

<학술논문>

DOI:10.3795/KSME-A.2009.33.6.607

최적화 기법을 적용한 매체 이송 시스템의 이송속도 및 비틀어짐 제어기의 이득값 결정

차호영* · 범선호** · 김민수** · 이순걸 †

(2009년 3월 12일 접수, 2009년 5월 4일 수정, 2009년 5월 8일 심사완료)

Gain Parameter Determination for the Feeding Speed and Skew Controller of Media Transport System using Optimization Technique

Ho-Young Cha, Sun-Ho Bum, Min-Soo Kim and Soon-Geul Lee

Key Words : Media Transport System(매체 이송 시스템), Meta-model(메타 모델), Paper Feeding System(종이 이송 시스템), PID control(PID 제어), Skew(비틀어짐), Optimization(최적화)

Abstract

In this paper, we made a simple paper feeding system which is one of MTS (media transport system) and controllers. The plant has a flexible paper and two driving rollers and two driven rollers. The control system has two conventional PID controllers. Skew angle and feeding speed of MTS deteriorate the quality of feeding system. In order to control a feeding speed and skew of feeding paper, we control rotational velocity of two driving rollers. Therefore, this controller has two inputs and two outputs as MIMO (multi-input and multi-output) system. The control inputs were the feeding speed and the skew displacement of the paper. The control outputs were the rotational velocity to each driving roller. To find appropriate PID gains of two controllers, we proposed an optimization technique. We assume the system variables and performance of a whole system as follows. PID gains of two controllers for skew and feeding speed are system variables. System performance is both skew and feeding speed. We simulate to making mathematical correlation using global Kriging interpolation. To find appropriate value of system variables, optimization method is simulation in sequence as following method. First, the optimization solver simulates with DOE (design of experiment) tables to find correlation equation of both system variable and performances. Then, the solver guesses the appropriate values and simulates if the system variables are appropriate or not. If the result of validation doesn't satisfy the convergence and iteration tolerance, the solver makes a new Kriging models and iterates this sequence until satisfy the tolerances.

기호설명

e_{PV} : 종이 이송속도
 e_{SK} : 비틀어짐 변위
 ω : 각속도

V_{PV} : PID 제어기의 종이 이송속도 응답
 V_{SK} : PID 제어기의 비틀어짐 응답
 W_{PV} : 종이 이송속도에 대한 성능지수 가중치
 W_{SK} : 비틀어짐에 대한 성능지수 가중치

1. 서론

매체이송 시스템은 프린터, 복사기, 현금 인출기등(ATM)의 기기에서 핵심적인 부분으로 종이나 필름 같은 매체를 두 쌍의 롤러 사이에 공급해주는 부분

† 책임저자, 회원, 경희대학교 기계공학과
E-mail : sglee@khu.ac.kr
TEL : (031)201-2506 FAX : (031)201-1204

* 평선베이쥬

** 경희대학교 기계공학과

을 가리킨다. 이러한 기기들의 소형화, 정밀화에 따라서 매체의 정확한 거동해석이 필요하고 최적의 설계 조건을 찾는 것이 매체이송 시스템의 설계에 있어서 중요한 인자가 되고 있다. 매체가 주요 공정부를 지날 때 미끄러짐이나 비스듬히 이송되는 비틀어짐(Skew) 등의 현상은 시스템의 성능에 영향을 미친다. 미끄러짐과 비틀어짐은 롤러와 매체 사이의 마찰, 수직항력의 변화 또는 롤러간의 속도의 차이에 의해서 발생하게 된다. 이러한 동적인 변형은 시스템 해석에 큰 영향을 줄 수 있다. 이러한 문제들을 해결하기 위해 매체 및 이송 장치들과 관련되는 요소들을 다-유연체 동역학 (Multi-Flexible Body Dynamics) 시스템으로 근사화 하여 컴퓨터로 해석하는 방법이 제안되었다.⁽¹⁾

본 연구에서는 종이와 롤러 사이의 마찰력을 이용하여 비틀어진 종이를 목표한 속도로 이동시키면서, 비틀어짐까지 개선하는 제어하고자 한다. 이를 위해 리커다인(RecurDyn) V7의 MTT3D (Media Transport Toolkit) 및 Co-link 를 이용하여 매체이송 시스템을 통과하는 종이와 롤러를 모델을 만들고 제어기를 구성하였다. 제어기는 산업현장에서 많이 쓰이는 PID 제어기를 사용하였다.

