\text{diag} \left(\frac{\lambda_i^2}{\lambda_i^2 + \alpha}, \frac{1}{\lambda_i} \right), [0] \right] U^T \quad (21)$$

그러므로 Tikhonov 정규화에서 필터(filter) 함수는 다음과 같이 된다.

$$\omega_{\alpha}^{Tikh}(\lambda^2) = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + \alpha} \quad (22)$$

위의 표현식에서 $\alpha=0$ 는 정규화가 없는 결과이고, $\lambda_i^2 \ll \alpha$ 이면 특이값 λ_i 의 기여도가 작게 된다. 그러므로 Tikhonov 정규화는 $\lambda^2 = \alpha$ 보다 작은 특이값 항들을 제거하는 작용을 하게 된다.

다음으로 truncated SVD 정규화를 설명하는데 부분 극분해 방법¹²⁾을 사용하여 $\overline{K_{mc}}$ 를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\overline{K_{mc}} = LH \quad (23)$$

여기서 L 은 상호 수직 벡터 성분, $LL^T = I$ 을 갖는 $m \times n$ 사각 행렬이고, 행렬 H 는 양의 대칭 $n \times n$ 정방행렬이다. $\overline{K_{mc}^T K_{mc}}$ 는 양의 정방행렬이므로 고유값 $\lambda_k^2, k=1, 2, \dots, n$ 는 양수가 되는데, 양의 정방행렬 H 는 다음과 같이 나타내게 된다.

$$H = Q^T D Q \quad (24)$$

여기서 Q 는 $\overline{K_{mc}^T K_{mc}}$ 의 고유벡터를 행으로 하는 직교 행렬이다. 식 (24)를 사용하여 사각 행렬은 다음과 같이 된다.

$$L = \overline{K_{mc}} Q^T D^{-1} Q \quad (25)$$

그러므로 유사 역행렬은 다음과 같이 표현된다.

$$\overline{K_{mc}^+} = \left(\overline{K_{mc}^T K_{mc}} \right)^{-1} \overline{K_{mc}^T} = Q^T D^{-1} Q L^T \quad (26)$$

위의 결과와 식 (13)을 사용하여 구하고자 하는 절점 하중으로 나타내면 다음과 같다.

$$f^c = Q^T D Q L^T u^m + \overline{K_{cc}} Q^T D^{-1} Q L^T (\overline{f^m} - \overline{K_{mm}} u^m) + K_{cr} K_{rr}^{-1} f^r \quad (27)$$

상대적으로 크기가 작은 특이값을 제거하고 절점 하중을 표현하면 다음과 같다.

$$f^c = \sum_{k=1}^{n-n_{tr}} \left(\lambda_k Q^T E_k Q L^T u^m + \frac{1}{\lambda_k} \overline{K_{cc}} Q^T E_k Q L^T (\overline{f^m} - \overline{K_{mm}} u^m) \right) + K_{cr} K_{rr}^{-1} f^r \quad (28)$$

여기서 n_{tr} 은 특이값을 제거하는 항의 개수이다. 그러므로 truncated SVD 방법에서는 n_{tr} 이 정규화 변수가 된다.

Tikhonov 정규화 필터 함수는 부드러운 모양으로 작은 특이값을 제거하는데, truncated SVD 정규화 필터는 작은 특이값들을 잘라내는 형태가 된다.

$$\omega_{\alpha}^{TSVD}(\lambda_i^2) = \begin{cases} 0, & \lambda_i^2 \leq \alpha \\ 1, & \lambda_i^2 > \alpha \end{cases} \quad (29)$$

여기서 α 는 $\overline{K_{mc}^T K_{mc}}$ 의 고유값 $\lambda_{n_{tr}}^2$ 에 해당한다. 그러므로 truncated SVD 정규화는 Tikhonov 정규화와 유사한 작용을 하게 되고, Tikhonov 방법은 특이값을 직접 구하지 않고 상대적으로 작은 특이값들을 제거하는 효과를 나타내게 된다. 그림 3에 Tikhonov와 truncated SVD 필터 함수들을 보여주고 있다. 역문제에 정규화를 적용하는 것은 시스템의 컨디션을 좋게 하여 안정된 해를 얻게 하지만 결과를 왜곡하는 작용을 하게 된다.

