Journal of the Korean Data & Information Science Society
2009, **20**(2), 435–443

한국데이터정보과학회지

누적이동평균(1,1) 모형에서 공정 변화시점의 추정†

이호윤[1] · 이재헌[2]

[1]중앙대학교 대학원 통계학과 · [2]중앙대학교 수학통계학부

접수 2009년 1월 21일, 수정 2009년 3월 16일, 게재확정 2009년 3월 20일

요 약

생산 공정에서 관리도를 통하여 이상원인을 탐지하는 경우 이상상태의 신호가 발생하면 교정활동을 통하여 이를 규명하고 제거한 후 다시 공정을 가동시키는 것이 일반적이다. 이때 이상원인이 발생한 시점인 공정의 변화시점을 알 수 있다면 보다 빠르고 정확하게 이상원인을 규명하고 이를 제거할 수 있을 것이다. 이 논문에서는 누적이동평균(1,1) 모형, 즉 IMA(1,1) 모형을 따르는 공정에서 관리도를 사용하여 모수들의 변화를 탐지하는 경우 공정의 변화시점에 대한 MLE를 제안하고, 제안된 추정량의 효율에 대하여 연구하였다.

주요용어: 공정 변화시점, 관리도, 자기상관 공정, 잔차, 최대우도추정량.

1. 서론

관리도 (control chart)는 통계적 공정관리 (statistical process control; SPC)에서 생산 공정의 변동의 원인이 되는 공정모수의 변화를 탐지하는 도구로서 널리 사용되어 왔다. 대표적인 관리도로는 Shewhart 관리도를 들 수 있는데, Shewhart 관리도는 공정모수의 작은 변화는 효율적으로 탐지하지 못한다는 단점을 가지고 있다. 이와 같은 단점 때문에 공정평균의 작은 변화를 탐지하고자 하는 경우 CUSUM (cumulative sum) 관리도나 EWMA (exponentially weighted moving average) 관리도를 사용하고 있다.

일반적으로 공정에서 관리도를 적용할 경우의 가장 기본적인 가정은 관측값들이 서로 독립이라는 것이다. 그러나 독립성 가정은 화학공정과 같은 연속형 제조공정에서 자주 위배되고 있는 실정이다. 이렇게 독립성 가정이 위배됨에도 불구하고 전통적인 관리도를 사용할 경우 오경보 (false alarm)가 매우 증가하여 관리상태에서의 평균런길이 (average run length; ARL)가 미리 설정한 값보다 매우 작아진다는 사실이 잘 알려져 있다. 일반적으로 이와 같이 자기상관이 존재하는 공정에서 사용하는 관리도 절차는 다음의 2가지 방법을 사용하고 있다. 첫 번째는 공정의 자기상관을 고려하여 관리한계 등을 조정하는 것이고, 두 번째 방법은 시계열 모형을 사용하여 잔차 (residual)를 계산하고 잔차에 대하여 기존의 관리도 기법을 적용하는 것이다. 자세한 사항은 Lu와 Reynolds (1999) 등을 참고할 수 있다.

관리도를 통하여 이상원인 (special cause)이 발생했다는 신호가 있을 경우 교정활동을 통하여 이를 규명하고 제거한 후 다시 공정을 가동시키는 것이 일반적이다. 이때 이상원인이 발생한 시점, 즉 공정의

† 이 논문은 2009년도 중앙대학교 학술연구비 지원에 의한 것임.
[1] (156-756) 서울특별시 동작구 흑석동 221, 중앙대학교 대학원 통계학과, 석사과정.
[2] 교신저자: (156-756) 서울특별시 동작구 흑석동 221, 중앙대학교 수학통계학부, 교수.
E-mail: jaeheon@cau.ac.kr

변화시점 (process change point)을 알 수 있다면 보다 빨리 이상원인을 규명하고 공정을 관리상태로 회복시킬 수 있을 것이다.