PID 제어기는 구조가 간단하고, 사용자에게 익숙하며, 신뢰성이 높아 많이 쓰인다. 또한, 비선형 시스템에서도 PID 제어기가 신뢰성이 높다. 따라서, PID 제어기의 최적의 이득 값을 찾는 연구는 아직까지도 많은 분야에서 연구되고 있다.⁽²⁾

이들 연구를 살펴보면, Ziegler-Nichols 방법과 다꾸지(Taguchi) 방법이 있다. 전자는 간단하고 편리해서 많이 사용되나 실제 플랜트의 작동조건이 바뀌면 제어이득을 다시 조정해야 하는 단점이 있다. 후자는 이득 값의 변화에 대한 플랜트의 성능을 개선할 수는 있지만, 성능을 정확히 충족시킬 수 없는 단점이 있었다.⁽²⁾

본 논문은 PID 제어기의 최적의 이득 값을 찾는 것이 목적이다. 이를 위하여 플랜트의 수학적 모델을 찾는 대신, 다-유연체 동역학 소프트웨어의 해석 결과를 직접 이용하였다.⁽³⁾ 또한, 플랜트의 출력을 크리깅 (Kriging) 모델로 근사화 시킨 후, PID 제어기의 각 이득 값을 설계변수로 하는 수치 최적화 기법을 적용하였다.⁽⁴⁻⁶⁾

2. 종이 이송 모델링

2.1 해석 모델

본 연구에서 사용된 종이이송 시스템은 비틀

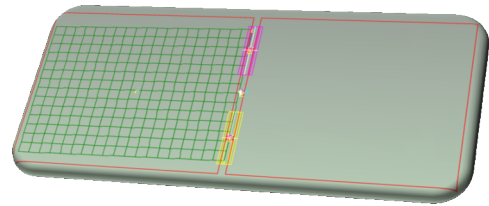


Fig. 1 Feeding system modeling

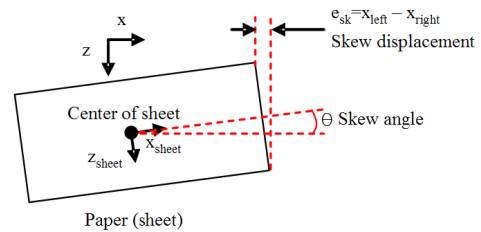


Fig. 2 Coupling of control system

어져 투입되는 종이를 두 개의 구동 롤러의 속도를 조절하여, 이송 속도를 일정 하게 유지시키고, 비틀어짐(Skew)이 없도록 제어하는 모델이다. 종이이송 시스템의 플랜트는 리커다인의 MTT3D 툴킷을 이용하여 모델링을 하였다. 종이는 등방성 재질(Isotropic)의 유한개의 요소로 구성된 유연체이고, 나머지 2 쌍의 롤러와 두 개의 가이드는 강체로 구성되어 있다. 종이의 물성치는 선행연구⁽³⁾에서 사용한 값을 이용하였다.

2 쌍의 롤러는 제어기에 의해 각속도가 조절되는 구동롤러, 종이 또는 구동롤러와의 접촉에 의해 발생하는 마찰에 의해 회전하는 종동롤러로 구성되어 있다. 종동롤러는 회전과 동시에 위아래로 이동이 가능하며, 스프링과 자중에 의해 종이를 구동롤러와 밀착시켜주는 수직 항력을 발생시키는 역할을 한다.

플랜트로 구성된 종이 이송 시스템은 대표적인 비선형 요소인 마찰은 각 요소간의 접촉에 의해서 계산되므로 제어기 설계를 위하여 복잡한 동역학 모델링의 수학적 모델을 찾는 번거로움을 줄일 수 있다.

