

# $p$ -수렴 경계요소법에 의한 L-형 영역을 갖는 2차원 포텐셜 문제 해석

## Analysis of 2-D Potential Problem with L-shape Domain by $p$ -Convergent Boundary Element Method

우 광 성\*      조 준 형\*

Woo, Kwang-Sung      Jo, Jun-Hyung

(논문접수일 : 2008년 11월 20일 ; 심사종료일 : 2008년 12월 22일)

### 요 지

2차원 포텐셜 문제를 해석하기 위해 고차의 르장드르 형상함수에 기초를 둔  $p$ -수렴 경계요소법이 제안되었다.  $p$ -수렴 경계요소법은 종래의 경계요소법에서 사용되는 형상함수와 성질이 다른 르장드르 다항식을 형상함수로 사용한다.  $p$ -수렴 유한요소법과 마찬가지로 고차의 형상함수에 따른 절점의 위치가 경계상에서 정해지지 않는다. 따라서 형상함수가 증가함에 따라 선형방정식을 구성하기 위한 수단으로 선점법을 이용하였다.  $p$ -수렴 경계요소법에서 선점법은 비대칭 계층적 선점법과 대칭 비계층적 선점법을 선택하여 수치해석을 수행하였다. 선택점들은 형상함수가 증가함에 따라 증가하는 성질을 나타내며 계층적 또는 대칭적으로 선택될 수 있다.  $p$ -수렴 경계요소법에서 나타나는 특이 적분항을 계산하기 위해 special numeric quadrature technique와 semi-analytical integration technique를 사용하였다. 사각모서리부에서 특이성을 가지는 L-형 영역문제를 해석한 결과 적은 수의 자유도에서 기존문헌의 결과와 차이가 거의 없는 정도인  $10^{-2}$ %단위 이하의 정확도를 보여주었다. 또한 같은 조건에서는 대칭형 선점의 위치를 이용해 계산한 값이 가장 높은 정확도를 보여주었다.

**핵심용어** :  $p$ -수렴 경계요소법, 형상함수, 르장드르 형상함수, 선점법, 비대칭 계층적, 대칭 비계층적, L-형 영역을 갖는 포텐셜문제

### Abstract

The  $p$ -convergent boundary element method has been proposed to analyze two-dimensional potential problem on the basis of high order Legendre shape functions that have different property comparing with the shape functions in conventional boundary element method. The location of nodes corresponding to high order shape function are not defined along the boundary, called by nodeless node, similar to the  $p$ -convergent finite element method. As the order of shape function increases, the collocation point method is used to solve linear simultaneous equations. The collocation patterns of  $p$ -convergent boundary element method consist of non-symmetric hierarchial or symmetric non-hierarchical. As the order of shape function increases, the number of collocation point increases. The singular integral that appears in  $p$ -convergent boundary element has been calculated by special numeric quadrature technique and semi-analytical integration technique. The L-shape domain problem including singularity in the vicinity of reentrant corner is analyzed and the numerical results show that the relative error is smaller than  $10^{-2}$ % range as compared with other results in literatures. In case of same condition, the symmetric  $p$ -collocation point pattern shows high accuracy of solution.

**Keywords** :  $p$ -convergent BEM, Legendre shape function, collocation point method, non-symmetric hierarchial, symmetric non-hierarchical, potential problem with L-Shape domain

### 1. 서 론

$p$ -Version 유한요소법은 다방면에 적용되어 괄목할 만한 성과를 보여주었다. 이 방법은 유한요소법의 정확도를 증가시

키기 위해 요소의 크기를 고정한 채 형상함수의 차수를 증가시키는 방법을 택한다. 특히 사용되는 형상함수는  $h$ -version에서 사용되는 형상함수와는 다른 직교성을 갖는 르장드르 다항식 또는 적분형 르장드르 다항식을 사용한다. 이렇게 함으로써

\* 책임저자, 영남대학교 건설환경공학부 교수  
Tel: 053-810-2593 ; Fax: 053-810-4622  
E-mail: kswoo@yu.ac.kr

\* 한국전력공사 전력연구원

\* 이 논문에 대한 토론을 2009년 4월 30일까지 본 학회에 보내주시면 2009년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

계산되는 강성도 행렬의 조건수는 호조진화 되며, 이는 수치오차를 줄이는 효과를 발휘한다. p-version 유한요소법의 주된 장점은 빠른 수렴속도, 입력데이터 작성의 간결함, 계층적 성질, 요소분할시 간결함에 있다(우광성, 2003 ; 2006).