Hawkins 등 (2003)은 공정의 변화시점 추정에 대하여 다음과 같이 3가지 시나리오로 나누어 선행연구 결과들을 언급하였다. 첫 번째는 변화시점을 제외한 모든 공정모수 값을 알고 있는 경우, 두 번째는 관리상태에서의 공정모수 값은 알고 있지만 이상상태에서의 공정모수 값은 모르는 경우, 마지막으로 세 번째는 모든 공정모수 값을 모르는 경우로 구분하였다. 일반적으로 두 번째 시나리오가 생산 공정에서 가장 많이 발생하는 것으로 알려져 있다.

Samuel 등 (1998)은 두 번째 시나리오를 가정하고 서로 독립인 정규분포 모형에서 Shewhart 관리도를 사용할 경우 공정평균의 변화시점에 대한 MLE (maximum likelihood estimator)를 제안하였고, Pignatiello와 Samuel (2001)은 같은 가정 하에서 CUSUM과 EWMA 관리도와 이 MLE를 사용하는 것에 대한 효율을 모의실험을 통하여 보였다. Lee와 Park (2007)은 두 번째 시나리오를 가정하고 정규분포의 평균과 분산이 동시에 변하는 공정에서 고정추출비 (fixed sampling rate)와 변량추출비 (variable sampling rate)를 사용할 때 공정의 변화시점에 대한 MLE를 제안하였다.

Timmer와 Pignatiello (2003)는 자기상관이 있는 AR(1) 모형의 공정모수들의 변화시점에 대한 추정량을 제안하였고, Lee 등 (2007)과 Lee와 Lee (2007)는 랜덤오차가 추가된 AR(1) 모형에서 공정모수들이 변화할 때 이를 관리도를 사용하여 탐지할 경우 그 변화시점에 대한 MLE를 제안하였다.

이 논문에서는 공학적 공정관리 (engineering process control; EPC)에서 많이 사용하는 IMA(1,1) 모형에서 공정모수들이 변화할 때 이를 관리도를 사용하여 탐지할 경우 그 변화시점에 대한 MLE를 제안한다. 또한 모의실험을 실시하여 제안된 MLE의 효율을 살펴보았다. 이때 시계열 모형을 적합시켜 계산된 잔차들에 대하여 관리도를 적용하며, Hawkins 등 (2003)이 구분한 3가지 시나리오 중 두 번째 시나리오를 가정하기로 한다.

2. IMA(1,1) 모형

X_t는 시점 t에 공정에서 추출한 관측값이라 할 때, IMA(1,1) 모형은

$$X_t = X_{t-1} + \epsilon_t - \theta\epsilon_{t-1}, \tag{2.1}$$

또는

$$X_t = \frac{1-\theta B}{1-B}\epsilon_t$$

로 나타낼 수 있으며, 여기서 B는 $BX_t = X_{t-1}$인 후진연산자 (backshift operator)이고 시점 t에서의 공정오차인 ϵ_t는 평균이 0이고 분산이 σ_ϵ^2인 정규분포를 따르는 확률변수를 가정한다. 또한 θ는 $0 \leq \theta < 1$인 평활상수 (smoothing constant)를 나타낸다.

공정모형에서는 시작 시점이 있기 때문에 $t \leq 0$인 경우 $X_t = 0$과 $\epsilon_t = 0$을 가정한다. 이 경우 식 (2.1)은

$$X_t = (1-\theta)\sum_{j=1}^{t-1}\epsilon_j + \epsilon_t, t = 1, 2, \cdots \tag{2.2}$$

로 표현할 수 있다. 또한 시점 $t-1$에서 시점 t에 대한 최소평균제곱오차 (minimum mean square error; MMSE) 예측치를 $\hat{X}_t$라 할 때, $\hat{X}_t$는 EWMA인

$$\hat{X}_t = (1-\theta)X_{t-1} + \theta\hat{X_{t-1}}$$

가 되고 이를 다시 표현하면

$$\hat{X}_t = \frac{1-\theta}{1-\theta B} X_{t-1} = (1-\theta)\sum_{j=1}^{t-1} \epsilon_j \tag{2.3}$$

가 됨이 잘 알려져 있다.