2.2 제어시스템 구성

제어기는 두 개의 입력과 두 개의 출력을 가진다. 제어입력 즉, 플랜트의 출력은 종이 이송 속도 (Paper velocity) 와 비틀어진 각도(Skew angle)로 정의할 수 있다. 제어기의 출력 즉, 플랜트의 입력은 좌우 두 개의 구동롤러의 각속도이다. 좌우 구동

롤러의 속도 변화를 이용하여, 이송 속도는 70 (mm/sec) 를 유지하고, 비틀어짐은 없도록 제어하는 것이 목적이다. 종이 이송속도와 비틀어짐은 두 개의 PID 제어기로 구성하였다.

종이의 이송속도 제어기에 쓰이는 오차는 식 (1) 과 같다. 종이의 이송 속도는 종이의 중심의 진행방향에 대한 이송 속도가 기준이다.

$$e_{PV} = v_{reference} - v_{sheet} \quad (1)$$

비틀어진 양은 Fig. 2 와 같이 종이의 중심에서 시계방향의 각도 (Skew angle) 또는 진행방향의 종이 양끝의 x 축의 거리 차이로 (Skew displacement) 정의할 수 있다. 이 중 제어기에서는 비틀어짐 값을 거리 차이를 (Skew displacement) 사용하였다.

수식 (2) 는 비틀어짐이다. 비틀어짐이 없어야 하므로, 이 값이 곧 비틀어짐 제어기의 오차이다.

$$e_{SK} = x_{left} - x_{right} \quad (2)$$

좌우 두 개의 구동롤러의 각속도 제어는 제어하려는 목적인 이송 속도와 비틀어짐과 밀접한 관계를 가지고 있다. 종이 이송 속도의 에러와 비틀어짐의 에러를 제어하는 PID 제어기의 출력은 구동롤러의 속도이며 이를 다시 좌우의 속도로써 변경하는 것을 비동조 제어기로 (Decoupling controller) 이름 지었다. 종이 이송속도에 대한 제어기와 비

틀어짐에 대한 제어기가 좌우 구동롤러의 속도로써 변환하는 방법을 Fig. 3 에서 간략하게 설명하였다. 이송속도와 비틀어짐의 PID 제어기의 결과를 $v_{controller}$ 이라 하면, 비동조 제어기에서는 좌우 구동롤러의 각속도인 ω 를 구하기 위하여, 다음 식 (5) 과 같은 변환을 거치게 된다.

$$v_{controller} = [v_{PV} \quad v_{SK}]^T \quad (3)$$

$$\omega = [\omega_l \quad \omega_r]^T \quad (4)$$

$$\omega = Dv_{controller} \quad (5)$$

여기서, 행렬 D 는 식 (6) 과 같이 좌우의 구동롤러의 각속도 분배를 위한 가중치(x_7) 를 이용하여 구성하였다.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & x_7 \\ 1 & 1-x_7 \end{bmatrix} \quad (6)$$

실제로 해석에서 사용한 제어기의 모델링은 Fig. 4 와 같다.

3. 이득값을 얻기 위한 최적설계 정식화

3.1 시스템 변수

시스템 변수들을 x 라고 정의 하였다. $x_1 \sim x_3$ 값들은 종이 이송속도에 대한 PID 제어 이득값들이며, $x_4 \sim x_6$ 값들은 비틀어짐에 대한 PID 제어 이득값들이다. 나머지, x_7 은 좌우 롤러의 구동 속도를 결정할 비동조 제어기의 가중치 값이다.

$$x = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6 \quad x_7]^T \quad (7)$$

Table 1 은 설계를 위한 이득값의 하한치(L), 현재값(C) 그리고, 상한치(U) 를 나타낸다.

각 PID 제어기의 P 이득값의 하한 한계값이 0 일 수 없으므로 1.0 으로 선정하였다. 또한, 비동조 제어를 위한 가중치 값인 x_7 은 항상 0 과 1 의 값이다.