이런 장점으로부터 경계요소법에도 p-version 유한요소 개념이 적용되기에 이르렀는데, 첫 번째 연구는 고차다항식을 사용한 2차원 포텐셜문제 해석을 Tuerteltamb 등(1977)이 시도 하였으나 p-version 유한요소 개념과는 다른 내용이다. 뒤를 이어 Alarcon(1986)은 선점법(point collocation method)을 이용한 p-수렴 계층적(hierarchical) 경계요소법을 2차원 포텐셜문제에 적용하여 연구를 진행하였다. 이 연구는 처음으로 경계요소법의 적응적 해석을 시도하였다. 그러나 이 연구는 초기연구적 성격을 띠고 있었으며, p-version 형상함수의 고차화에 따른 수치해석의 효과에 대한 내용은 포함되지 않았다. 경계요소법에서 p-version 형상함수 사용에 대한 연구는 다음과 같은 연구자에 의해 진행되었다. Rank(1987; 1989) 그리고 Postell(1989; 1990), Stephan(2000)은 h, p, hp-version 경계요소법을 Gallerkin 방법에 기반하여 2차원 포텐셜문제에 적용하여 빠른 수렴성을 보여 주었다. 또한 Guo(2004)와 Arjunon(2005)은 p-적응적 방법을 선점법을 토대로 2차원 열전도문제와 탄성문제에 적용하였다.

p-version 경계요소법은 p-version 유한요소법과 흡사한 부분이 많이 있다. 그러나 선점의 위치, 적분방법, 경계조건의 적용법은 다른 면으로 볼 수 있다. p-version 경계요소법은 연구에 있어서 중요성을 지니고 있는데, 왜냐하면 h-version 경계요소법은 p-version 경계요소법의 부분집합이라 할 수 있으며 서로 보완적 성격을 가지고 있기 때문이다. 본 논문에서는 p-version 경계요소법을 구현할 때 사용되는 계층형 고차형상함수의 특성, 계층형 고차형상함수의 사용을 위한 선점점(collocation point)의 선정, 핵함수(kernel function)와 계층형 고차형상함수(hierarchical high order shape function)와 경계적분식에 나타는 자유항에 대한 적분에 대해서 살펴 보면서 기존 연구와 차별화 하고자 한다. 아울러 이러한 방법들을 포텐셜문제에 적용하여 p-version 경계요소법의 적용성을 평가해보고자 한다.

## 2. 포텐셜문제를 위한 p-Version 경계요소법

$$\Delta u = 0 \quad \Omega \in \mathbb{R}^2 \quad (1)$$

$$u(X) = f(X) \quad X \in \Gamma_u \quad (2)$$

$$q(X) = g(X) \quad X \in \Gamma_q \quad (3)$$

이 식에서  $\Gamma$ 는 주어진 유한영역  $\Omega \in \mathbb{R}^2$ 의 경계이고

$\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_q$ 이다. 또한  $q(X) = \partial u / \partial n(X)$ 는 점 X에서 포텐셜 u의 유동을 나타낸다(Brebbia, 1980).

### 2.1 직접 경계요소법

직접 경계요소법은 포텐셜 이론으로부터 유도된 경계 적분 방정식을 그대로 사용하기 때문에 방정식의 해가 바로 미지의 포텐셜과 유동이 된다. 포텐셜 문제에 대한 경계적분방정식은 이미 많은 문헌에 소개되어 있으므로 여기서 간략하게 소개하면 다음과 같다. 만일 경계가 충분히 매끄럽다면(smooth) 임의점  $P \in \Gamma$ 에서 경계값 문제 (1)은 식 (4)의 경계 적분방정식을 만족한다. 식 (4)의 각 항은 식 (5), (6)으로 나타난다(김문경, 1993).

$$C(x)u(x^n) + \int_{\Gamma} Q(x^n, y)u(y)d\Gamma(y) = \int_{\Gamma} U(x^n, Y)q(y)d\Gamma(y)v \quad (4)$$

$$C(x) = \frac{1}{2}, U(x^n, y) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{r} \quad (5)$$

$$T(x^n, y) = \nabla U(x^n, y) \cdot n_Q = \frac{\partial U}{\partial Q}(x^n, y) = \frac{1}{-2\pi} \frac{1}{r^2} [(\xi_1 - x_1)^2 n_1 + (\xi_2 - x_2)n_2] \quad (6)$$

이 때 점  $x^n = (x_1, x_2)$ 와  $y = (\xi_1, \xi_2)$ 에 대해서 r,  $n_Q$ 는 식 (7), (8)로 나타난다.

$$r = |y - x^n| = \sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2} \quad (7)$$

$$n_Q = (n_1, n_2) \quad (8)$$

만일 경계를  $\Gamma = \sum_{j=1}^N \Gamma_j$ 처럼 N개의 경계조각으로 이산화 하면 식 (4)는 점  $P \in \Gamma$ 에 대해서 다음 식 (9)와 같이 변환 된다(Watson, 1979).

$$\frac{1}{2}u(x^n) + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} Q(x^n, y)u(y)d\Gamma_j(y) = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} U(x^n, y)q(Y)d\Gamma_j(y) \quad (9)$$

문제의 경계가 충분히 매끄럽지 않다면 식 (9)의  $1/2u(x^n)$ 은  $C(x^n)u(x^n)$ 로 변경된다. 이때 상수  $C(x^n)$ 는 점  $x^n$ 와 이 점 근방에서 경계의 기하학적 조건에 의해 결정된다.