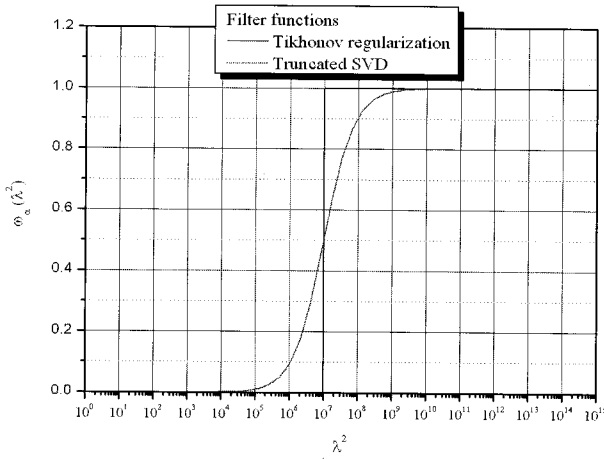


Fig. 3 Filter functions of Tikhonov and truncated SVD regularizations

5. 역문제 해석결과들

기존의 잔류응력 측정 방법은 단순하게 국부적이고 정량적인 평가를 하는 정도였는데 여기서 소개하는 방법은 절단면의 잔류응력 상태를 3차원으로가시화 하여 볼 수 있게 한다. 잔류응력을 구하기 위한 과정에서 Tikhonov와 truncated SVD 정규화 방법을 적용하고 L-곡선 방법¹⁶⁾을 사용하여 정규화 변수를 일반적으로 결정하게 된다. 구조물을 절단하고 특정 부위의 변위를 측정하는 방법은 ESPI를 사용하거나 광학적 장비를 사용하여 측정할 수도 있다. 중요한 것은 변위 측정에서 오차와 노이즈의 영향이 작은 측정 방법을 선택하여야 한다. 일반적으로 측정변위는 노이즈가 있

게 되므로 측정된 변위를 효율적인 필터링을 통하여 노이즈를 제거하는 작업이 필요할 수도 있으며 강제운동의 제거에도 효과적인 방법이 요구된다. 그림 4에 커넥팅 로드에 대한 절단으로 인하여 발생하는 변위 측정과 정규화를 적용한 역유한요소 해석을 통하여 얻어진 단면의 잔류응력을 보여주고 있다.

6. 맺음말

구조물 내부에 존재하는 잔류응력의 평가는 대표적인 역문제로 변위측정과 역문제 수식화 과정 그리고 정규화 방법의 연구가 필요로 하고 있다. 여기서는 유한요소법을 사용한 역문제 수식화를 설명하였는데 경계요소법, 무요소법 또는 다른 수치해석 기법들을 사용하여 역문제 수식화가 가능하게 된다. 역문제 수식화 방법에 따라서 결과의 특성들이 다르게 되므로 기본적인 해석 방법의 연구가 필요하며 정규화 방법은 잔류응력 평가에 적합한 방법의 도입이나 개발이 절실히 필요로 하게 된다. 즉, 측정 오차와 노이즈에 둔감하면서 실제 잔류응력 분포에 유사한 결과를 줄 수 있는 방법의 개발이 역문제 해석을 통한 잔류응력 평가의 성공에 절대적으로 중요하게 된다. 또한 변위 측정 방법과 측정 변위의 필터링과 변환에도 세심한 과정과 효율적인 방법의 제시가 요구되고 있다. 구조물 내부의 잔류응력을 구하기 위한 효율적인 역문제 해석 방법이 개발되면 구조, 용접, 조립 등으로 인하여 발생하는 구조물 내부의 잔류응력을 가시화하여 볼 수 있게 될 것이다.