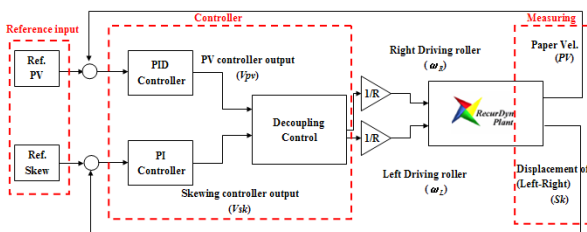


Fig. 3 Decoupling controller

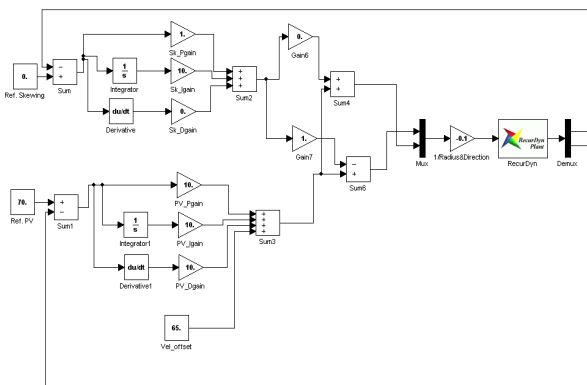


Fig. 4 Control system

Table 1 Design Parameters

No.	Design Variable	L	C	U
1	x_1	1	5	10
2	x_2	0	5	10
3	x_3	0	5	10
4	x_4	1	5	10
5	x_5	0	5	10
6	x_6	0	5	10
7	x_7	0	0.5	1

3.2 최적설계문제 정식화

제어 시스템의 조건은 다음과 같다. 최대 오버슈트의 크기를 작게 하고, 각각 종이의 이송속도와 비틀어짐 오차가 허용 오차 이내로 작아지는 정착시간이 1 초(sec) 이내라는 기본적인 조건을 가정하였다.

두 쌍의 롤러만 사용한 대신 종이의 초기 속도 (Initial velocity)를 정의하여, 앞선 전달 매체에서 이송 되어진 종이를 이송속도와 비틀어짐을 보정하는 제어 시스템이 되도록 하였다. 해석 초기 0.0 초(sec)의 상태는 다음과 같다. 종이는 구동 롤러축에 비해 비틀림 각도(Skew angle)가 1.5 도 기울어져 있다. 또한, 초기 상태에서 종이는 두 쌍의 롤러와 종이는 접촉되지 않은 상태이다. 그러므로, 해석 초기의 이송 속도와 비틀림의 오차는 큰 값을 가지므로, 단위계단 함수를 사용하여 식 (8) 과 (9) 에 이를 정의하였다. 종ий송 속도의 오차는 0.51 초(sec) 이후의 값을 이용하고, 비틀어짐의 오차는 0.21 초(sec) 이후의 값을 이용한다.

$$f_1 = e_{PV}(t) * u(t - 0.51) \quad (8)$$

$$f_2 = e_{SK}(t) * u(t - 0.21) \quad (9)$$

여기서, $u(t)$ 는 단위 계단함수이다. 시스템 변수인 \mathbf{x} 와 해석으로 구한 시스템 변수의 관계를 통하여, 메타 모델을 만들게 된다.

수식 (10)과 (11)은 각각 이송속도 오차에 대한 RMS 와 비틀어짐 오차에 대한 RMS 이다.

$$\Psi_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{T} \int_{t_{n-1}}^{t_n} |f_1(t)| dt \quad (10)$$

$$\Psi_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{T} \int_{t_{n-1}}^{t_n} |f_2(t)| dt \quad (11)$$

여기서, $T = t_{n-1} - t_n$ 이다. 또한, 수식 (12)와 (13)은 종이 이송 속도의 및 비틀어짐의 최대오차이다.

$$\Psi_3(\mathbf{x}) = \max_{t \in [t_{n-1}, t_n]} |f_1(t)| \quad (12)$$

$$\Psi_4(\mathbf{x}) = \max_{t \in [t_{n-1}, t_n]} |f_2(t)| \quad (13)$$

최적 이득값을 얻기 위한 최적화 문제의 정식화는 다음과 같다.

$$\min_{\mathbf{x}} (w_{PV} \Psi_3(\mathbf{x}) \text{ and } w_{SK} \Psi_4(\mathbf{x})) \quad (14)$$