## 2.2 형상함수(Shape Function)와 선택점(Collocation Point)

본 연구에서는 Legendre 다항식을  $p$ -version 경계요소법의 형상함수로 사용하였다. 선점법(collocation method)은 경계요소 방정식을 근사하는 선형방정식을 구성하는 수단이 된다. 형상함수 1차에 해당하는 선택점(collocation point)은  $h$ -version 경계요소법과 동일하다. 이 경우 선택점은 경계요소의 끝에 존재한다. 형상함수의 차수가 증가함에 따라 고차의 형상함수에 대응하는 미지수가 발생한다. 선점법은 선택점들과 같은 수만큼 미지수가 생겨나야 하므로, 새롭게 추가되는 선택점은 각각의 증가하는 형상함수에 대응되어야 한다. 새롭게 추가되는 선택점의 위치는 선형방정식을 구성하는 기능을 하므로 원칙적으로 임의로 택해질 수 있다. 그러한 이유로 경계요소법을 이용해 최고의 결과를 얻기 위해서 추가적인  $p$ -collocation point의 위치는 중요한 문제가 된다. 본 논문에서는 2가지 형태의 선택점 위치가 논의될 것이다.

첫 번째로 대칭 비계층(symmetric non-hierarchical) 형태를 들 수 있다. 이 형태 선택점이 요소의 중심에 대해서 대칭으로 존재한다.  $p=2$ 에 대해서  $p$ -collocation point는 요소의 중앙에 위치한다.  $p=3$ 에 대해서는 2개의  $p$ -collocation point가 요소를 3등분한 위치에 각각 존재한다.  $p=4$ 에 대해서는 3개의  $p$ -collocation point가 요소를 4등분한 위치에 각각 존재한다. 그림 1에는 대칭 비계층 형태의  $p$ -collocation point 위치를 나타내고 있다. 이 방법의 착안점은  $h$ -version 경계요소법에서 선택점 위치가 요소를 균등분할한 위치에 존

재할 때 가장 좋은 결과를 도출한 사실에 기인한다.  $p$ -version 경계요소법에 대해서도 위와 같은 사실은 여전히 성립한다. 그러나 위 방법의 단점은  $p$ -collocation point의 위치가 형상함수의 차수가 증가함에 따라 변화하므로 형상함수의 계층적 성질을 충분히 이용할 수 없는데 있다.

두 번째로 비대칭 계층적(nonsymmetric hierarchial) 형태를 들 수 있다. 이 방법에서  $p$ -collocation point의 위치는 형상함수의 차수가 증가함에 따라 변해가지 않고 지속적으로 증가한다. 이 형태는 형상함수가 증가함에 따라 추가되는 적분항만 계산하면 되는 형상함수의 계층적 성질을 충분히 활용할 수 있다.  $p=2$ 에 대해서  $p$ -collocation point는 요소의 중앙에 위치한다.  $p=3$ 에 대해서  $p$ -collocation point는 요소의 4등분점의 중앙을 기준으로 왼쪽 또는 오른쪽에 존재한다.  $p=4$ 에 대해서는  $p=3$ 에서 선정한 위치의 반대편 4등분점에  $p$ -collocation point가 존재한다. 형상함수의 차수가 증가함에 따라  $p$ -collocation point는 지속적으로 증가한다.

그림 2는 비대칭 계층적 형태의 선택점의 위치를 나타내고 있다. 이방법의 단점은 단지 짝수의 차수에서만  $p$ -collocation point가 대칭으로 존재한다는 것이다. 홀수의 차수를 사용한 경우  $p$ -collocation point가 홀수 개수가 되는데, 이때는 대칭 비계층적  $p$ -collocation point 형태를 사용하여 계산한 결과보다 정확도가 떨어진다.

표 1 Definition of Legendre shape functions

$p$ -Level	Shape Function $\psi^p(\xi)$ based on Legendre polynomials $(-1 < \xi < 1)$	
1	$\frac{1}{2}(\xi+1)$ ; $\frac{1}{2}(\xi-1)$	
2	$\frac{1}{2}(\xi^2-1)$	
3	$\frac{1}{6}(\xi^3-\xi)$	
4	$\frac{1}{24}(\xi^4-1)$	$N_{p+1} = \frac{1}{p!}(\eta^p-1), p \text{ is even}$
5	$\frac{1}{120}(\xi^5-\xi)$	$N_{p+1} = \frac{1}{p!}(\eta^p-\eta), p \text{ is odd}$
6	$\frac{1}{720}(\xi^6-1)$	
7	$\frac{1}{5040}(\xi^7-\xi)$	
8	$\frac{1}{40320}(\xi^8-1)$	