IMA(1,1) 모형은 비정상 시계열모형 (nonstationary time series model) 중 비교적 간단한 형태이지만, 수정활동을 통하여 공정수준이 목표값에 가깝게 유지하도록 하는 공학적 공정관리에서 공정수준의 유동적 현상을 잘 표현하여 공정잡음 모형으로 적합한 것으로 알려져 있다 (Box와 Kramer, 1992; Vander Wiel, 1996). 이 논문에서는 통계적 공정관리의 공정모형으로 사용할 수 있도록 IMA(1,1) 모형의 평활상수 θ가 1에 가까운 경우를 주로 고려하고자 한다.

3. 공정모수의 변화시점 추정 및 효율

이상원인에 의한 공정모수의 변화는 다음과 같이 공정평균과 공정오차의 분산의 변화 등 2가지를 고려한다. 이상원인은 알려지지 않은 시점 τ와 $\tau+1$사이에서 발생한다고 가정하는데, 일반적으로 τ를 공정의 변화시점 (process change point)이라 칭한다.

3.1. 공정평균의 변화시점 추정 및 효율

먼저 공정모형의 평균이 변화할 때 이를 탐지하는 문제를 고려해 보자. 공정평균의 변화량은 $\delta\sigma_\epsilon$로 표시하고, 관리상태에서의 공정평균은 0이라고 가정하기로 한다. 또한 σ_ϵ는 예비표본을 통하여 알고 있는 값이지만, δ는 모르는 값임을 가정한다. 이 경우 공정모형은

$$X_t = (1-\theta)\sum_{j=1}^{t-1} \epsilon_j + \epsilon_t + \delta_t$$

로 표현할 수 있으며, 여기서 δ_t는 공정평균으로 $t \le \tau$인 경우에는 0이고 $t \ge \tau+1$인 경우에는 $\delta\sigma_\epsilon$로 정의한다. 공정에 이상원인이 발생한 후에도 이상상태의 신호 이전에는 이를 알 수가 없으므로, MMSE 예측치는 식 (2.3)을 사용하고 이때 잔차는

$$e_t = \begin{cases} \epsilon_t & , t \le \tau \\ \delta\sigma_\epsilon + \epsilon_t & , t \ge \tau+1 \end{cases}$$

가 된다. 따라서 잔차의 기대값은

$$E(e_t) = \begin{cases} 0 & , t \le \tau \\ \delta\sigma_\epsilon & , t \ge \tau+1 \end{cases}$$

이 되고, 분산은 모든 t에 대하여 $Var(e_t) = \sigma_\epsilon^2$이 된다. 즉, 잔차들은 서로 독립이고 평균 $E(e_t)$와 분산 σ_ϵ^2을 갖는 정규분포를 따르게 된다. 그러므로 공정평균의 변화를 탐지하는 관리도는 잔차의 평균의 변화를 탐지하는 문제로 귀결되며, 측정된 잔차 e_t를 통계량으로 사용하는 Shewhart, CUSUM, 그리고 EWMA 관리도 등을 적용할 수 있다.

이 경우 관리도에서 이상신호를 준 시점을 T라 할 때, 공정의 변화시점에 대한 MLE는

$$\hat{\tau}_\delta = \arg\max_{0 \le t < T} \left\{ \frac{\left(\sum_{i=t+1}^{T} e_i\right)^2}{T-t} \right\} \tag{3.1}$$

이 된다. 이에 대한 상세한 유도 과정은 부록 A에 수록하였다.