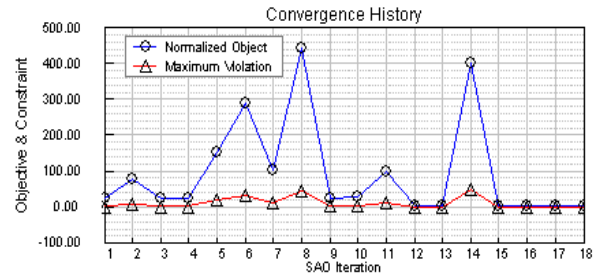


Fig. 5 Convergence history

$$\Psi_1(\mathbf{x}) \leq 0.5 \text{ and } \Psi_2(\mathbf{x}) \leq 0.1 \quad (15)$$

목적함수에 대한 가중치는 각각 $w_{PV} = 1$ 및 $w_{SK} = 2$ 로 하였다.

3.3 실험계획법과 메타모델의 선정

해석 초기에는 실험계획법을 통하여, 메타 모델을 만든다. 본 논문에서는 최소의 실험점으로 이득을 찾기 위하여 ISCD-II 방법을 선택하였다.⁽⁵⁾ 시스템 변수 7 개를 가지므로, 이 실험계획법에서는 9 번의 초기 해석 결과가 필요하였다.

메타 모델 방법은 크리깅(Krigin)을 선택하였다. 이에 대한 설명은 부록-A 에 기술하였다. 초기 실험점의 해석 결과로부터, 메타 모델을 생성하고 최적치를 추정, 이 값으로 다시 해석하여 확인과정을 거친다. 이 때, 발생하는 추정값과의 실제값의 차이로부터 다시 메타 모델을 수정하는 과정을 반복한다. 즉, 순차적인 해석으로부터 메타 모델을 수정하고, 최적의 시스템 변수를 추정하게 된다.

4. 최적화 결과

4.1 순차적 근사 최적화기법의 수렴과정

초기 실험계획법으로부터 9 번의 해석 결과로부터 출발하여, 메타 모델을 수정하고 최적의 시스템 변수를 찾는 근사 최적화를 순차적으로 진행한다.

Fig. 5 는 수렴 과정을 보여 준다. 수렴과정에 대한 각 성능지수들의 상세한 값은 부록-B 에 나열하였다. 최적 이득값을 구하기 위한 순차적 최적화 횟수(SAO)는 18 번을 하였다. 결국, 총 해석 횟수는 27 이 된다. 이 중 15 번째 이후부터 수렴하였다는 것을 알 수 있다. 그러므로, 15 ~ 18 번의 해석 결과는 중에서 어떤 값이든 사용 가능하고, 이 중 공학적으로 타당한 값을 선정하면 된다.

Table 2 Optimal gain value

No.	Design Variable	Value
1	x_1	1.2124413
2	x_2	1.4574699
3	x_3	0.0
4	x_4	9.9981202
5	x_5	0.003632
6	x_6	0.0
7	x_7	0.0

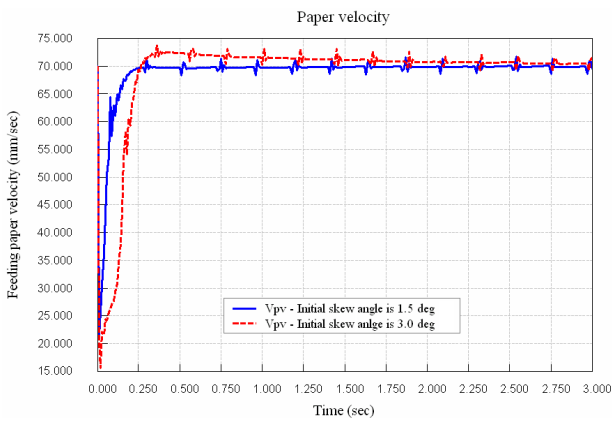


Fig. 6 Paper velocity result of simulation

4.2 최적화된 제어기의 이득값

최적화된 제어기의 이득값은 다음과 같다. 아래 Table 2 는 18 번째 SAO 의 결과이다.