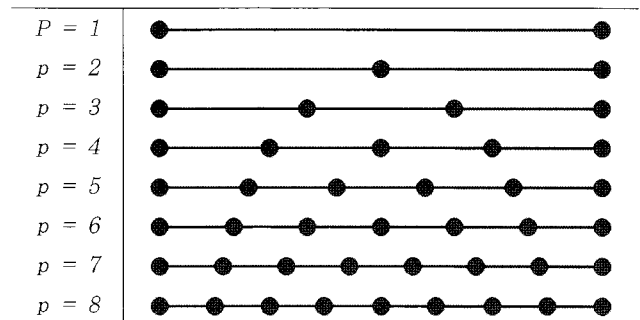


그림 1 Symmetric non-hierarchical  $p$ -collocation point patterns

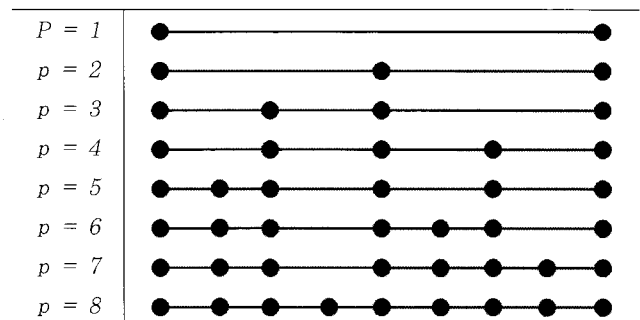


그림 2 Non-symmetric hierarchial  $p$ -collocation point patterns

### 2.3 핵함수와 형상함수 곱으로 이루어진 특이적분의 평가

핵함수(kernel function)과 형상함수곱의 적분의 평가는 경계요소법에서 해석값의 정확도에 영향을 미친다고 할 수 있다. 경계요소법의 적분항은 일반적으로 특이성을 포함하고 있다. 고려중인 collocation point가 적분하러 하는 요소에 포함된 경우 특이적분이 발생한다. 이들 계수는 계수행렬의 대각요소를 이루고 있다. 이 값들은 계산의 정확도를 확보하기도 힘들며 계산법의 어려움 또한 동시에 지니고 있다.

직접 경계요소법에 의해 유도된 식 (6)은 식 (10), (11)을 대입하여 식 (12), (13),과 같이 유도된다. 이 식에서 좌우변의 괄호 내부의 두 번째 항은 p-version 경계요소법에서 1차에 더하여 추가되어지는 고차의 형상함수에 의해 생성되는 항을 나타낸다. 식(14)는 적분식을 수치적으로 구할 때 사용되는 식이다(Watson, 1979; Brebbia, 1980).

$$u_j(\xi) = \sum_{k=1}^2 \psi^k(\xi) u_j^k + \sum_{k=3}^{p+1} \psi^k(\xi) a_j^k \quad (10)$$

$$q_j(\xi) = \sum_{k=1}^2 \psi^k(\xi) t_j^k + \sum_{k=3}^{p+1} \psi^k(\xi) b_j^k \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} C(x^n)u_j(x^n) + \sum_{e=1}^E \left\{ \sum_{k=1}^2 u_j^k \int_{r^e} Q(x^n, y(\xi)) \psi^k(\xi) J(\xi) d\xi \right. \\ \left. + \sum_{k=3}^{p+1} u_j^k \int_{r^e} Q(x^n, y(\xi)) \psi^k(\xi) J(\xi) d\xi \right\} \\ = \sum_{e=1}^E \left\{ \sum_{k=1}^2 q_j^k \int_{r^e} U(x^n, y(\xi)) \psi^k(\xi) J(\xi) d\xi \right. \\ \left. + \sum_{k=3}^{p+1} b_j^k \int_{r^e} U(x^n, y(\xi)) \psi^k(\xi) J(\xi) d\xi \right\} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$Hu = Gq \quad (13)$$

$$\sum_{g=1}^G W_g Q(X^n, Y(\xi_g)) \psi^k(\xi_g) J(\xi_g) \quad (14)$$

collocation point가 적분하려는 요소에 속해 있지 않다면 적분은 일반적인 가우스 적분법에 의해서 계산될 수 있다. 이 식에서  $\eta_g$ 는 가우스적분점 y의 요소좌표계에 해당하는 값이며  $W_g$ 는 그에 대응되는 가중치이다. 만일 collocation point가 적분하려는 요소에 속해 있다면 적분은 특이적분이 되며 일반적인 가우스 적분법 등에 의해서는 계산되지 않는다. 경계요소법이 발전함에 따라 이런 적분식을 평가하는 방법은 여러 가지가 나타났는데 Analytical Integration, Semi-Analytical Integration techniques, Special Numeric Quadrature Techniques, Adaptive Numeric Integration Techniques방법 등이 있다. 각 적분법에 대해서 간략히 살펴보면 다음과 같다.

Analytical integration방법은 적분의 복잡성으로 인해 상수 또는 1차 요소에 국한되어 사용된다. Semi-Analytical Integration Techniques의 경우 특이적분항을 특이성이 포함된 항과 일반적인 항으로 구분하여 전자는 해석적 방법으로 평가하고 후자는 가우스 적분법에 의해 평가한다. 위의 식에 포함된 특이적분항을 계산할 수 있는 Semi-Analytical Integration Techniques방법의 경우 적분항 중에 특이적분 부분을 제외하여 계산을 한다. 즉, collocation point  $x^n (= \xi^n, -1 \leq \xi \leq 1)$ 에서 형상함수값을 제외함으로써 첫 번째 적분항은 정규적분이 되어 일반적인 가우스 적분법에 의해 계산이 가능하며 두 번째 적분항은 해석적으로 적분이 가능하다. Special Numeric Quadrature Techniques은 통상적으로 약특이적분(weakly singular integrals)를 평가할 때 사용된다. Adaptive Numeric Integration Techniques의 경우 요소를 부요소로 나누어 일반적인 가우스 적분법에 의해 평가하고 부요소가 특이점에 가까워짐에 따라 그 크기를 더욱 작게 하며 동시에 적분점의 수를 증가시킨다. 이 방식은 강특이적분(strongly singular integral)를 평가할 때 사용된다. 본 논문에서는  $p=1$ 의 collocation point에 대한 적분이 먼저 평가되고,  $p>1$ 의 collocation point에 대한 적분이 뒤이어 평가된다.  $p \geq 1$ 에 대한 약특이적분 및 강특이적분은 Semi-Analytical Integration Techniques을 사용했다. 즉 특이적분항을 제외한 항에는 가우스 적분을 나머지 특이적분항은 해석적으로 적분했다.