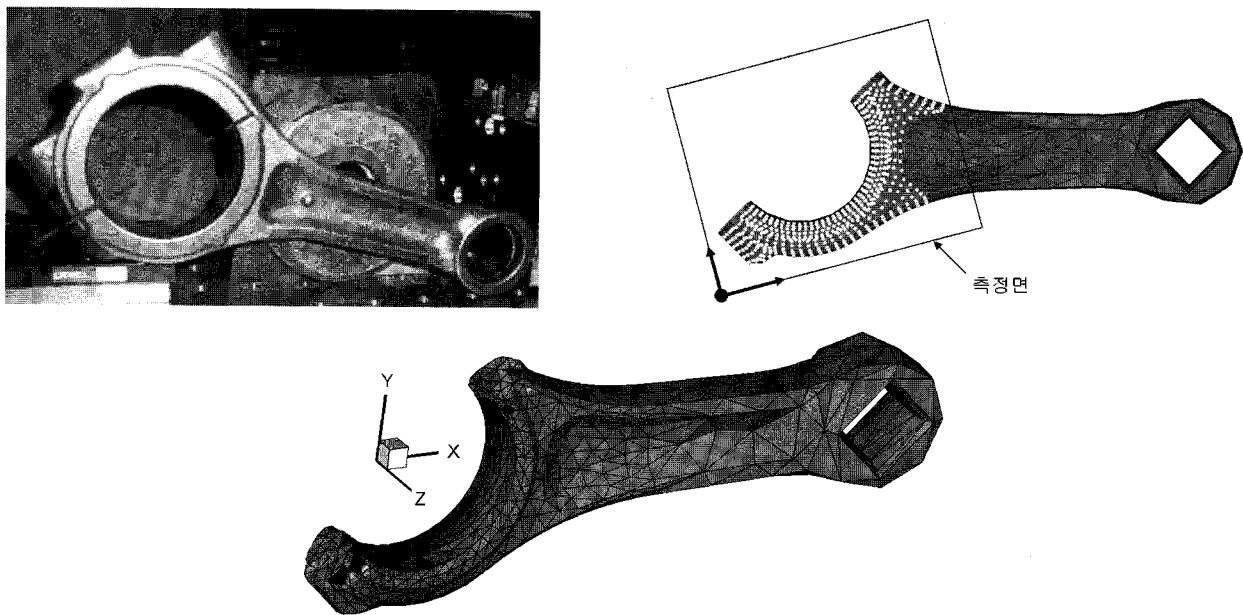


Fig. 4 Evaluation of residual stresses in a connecting rod by using inverse finite element method

참 고 문 헌

1. 김철, 양원호, 석창석, 허성필, 구멍뚫기법을 이용한 잔류응력 측정시 경사구멍의 영향, 한국자동차공학회논문집, 제9권 제6호, pp.201~206, 2001
2. V.S. Pisarev, M.M. Bondarenko, A.V. Chernov, A.N. Vinogradova, General approach to residual stresses determination in thin-walled structures by combining the hole drilling method and reflection hologram interferometry, *Int. J. Mech. Sci.*, V.47, pp.1350~1376, 2005
3. 강우중, 김기훈, 변동하중을 받는 Lower Control Arm의 잔류응력 변화, 대한기계학회논문집, 제30권 제5호, pp.602~608, 2006
4. 이진행, 이형일, 유한요소해에 기초한 양축등가 잔류응력 평가 압입이론, 대한기계학회논문집, 제30권 제1호, pp.42~51, 2006
5. 김동원, 권동일, ESPI를 이용한 압흔 주위의 표면잔류응력장 평가, 대한기계학회 춘계학술대회, pp.343~348, 2002
6. X. Qian, Z. Yao, Y. Cao, J. Lu, An inverse approach for constructing residual stress using BEM, *Eng. Analysis Boundary Elements*, V.28, pp.205~211, 2004
7. A.M. Korsunsky, G.M. Regino, D. Nowell, Variational eigenstrain analysis of residual stresses in a welded plate, *Int. J., Solids Structures*, V.44, pp.4574~4591, 2007
8. A. Maniatty, N. Zabarar, K. Stelson, Finite element analysis of some inverse elasticity problems, *Journal of Engineering Mechanics*, V.115, pp.1302~1316, 1989
9. D.S. Schnur, N. Zabarar, Finite element solution of two-dimensional inverse elastic problems using spatial smoothing, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, V.30, pp.57~75, 1990
10. Z. Gao, T. Mura, On the inversion of residual stresses from surface measurement, *ASME Journal of Applied Mechanics*, V.56, pp.508~513, 1989
11. Y.P. Cao, N. Hu, H. Fukunaga, Z.H. Yao, An inverse approach for constructing the residual stress field induced by welding, *Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, V.37, pp.345~359, 2002
12. B.C.P. Burke, S.O. Kim, K.-S. Kim, Partial polar decomposition inverse method applied to determination of internal stresses in an elastic complex structure, *Int. J. Solids Structures*, V.44, pp.2010~2020, 2007
13. A. Maniatty, N. Zabarar, Investigation of regularization parameters and error estimating inverse elastic problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, V.37, pp.1039~1052, 1994
14. H.W. Park, S. Shin, H.S. Lee, Determination of an optimal regularization factor in system identification with Tikhonov regularization for linear elastic continua, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, V.51, pp.1211~1230, 2001
15. R.C. Aster, B. Borchers, C.H. Thurber, Parameter estimation and inverse problems, Elsevier Academic Press, 2005
16. S. Morigi, F. Sgallari, A regularizing L-curve Lanczos method for underdetermined linear system, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, V.121, pp.55~73, 2001



[담당 : 배재성, 편집위원]