상기의 Table 2 에서 다섯번째 설계변수의 최적 이득값은 $x_5 = 0.0$ 으로 간주 한다.

4.3 최적화된 제어기 이득값의 검증

종이의 초기 비틀어짐 각도를 1.5 도에서 최적화 기법을 이용하여 구한 최적화 값을 검증하기 위하여, 초기 비틀림각 3.0 도에서 역시 해석 결과를 검증하였다.

Fig. 6 은 종이의 이송속도의 결과이다. 또한, Fig. 7 은 비틀어짐 오차인 식 (2)의 결과이다. 이송 속도와 비틀어짐 현상의 정착시간이 1 초(sec) 이내이며, 최대 오차가 줄어든 것을 알 수 있다.

Fig. 8 과 Fig. 9 는 각각 종이 초기 비틀어짐 1.5 도와 3.0 도의 제어 과정을 보여준다. 여기서, 실선은 종이 중심의 이동 경로인데, 제어기가 잘 작동되고 있음을 보여 준다.

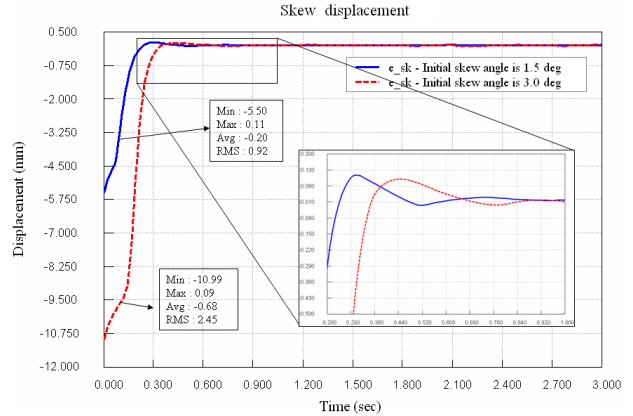


Fig. 7 Paper velocity result of simulation

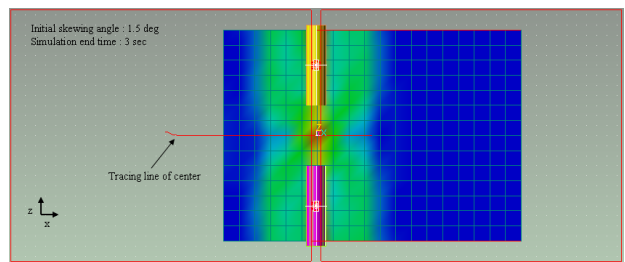


Fig. 8 Initial skew angle is 1.5 (degree).

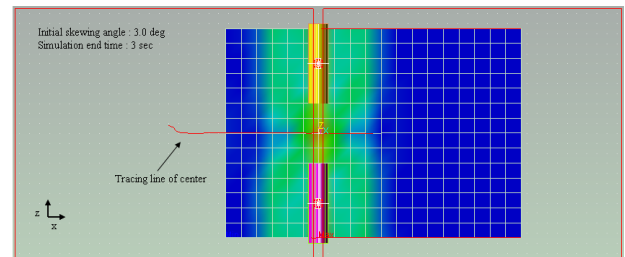


Fig. 9 Initial skew angle is 3.0 (degree).

최초 1.5 도의 비틀어진 각도에서 종이를 놓고 매체의 움직임을 관찰하였더니, 종이의 비틀어짐 제어기가 작동하면서 위치가 정 방향으로 바뀌었고 이후 일정 속도로 종이 이송이 되었다.

5. 결론

본 연구에서는 매체이송 시스템에서 매체의 속도와 비틀어짐을 제어할 수 있음을 보여주었다. 본 연구는 복잡한 매체 이송 시스템을 리커다인의 MTT3D 로 모델링을 함으로써, 근사화에 대한 오류를 방지하였고, 이에 메타-모델 기반 최적화 기법을 적용하여 MIMO 시스템의 제어기의 이득값도 효율적으로 구할 수 있음을 제안하였다. 그리고, 비틀림각이 1.5 도에서 구한 최적 이득값으로, 비틀림각이 3.0 도인 경우도 제어가 가능함을 보임으로써, 설계된 제어기의 강건성도 입증하였다.