다음으로 식 (3.1)의 MLE의 효율을 알아보기 위하여 모의실험을 수행하였다. 앞에서 언급한 바와 같이 공정모형이 과거의 공정오차들에 영향을 많이 받지 않고 현재 시점의 공정오차에 영향을 많이 받도록, 즉 백색잡음 (white noise) 모형에 유사하도록 평활상수는 1에 가까운 0.9로 고정하고, 공정의 변화시점인 τ는 100을 사용하였다. τ는 특정한 평균값을 갖는 기하분포 (geometric distribution)로부터 생성할 수도 있지만, 이전 연구에서 결과들이 τ값에 의존하지 않는 것으로 나타나 이 논문에서는 100으로 고정된 값을 사용하였다 (Lee 등, 2007). 또한 일반성을 잃지 않고 $\sigma_\epsilon^2 = 1$을 가정하였다.

공정평균의 변화를 탐지하는 관리도로는 표본의 크기가 $n = 1$인 EWMA 관리도를 사용하였다. 즉, 관리통계량은

$$E_t = \lambda e_t + (1 - \lambda)E_{t-1}$$

을 사용하고, 주어진 관리한계 h_δ에 대하여 $|E_t| \geq h_\delta$인 경우 이상신호를 주는 것이다. 여기서 $E_0 = 0$을 가정하고, 관리한계 h_δ는

$$h_\delta = k_\delta \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda}}$$

를 사용하였다. k_δ는 관리상태에서의 평균런길이인 ARL_0가 370.4가 되도록 설정할 수 있다. 370.4는 Shewhart 관리도에서 3σ관리한계를 사용할 때의 ARL_0값으로, 관리도의 효율을 살펴볼 때 고정된 ARL_0값으로 많이 사용하고 있다. 또한 가중치 λ는 0.1, 0.2, 0.4, 그리고 1.0을 사용하였는데, λ가 작은 값일수록 모수의 작은 변화에 효율적이라고 알려져 있으며 $\lambda = 1.0$인 경우는 Shewhart 관리도와 동일해진다.

표 3.1 공정평균이 변화하는 경우 모의실험 결과

δ	λ	k_δ	ARL	Bias
0.5	0.1	2.701	27.49	6.17
	0.2	2.859	35.53	6.85
	0.4	2.959	58.14	6.79
	1.0	3.000	155.15	4.20
1.0	0.1	2.701	9.54	-0.64
	0.2	2.859	9.60	-0.36
	0.4	2.959	12.57	0.10
	1.0	3.000	43.90	0.36
2.0	0.1	2.701	4.12	-0.70
	0.2	2.859	3.54	-0.71
	0.4	2.959	3.30	-0.69
	1.0	3.000	6.31	-0.25
3.0	0.1	2.701	2.74	-0.34
	0.2	2.859	2.27	-0.37
	0.4	2.959	1.92	-0.42
	1.0	3.000	2.00	-0.37

평균의 변화량인 δ의 여러 가지 값과 EWMA 관리도의 4가지 가중치 및 이때 $ARL_0 = 370.4$를 만족시키는 k_δ값, 그리고 이 경우 ARL과 Bias 값을 표 3.1에 수록하였다. 여기서 ARL은 이상상태에서의 ARL인 ARL_1값으로서 관리도가 얼마나 빨리 이상원인을 탐지하는가를 나타내는 값이다. 또한 Bias는 공정의 변화시점인 τ의 추정량에서 τ의 참값 (여기서는 100)을 뺀 값으로 정의하고, 이 값으로 추정량의 정확성을 나타내기로 한다. 모의실험에서 반복은 독립적으로 1,000,000번 수행하였고, ARL과 $\hat{\tau}_\delta$은 반복한 결과들의 평균값을 사용하였다.

모의실험 결과 이상상태에서의 ARL을 살펴보면 잘 알려진 바와 같이 평균의 변화량인 δ가 작은 경우에는 λ가 작은 경우가 효율이 좋았으며, δ가 커질수록 λ도 좀 더 큰 값을 사용하는 것이 효율이 좋음을 알 수 있었다. 평균의 변화시점의 추정량의 효율은 δ가 아주 작은 경우 ($\delta = 0.5$) 이상상태의 신호가 아주 늦기 때문에, 즉 ARL_1값이 아주 크기 때문에 $\hat{\tau}_\delta$의 정확도도 많이 떨어지는 경향이 있으나, 평균의 변화량이 어느 정도 큰 경우 ($\delta \geq 1.0$)에는 대체로 잘 추정하고 있음을 확인할 수 있다.