경계적분방정식의 우변에 있는 자유항 C에 대해서, 만일  $p=1$ 에 대응하는 collocation point  $x^n$ 의 미지수는 바로 변수  $u_j$ 에 대응하는 계수에 더해지면 된다. 그러나 만일 collocation point가  $p>1$ 이라면 선형방정식의 해는 직접적으로 물리적 의미를 가진 해가 되지않고, 고차의 형상함수에 대응되는  $a_j$  값이 된다. 이런 경우 식을 전개한 후 이 식에 계수  $C_j$ 를 곱하면 다음과 같다.

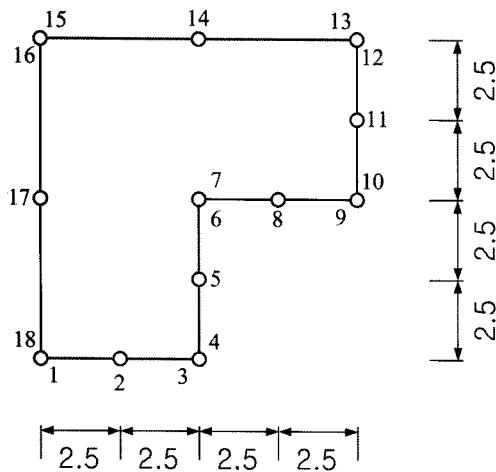
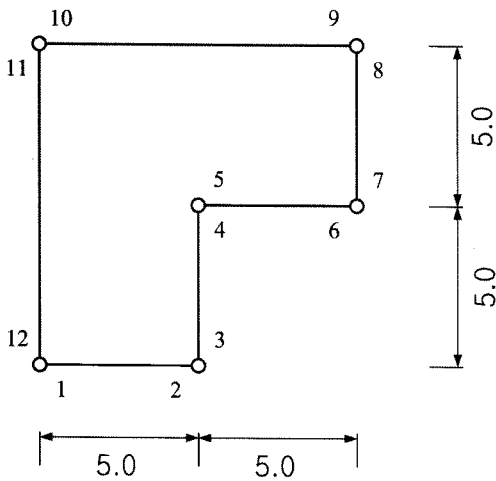
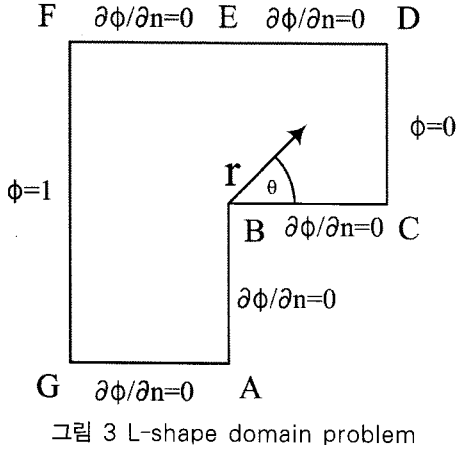
$$u_j(\xi) = \sum_{k=1}^2 \psi_k(\xi) u_j^k + \sum_{k=3}^{p+1} \psi_k(\xi) a_j^k$$

$$C_j u_j(\xi^n) = C_j \left[ u_j^1 \psi^1(\xi^n) + u_j^2 \psi^2(\xi^n) + a_j^3 \psi^3(\xi^n) + \dots + a_j^{p+1} \psi^{p+1}(\xi^n) \right] \quad (15)$$

그러므로 계수행렬 H의 요소중  $C_j \psi_j^1$ 은  $u_j^1$ 에 대응되는 요소에,  $C_j \psi_j^2$ 은  $u_j^2$ 에 대응되는 요소에,  $C_j \psi_j^{p+1}$ 은  $a_j^{p+1}$ 에 대응되는 계수에 더해진다.

### 3. 수치해석 예제

해석예제는 그림 3과 같이 L-형 문제를 선택했다. 등방성 재료로 가정했으며 영역은 Laplace 방정식에 의해 지배를 받는다. 이 문제는 기하학적 특이(singularity)가 존재하는 문제로



$p$ -version 경계요소법의 정확도를 명시할 수 있을 것으로 생각된다. 점 B는 re-entrant corner이며 미지의 함수  $\phi$ 의 미분값이 특이성을 보인다. 이 문제는 The International Society of Boundary Elements에서 Benchmark Problem으로 정의되어있다. 해석을 위해 다음의 3가지 형태로 요소를 분할하였다. 각각의 모델은 Symmetric Non-Hierarchical  $p$ -collocation point 형태와 Non-symmetric Hierarchical  $p$ -collocation point 형태에 대해서 계산하였다. 6-요소, 8-요소, 12-요소 모델에 대한 해석값은 아래와 같이 나타났다.