후 기

본 논문은 2008 년도 경희대학교 연구년 지원에 의한 결과입니다.

참고문헌

- (1) Simpson, Timothy W., Mauery, Timothy M., Korte, John J., and Mistree, Farrokh, 2001, "Kriging Models for Global Approximation in Simulation-Based Multidisciplinary Design Optimization," *AIAA JOURNAL*, Vol. 39, No. 12, pp. 2233 ~ 2241
- (2) Lee, Jae-Hun, Kang, Ji-Ho, Hong, Chang-Sun and Kim, Chun-Gon, 2003, "Optimum Design of Composite Structures Using Metamodels," *The Korean Society for Composite Materials(KSCM)*, Vol. 16, No. 4, pp. 36~44
- (3) Cha, Ho-Young, Yun, Duk-Jin, Rhim, Sungsoo and Lee, Soon-Geul, 2007, "Development of Paper Feeding Speed Control System Using Co-Simulation Tool," *Proceedings of the ASME(IETC/CIE)*, September 4-7, 2007, Las Vegas, Nevada, USA
- (4) Kim, Min-Soo, Cho, HuiJe, Lee, Soon-geul, Choi, Jinhwan and BAE, DaeSung, 2007, "DFSS and Robust Optimization Tool for Multibody System with Random Variables," *Journal of System Design and Dynamics*, Vol.1, No.3, pp. 583~592
- (5) Kim, M-S, Kim, C-W, Kim, J-H and Choi, JH, 2008, "Efficient Optimization Method for Noisy Response of Mechanical Systems," *Proceedings of the I MECH E Part C Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 222, No. 1, pp.2433~2439
- (6) Kim, Min-Soo, 2008, "Guideline and Basic Theory for RD/AutoDesign," FunctionBay, Inc.

부록-A: 크리깅 모델

크리깅(Kriging)은 통계 지질학에서 발달한 공간적인 데이터 보간법 이다. 크리깅의 수학적 모델은 공간 예측 과정을 처음 소개한 D.G. Krige 박사의 이름으로 지어졌다. Krige 는 Sacks 와 여러 사람들이 컴퓨터 실험에서 크리깅의 적용을 제안한 이래로 보고서에 널리 묘사되어 있다.

실제실험과 다른, 컴퓨터 분석 코드는 결정적이다 그 결과 그것은 측정어러에 영향을 주지 않는다. 따라서, 적절한 모델은 회귀모델에 편차항을 추가한 조합으로 정의 될 수 있다.

$$y = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + z(\mathbf{x}) \quad (\text{A-1})$$

y 가 근사화된 모델이면, $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$ 는 다항식 타입의 회귀모델이다. 그리고 $z(\mathbf{x})$ 는 $N(0, \sigma^2)$ 의 범위를 갖는 가우시안 (Gaussian)의 임의 값이다. 만약 회귀모델 $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$ 가 모든 설계공간에 근사화 될수록, 편차항 $z(\mathbf{x})$ 는 지역화된 편차를 대표하기 위하여 샘플링 값인 n_s 를 삽입했다.

$z(\mathbf{x})$ 의 공분산행렬이 다음과 같이 주어지면,

$$\text{Cov} [z(\mathbf{x}_i)z(\mathbf{x}_j)] = \sigma^2 \mathbf{R} [R(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)] \quad (\text{A-2})$$

R 은 상관행렬이고, $R(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ 는 두 샘플링 값 (n_s) 사이의 상관함수이다. R 은 $n_s \times n_s$ 의 대칭행렬 (Symmetric matrix) 이며, 대각항 (Diagonal term) 은 모두 1 이다. 많은 상관함수 $R(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ 가 존재할 수 있으나, 가우시안 타입이 주로 사용된다.

$$R(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \exp \left[\sum_{l=1}^k \theta_l \left| \mathbf{x}_i^l - \mathbf{x}_j^l \right|^2 \right] \quad (\text{A-3})$$