3.2. 공정오차의 분산 σ_ϵ^2의 변화시점 추정 및 효율

다음으로는 이상원인으로 인하여 공정오차의 분산 σ_ϵ^2이 $t \leq \tau$인 경우 σ_0^2이지만 $t \geq \tau + 1$인 경우 σ_1^2으로 변화하는 경우를 고려해 보자. 이 경우 잔차는 식 (2.2)와 (2.3)에 의하여 $e_t = \epsilon_t$가 되지만, 잔차 e_t의 분포는 $t \leq \tau$인 경우 $N(0, \sigma_0^2)$이고 $t \geq \tau + 1$인 경우에는 $N(0, \sigma_1^2)$을 따르게 된다. 결국 공정오차의 분산 σ_ϵ^2의 변화를 탐지하는 문제는 잔차의 분산을 탐지하는 것과 동일하므로, 공정의 분산을 탐지하는데 사용하는 관리도, 예를 들면 잔차의 제곱을 통계량으로 사용하는 Shewhart, CUSUM, 그리고 EWMA 관리도 등을 적용할 수 있다.

이 경우 관리도에서 이상신호를 준 시점을 T라 할 때, 공정의 변화시점에 대한 MLE는

$$\hat{\tau_{\sigma^2}} = \arg\min_{0 \leq t < T} \left[(T-t) \left\{ \ln\left(\frac{\sum_{i=t+1}^{T} e_i^2}{T-t} \right) + 1 \right\} + t \ln \sigma_0^2 + \frac{\sum_{i=1}^{t} e_i^2}{\sigma_0^2} \right] \tag{3.2}$$

이 된다. 이에 대한 상세한 유도 과정은 부록 B에 수록하였다.

다음으로 식 (3.2)의 MLE의 효율을 알아보기 위하여 모의실험을 수행하였다. 관리상태에서의 분산은 $\sigma_0^2 = 1$, 이상상태에서의 분산은 $\sigma_1^2 = \gamma\sigma_0^2$, 그리고 변화의 계수인 γ는 모르는 값임을 가정한다. 기타 용어 및 가정한 사항은 앞 절에서 수행한 모의실험과 동일하며, 앞 절의 모의실험과 다른 사항은 공정의 분산의 변화를 탐지하기 위하여 e_t^2을 통계량으로 하는 EWMA 관리도를 사용한다는 것이다. 즉, 관리통계량으로

$$E_t = \lambda e_t^2 + (1-\lambda)E_{t-1}$$

을 사용하고, 주어진 관리한계 h_γ에 대하여 $E_t \geq h_\gamma$인 경우 이상신호를 주었다. 여기서 $E_0 = 1$을 가정하고 관리한계 h_γ는

$$h_\gamma = 1 + k_\gamma \sqrt{\frac{2\lambda}{2-\lambda}}$$

를 사용한다 (Domangue와 Patch, 1991; Reynolds와 Stoumbos, 2004). 여기서 k_γ는 $ARL_0 = 370.4$를 만족하도록 설정할 수 있다.

모의실험을 수행한 결과는 표 3.2에 수록하였다. 모의실험 결과 이상상태에서의 ARL을 살펴보면 앞 절의 결과와 유사하게 분산의 변화계수 γ가 작은 경우에는 λ가 작은 경우, γ가 커질수록 λ도 좀 더 큰 경우가 효율이 좋음을 알 수 있었다. 또한 공정오차의 분산의 변화시점에 대한 추정은 변화계수가 어느 정도 큰 경우 ($\gamma \geq 2.0$) 대체로 잘 추정하고 있음을 확인할 수 있다.