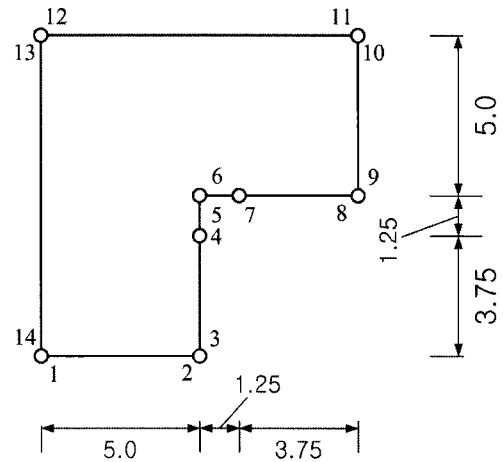


표 2 Potential  $\phi$  at the singular point A of L-shape domain ( $x=0.5, y=0.0$ )

Whiteman & Papamichael (1972)	0.9005		
Jaswon & Symm (1977) 80 Unknowns	0.9009 (constant element singularity included)		
Non-Symmetric Hierarchical Collocation Point Patterns			
Model	6-요소	12-요소	8-요소
$p = 1$	8.911258E-01	8.972369E-01	8.951948E-01
$p = 2$	8.980740E-01	8.994110E-01	9.010575E-01
$p = 3$	8.984755E-01	8.996621E-01	9.005632E-01
$p = 4$	8.996613E-01	9.003958E-01	9.006662E-01
$p = 5$	8.998640E-01	9.004436E-01	9.007181E-01
$p = 6$	9.000887E-01	9.005462E-01	9.007690E-01
$p = 7$	9.001471E-01	9.005807E-01	9.007597E-01
$p = 8$	9.005189E-01	9.007235E-01	9.008389E-01
Symmetric Non-Hierarchical Collocation Point Patterns			
Model	6-요소	12-요소	8-요소
$p = 1$	8.911258E-01	8.972369E-01	8.951948E-01
$p = 2$	8.980740E-01	8.994110E-01	9.010575E-01
$p = 3$	8.989319E-01	9.000370E-01	9.004827E-01
$p = 4$	8.996613E-01	9.003958E-01	9.006662E-01
$p = 5$	8.999281E-01	9.004626E-01	9.007609E-01
$p = 6$	9.002477E-01	9.006189E-01	9.007641E-01
$p = 7$	9.003265E-01	9.006695E-01	9.007247E-01
$p = 8$	9.005189E-01	9.007235E-01	9.008389E-01

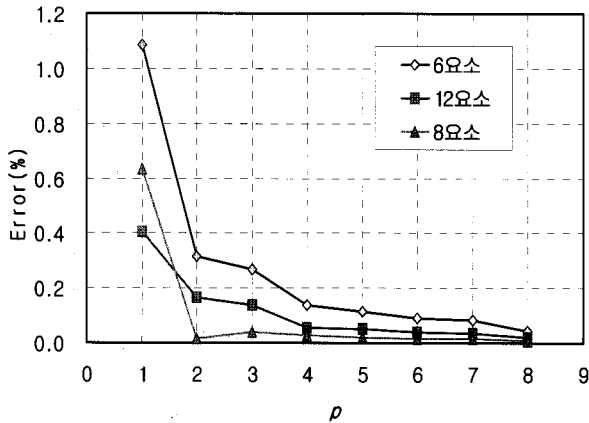


그림 7 Non-symmetric hierarchical collocation point patterns( $x=5.0, y=0.0$ )

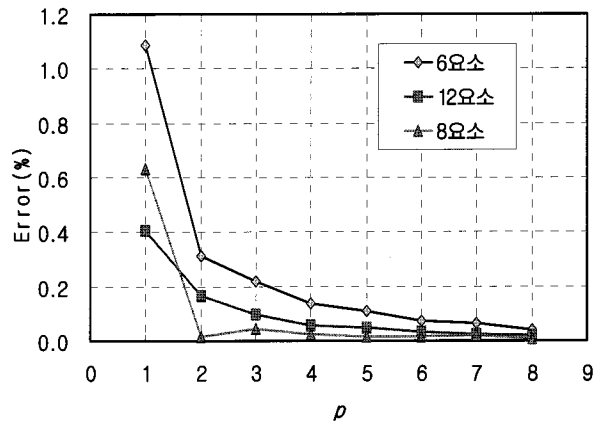


그림 8 Symmetric non-hierarchical collocation point patterns( $x=5.0, y=0.0$ )

표 3 Potential  $\phi$  at the singular point B of L-shape domain. ( $x=0.5, y=0.5$ )