θ_l 은 미정의 상관계수 (Correlation parameters) 이다. 확인하지 않은 \mathbf{x} 의 값에서, $y(\mathbf{x})$ 의 반응인 $\tilde{y}(\mathbf{x})$ 는 다음과 같이 근사화 할수 있다.

$$\tilde{y}(\mathbf{x}) = \mathbf{X}(\mathbf{x})\tilde{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{r}^T(\mathbf{x})\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{X}(\mathbf{x})\tilde{\boldsymbol{\beta}}) \quad (\text{A-4})$$

\mathbf{X} 와 추출 값인 $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ 의 상관벡터는 다음과 같이 주어진다.

$$\mathbf{r}(\mathbf{x})^T = [R(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1), R(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2), \dots, R(\mathbf{x}, \mathbf{x}_n)]^T \quad (\text{A-5})$$

미정의 추정모델의 계수는 다음과 같이 근사화 할 수 있다.

$$\tilde{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \{ \mathbf{X}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y} \} \quad (\text{A-6})$$

미정의 상관계수 θ_l 를 결정하기 위하여, 근사화된 편차 $\tilde{\sigma}^2$ 는 측정된 데이터의 편차가 아닌, 다음과 같이 구한다.

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n_s} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\tilde{\boldsymbol{\beta}})^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\tilde{\boldsymbol{\beta}}) \quad (\text{A-7})$$

그러므로, 상관계수 θ_i 는 다음의 해결과정에 의해 결정된다.

$$\min_{\theta > 0} (\det \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}))^{1/n_s} \tilde{\sigma}(\boldsymbol{\theta}) \quad (\text{A-8})$$

또는,

$$\max_{\theta > 0} -\frac{1}{2} [n_s \ln(\tilde{\sigma}(\boldsymbol{\theta})^2) + \ln(\det \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}))] \quad (\text{A-9})$$

$\boldsymbol{\theta}$ 가 보간 모델을 생성하기 위한 어떤 값일 때, 최선의 크리깅 모델은 위에 묘사된 것처럼 k -차원의 구속없는 최적화문제(Unconstraint optimization problem)로 표현된다.

부록-B: 최적화 수렴 이력

다음의 표에 최적화 수렴과정에서 각 성능지수들을 나열하였다. PI_1 ~ PI_4 는 각각 $\Psi_1 \sim \Psi_4$ 을 나타낸다. Violation 은 각 설계 단계에서 제약조건인 식 (15)의 위배량(Ψ)의 합이다. 최적화가 진행

하면서, 위배량(Ψ)은 0 이 되고, PI_3 과 PI_4 가 작아지는 양상을 보인다. SAO 16 ~ SAO 18 을 보면, 다중 목적함수 최적화의 수렴특징을 잘 보여준다.

No	PI_1	PI_2	PI_3	PI_4	Violation
1	1.8449394	1.0698283	3.2516719	3.3504229	2.3148277
2	9.3110079	0.91145761	16.508907	3.1160553	9.6225255
3	1.8460145	1.0926217	3.3454787	3.4472545	2.3386962
4	1.8457091	1.084521	3.3296922	3.4236867	2.33029
5	13.846314	6.6050882	28.147349	15.324105	19.851462
6	29.503762	5.590861	65.376792	9.0111065	34.494683
7	11.580453	1.4333999	21.401586	3.5274466	12.413913
8	40.500404	5.147513	120.36	9.6668541	45.047977
9	1.9493212	1.1317472	3.5944283	3.3551901	2.4811284
10	2.3790399	1.278531	4.0603166	3.5314088	3.0576309
11	11.04781	2.0059883	20.473798	5.1960998	12.453858
12	0.42531773	2.88658e-02	1.7089122	0.20191867	0.
13	0.41708034	2.93858e-02	1.6845368	0.21065355	0.
14	50.392665	1.5851762	80.685849	3.3846078	51.377901
15	0.39252414	3.58705e-02	1.6480717	0.30448703	0.
16	0.42107747	2.91393e-02	1.7374121	0.20507168	0.
17	0.43214314	2.56743e-02	1.6456025	0.24981593	0.
18	0.41758216	2.91437e-02	1.7128228	0.20195182	0.