4. 결론

관리도를 사용하여 공정에 이상신호가 발생한 후 그 이상원인을 규명하고 이를 제거하여 공정을 관리상태로 회복시키는 것은 공정관리 측면에서 아주 중요한 과정이다. 그러나 이상원인을 탐지하는 절차에 대해서는 많은 연구가 진행되어 왔지만, 이상신호 후 이상원인을 규명하는 절차에 대한 연구는 상대적으

표 3.2 공정오차의 분산이 변화하는 경우 모의실험 결과

γ	λ	k_γ	ARL	Bias
1.5	0.1	3.062	14.04	5.28
	0.2	3.809	15.23	5.52
	0.4	4.704	17.67	5.58
	1.0	5.657	21.99	5.38
2.0	0.1	3.062	6.04	1.02
	0.2	3.809	6.04	1.00
	0.4	4.704	6.43	1.02
	1.0	5.657	7.50	1.02
2.5	0.1	3.062	3.96	0.30
	0.2	3.809	3.87	0.27
	0.4	4.704	3.95	0.26
	1.0	5.657	4.34	0.26
3.0	0.1	3.062	3.03	0.09
	0.2	3.809	2.95	0.06
	0.4	4.704	2.96	0.00
	1.0	5.657	3.15	0.00

로 많지 않은 실정이다. 이상원인의 발생시점을 정확하게 추정할 수 있다면 훨씬 빠르고 정확하게 이상원인을 규명할 수 있을 것이라는 것은 자명한 사실이다.

이 논문에서는 공정모형으로 IMA(1,1) 모형을 가정했을 때, 공정모수들의 변화시점에 대한 MLE를 제안하고 그 효율을 살펴보았다. 여기서 공정모수들의 변화로는 공정평균과 공정오차의 분산의 변화를 고려하였다. 그 결과 이 논문에서 제안된 추정량을 실제 생산 공정에 적용할 경우, 이상원인을 규명하고 공정을 효율적으로 관리하는데 크게 도움이 될 것이라 판단한다.

부록 A: 식 (3.1)의 유도

IMA(1,1) 모형에서 공정평균이 0에서 $\delta\sigma_\epsilon$로 변하는 경우 e_t의 분포는 $t \le \tau$인 경우 $N(0, \sigma_\epsilon^2)$이고, $t \ge \tau + 1$인 경우 $N(\delta\sigma_\epsilon, \sigma_\epsilon^2)$이 된다. 여기서 τ와 δ는 모름을 가정한다. 이상상태의 신호가 주어진 시점 T에서, 잔차 $e_1, e_2, \cdots, e_T$가 주어진 경우 로그우도비함수 (log likelihood function)는

$$\ln L(\tau, \delta) = -\frac{T}{2}\ln\left(2\pi\sigma_\epsilon^2\right) - \frac{1}{2\sigma_\epsilon^2}\left[\sum_{i=1}^{\tau} e_i^2 + \sum_{i=\tau+1}^{T}(e_i - \delta\sigma_\epsilon)^2\right]$$

으로 표현된다.

만일 τ를 알고 있다고 가정하면 δ의 MLE는

$$\hat{\delta} = \frac{\sum_{i=\tau+1}^{T} e_i}{\sigma_\epsilon(T-\tau)}$$

이 되고, 이 추정량을 로그우도비함수에 대입하면

$$\begin{aligned}\ln L(\tau) &= -\frac{T}{2}\ln\left(2\pi\sigma_\epsilon^2\right) - \frac{1}{2\sigma_\epsilon^2}\left[\sum_{i=1}^{\tau} e_i^2 + \sum_{i=\tau+1}^{T}\left(e_i - \hat{\delta}\sigma_\epsilon\right)^2\right] \\ &= -\frac{T}{2}\ln\left(2\pi\sigma_\epsilon^2\right) - \frac{1}{2\sigma_\epsilon^2}\sum_{i=1}^{T} e_i^2 + \frac{1}{2\sigma_\epsilon^2}\frac{\left(\sum_{i=\tau+1}^{T} e_i\right)^2}{T-\tau}\end{aligned}$$

을 얻는다. 따라서 τ의 MLE는 식 (3.1)과 같이

$$\hat{\tau_\delta} = \arg\max_{0\le t<T} \left\{ \frac{\left(\sum_{i=t+1}^{T} e_i\right)^2}{T-t} \right\}$$

이 된다.