Whiteman & Papamichael (1972)	0.6663		
Jaswon & Symm (1977)	0.666669		
40 Unknowns	0.666668		
80 Unknowns	(constant element singularity included)		
Non-symmetric hierarchical collocation point patterns			
Model	6-요소	12-요소	8-요소
$p = 1$	6.596499E-01	6.661245E-01	6.596059E-01
$p = 2$	6.670059E-01	6.665799E-01	6.668978E-01
$p = 3$	6.667199E-01	6.666338E-01	6.668782E-01
$p = 4$	6.666793E-01	6.666627E-01	6.666601E-01
$p = 5$	6.666223E-01	6.666596E-01	6.666552E-01
$p = 6$	6.666676E-01	6.666624E-01	6.666568E-01
$p = 7$	6.665901E-01	6.666613E-01	6.666624E-01
$p = 8$	6.666666E-01	6.666659E-01	6.666651E-01
Symmetric non-hierarchical collocation point patterns			
Model	6-요소	12-요소	8-요소
$p = 1$	6.596499E-01	6.661245E-01	6.596059E-01
$p = 2$	6.670059E-01	6.665799E-01	6.668978E-01
$p = 3$	6.665755E-01	6.666590E-01	6.666141E-01
$p = 4$	6.666793E-01	6.666627E-01	6.666601E-01
$p = 5$	6.666352E-01	6.666643E-01	6.666753E-01
$p = 6$	6.666620E-01	6.666624E-01	6.666563E-01
$p = 7$	6.666417E-01	6.666633E-01	6.666512E-01
$p = 8$	6.666666E-01	6.666659E-01	6.666651E-01

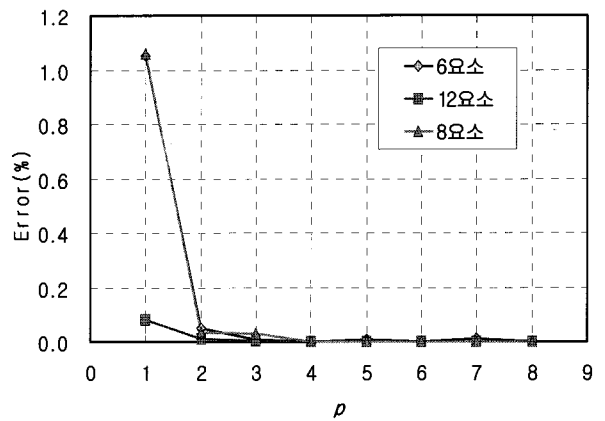


그림 9 Non-symmetric hierarchical collocation point patterns( $x=5.0, y=5.0$ )

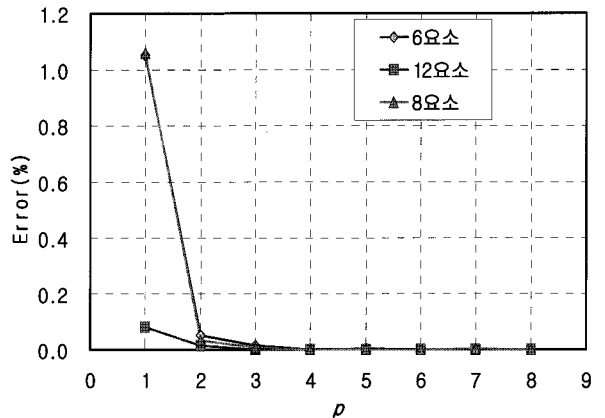


그림 10 Symmetric non-hierarchical collocation point patterns( $x=5.0, y=5.0$ )

6-요소, 12-요소, 8-요소 모델은 각각 54, 108, 72의 자유도수를 가진다. 6-요소 모델은 각각  $p=6$ (hierarchical)부터  $p=8$ (non-hierarchical)에서 단조로운(monotonically) 수렴을 보인다. Jaswon과 Symm(1977)의 값에 비해 0.044%정도의 오차를 보이고 있다. 12-요소 모델은 6-요소 보다 빠른 수렴을 보이고 있으며, Jaswon과 Symm의 값에

비해 0.022%의 오차를 보인다. 8-요소 모델은 reentrant corner부분인 특이 위치로 절점을 옮겨서 배치했다. 이 경우 Jaswon과 Symm에 비해서 0.011%정도의 오차를 보인다. 그리고 차수를 증가함에 따라 해가 단조증가의 수렴형태를 보이다가 7차에서 약간의 진동(oscillation)현상이 발생했다.

이는 기존에 연구되었던  $p$ -version 유한요소법 또는 적응적  $p$ -version 유한요소법에서도 나타나는 현상으로 고차의 형상함수 사용과 해석요소(영역)의 조밀함 등의 조건이 동시에 존재할 때 발생하는 현상이다. 이를 피하기 위해서는 필요 이상의 고차형상함수 사용을 줄이는 방법을 택해야 할 것으로 생각된다. 또한 홀수차수의 형상함수를 사용했을 때 대칭 비계층형 collocation point pattern에 기반을 두어 계산된 결과값의 수렴정도가 훨씬 더 높은 것으로 나타났다. 이는 선택점이 대칭 형태를 이루고 있는 것에 기인한 것으로 생각된다. 비록 간단한 형태의 미분방정식을 모델로 하였으나 수렴구간에서 오차값이  $10^{-2}$ 단위 이하로 떨어지는 것을 볼 수 있는데, 이는 상당히 정확한 해석결과라고 볼 수 있다.

#### 4. 결론 및 고찰

위의 내용을 통해  $p$ -version 경계요소법의 구성방식과 해석결과를 알아보았다. 이러한 방식은 계층적 형상함수를 사용하기 때문에 기존의 경계요소법에서 고차의 형상함수를 사용할 때 방법과 약간의 차이를 보인다. 해석결과는 수렴이 이루어진 후 오차값이  $10^{-2}$ 단위 이하로 나타났다. 아울러 collocation point는 대칭형태를 유지하는 것이 해를 더욱더 정확히 계산할 수 있는 것으로 나타났다. 그러나 이것은 형상함수 또한 대칭이어야 한다는 의미는 아니다. 형상함수의 차수증가 즉  $p$ -확장(extension)의 의미는 문제의 영역을 분할하는 요소의 체결상태는 그대로 유지하고 collocation point의 증가와 형상함수차수의 증가를 의미한다. 이러한 특징은  $p$ -version 경계요소법을 사용하여 문제를 해석할 경우 해석데이터 준비의 간결함과 계산시간단축 등  $p$ -version 유한요소법이 보여주었던 것과 흡사한 장점을 제공한다.

본 연구는  $p$ -version 경계요소법의 가장 기초적인 부분으로 생각할 수 있으며 앞으로 연구가 이루어져야 할 분야는 탄성학의 여러 문제와 파괴역학 등이 있을 수 있다. 아울러 경계요소법 특유의 장점을 발휘할 수 있는 반무한 해석영역과 유한해석영역의 결합형태를 해석하는 연구 즉 이러한 형태의 해석은  $p$ -version 경계요소법과  $p$ -version 유한요소법의 연계에 대한 연구라 할 수 있다. 또한 이러한 해석을 할 때 자체적으로 오차를 계산하고 그에 따른 해석정도를 심화시키는 적응적 경계요소법해석에 대한 연구와 경계요소법-유한요소법이 연계된 상황에서 적응적 해석을 시도하는 연구 등이 있을 수 있다. 또한 시간중속적인 문제에 대해  $p$ -version 경계요소법을 적용하는 분야도 생각해볼 수 있다.

#### 참 고 문 헌

- 김문겸, 허택녕, 장정범, 오세호 (1993) 시간의존 비탄성 문제의 유한요소-경계요소 조합에 의한 해석, 대한토목학회 논문집, 13(3), pp.25~34.
- 우광성, 조준형, 박미영 (2006) 2차원 균열판의  $p$ -적응적 유한요소해석을 위한 정규크리깅 보간법의 적용, 한국전산구조공학회 논문집, 19(4), pp.429~440.
- 우광성, 조준형, 안재석 (2003) 사후 오차평가에 의한 적응적  $p$ -체는 세분화, 대한토목학회논문집, 23(2A), pp.177~185.
- 우광성, 조준형, 이동진 (2006) 적응적  $p$ -Version 유한요소법에서 정규크리깅에 의한 응력복구기법, 대한토목학회 논문집, 26(4A), pp.677~687.
- Alarcon, E., Reverter, A. (1986)  $p$ -Adaptive Boundary Elements, *Int. J. Numer. Meth. Eng.* Vol. 23, pp.801~829.
- Arjunon S., Richardson, J.D. (2005) Regularized  $p$ -version collocation BEM Algorithms for two-dimensional heat conduction, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 29, pp.953~962.
- Brebbia, C.A. (1980) *The Boundary Element Method for Engineers*, Pentech Press Ltd. Plymouth, Devon, GB, Second Edition.
- Guo, B., Heuer N. (2004) The optimal rate of convergence of the  $p$ -version of the boundary element method in two dimensions, *Numerische Mathematik*, 98, pp.499~538.
- Jaswon, M.A., Symm, G.T. (1977) *Integral Methods in Potential Theory and Elastostatics*, Academic Press Ltd., London.
- Postell, F.V., Stephan, E.P. (1989)  $P$ -adaptive BIEM Approach For Two-Dimensional Elasticity Analysis, *Microcomputing in Civil Engineering*, 4, pp.11~20.
- Postell, F.V., Stephan, E.P. (1990) On the  $h$ -,  $p$ -, and  $hp$ -Versions of the Boundary Element Method-Numerical Results, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 83, pp.69~89.
- Rank, E. (1987) Adaptive Boundary Element Methods, *Proceedings of the Ninth International Conference on Boundary Element Methods*, Ed. C. A. Brebbia, et al., Computational Mechanics Publishers, Southampton, UK, pp.259~278.
- Rank, E. (1989) Adaptive  $h$ -,  $p$ -,  $hp$ -Versions for Boundary Integral Element Methods, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 28, pp.1335~1349.

- Stephan, E.P.** (2000) Multilevel methods for the  $h$ -,  $p$ -, and  $hp$ -versions of the boundary element method, *Comput. Appl. Math.*, 125, pp.503~519.
- Tuerteltamb, M.J., Pauluszyn, G.** (1977) Polynomial Approximation in the Direct Potential Method for Plane Easto-Statics, *Innov. Num. Anal. Appl. Eng. Sci.*
- Watson, J.O.** (1979) *Advanced Implementation of the Boundary Element Method for two- and three-Dimensional Elastostatics, Developments in Boundary Methods - 1*, Eds. P. K. Banerjee and R. Butterfield, Applied Science Publishers, London, pp.31~69.
- Whiteman, J.R., Papamichael, N.** (1972) Treatment of harmonic mixed boundary value problems by conformal transformation methods. *Angew. Math. Phys.* 23, pp.655~664.