부록 B: 식 (3.2)의 유도

IMA(1,1) 모형에서 공정오차의 분산이 변화한 경우 e_t의 분포는 $t \le \tau$인 경우 $N(0,\sigma_0^2)$이고, $t \ge \tau+1$인 경우 $N(0,\sigma_1^2)$이 된다. 여기서 τ와 σ_1^2은 모름을 가정한다.

이상상태의 신호가 주어진 시점 T에서, 잔차 $e_1, e_2, \cdots, e_T$가 주어진 경우 로그우도비함수는

$$\ln L(\tau,\sigma_1^2) = -\frac{T}{2}\ln(2\pi) - \frac{\tau}{2}\ln\sigma_0^2 - \frac{T-\tau}{2}\ln\sigma_1^2 - \frac{\sum_{i=1}^{\tau} e_i^2}{2\sigma_0^2} - \frac{\sum_{i=\tau+1}^{T} e_i^2}{2\sigma_1^2}$$

으로 표현된다.

만일 τ를 알고 있다고 가정하면 σ_1^2의 MLE는

$$\hat{\sigma_1^2} = \frac{\sum_{i=\tau+1}^{T} e_i^2}{T-\tau}$$

이 되고, 이 추정량을 로그우도비함수에 대입하면

$$lnL(\tau) = -\frac{T}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\left[(T-\tau)\left\{\ln\left(\frac{\sum_{i=\tau+1}^{T} e_i^2}{T-\tau}\right)+1\right\} + \tau\ln\sigma_0^2 + \frac{\sum_{i=1}^{\tau} e_i^2}{\sigma_0^2}\right]$$

을 얻는다. 따라서 τ의 MLE는 식 (3.2)과 같이

$$\hat{\tau_{\sigma^2}} = \arg\min_{0\le t<T}\left[(T-t)\left\{\ln\left(\frac{\sum_{i=t+1}^{T} e_i^2}{T-t}\right)+1\right\} + t\ln\sigma_0^2 + \frac{\sum_{i=1}^{t} e_i^2}{\sigma_0^2}\right]$$

이 된다.

참고문헌

Box, G. E. P. and Kramer. (1992). Statistical process control and feedback adjustment - a discussion. *Technometrics*, **34**, 251-285.

Domangue, R. and Patch, S. C. (1991). Some omnibus exponentially weighted moving average statistical process monitoring schemes. *Technometrics*, **33**, 299-313.

Hawkins, D. M., Qiu, P. and Kang, C. W. (2003). The changepoint model for statistical process control. *Journal of Quality Technology*, **35**, 355-366.

Lee, J., Han, J. H. and Jung, S. H. (2007). Estimation of the change point in monitoring the mean of autocorrelated processes. *The Korean Communications in Statistics*, **14**, 155-167.

Lee, J. and Lee, H. Y. (2007). Change point estimators in monitoring the parameters of an AR(1) plus an additional random error model. *Journal of Korean Data & Information Science Society*, **18**, 963-972.

Lee, J. and Park, C. (2007). Estimation of the change point in monitoring the process mean and variance. *Communications in Statistics: Simulation and Computation*, **36**, 1333-1345.

Lu, C. W. and Reynolds, M. R., Jr. (1999). EWMA control charts for monitoring the mean of autocorrelated processes. *Journal of Quality Technology*, **31**, 166-188.

Pignatiello, J. J., Jr. and Samuel, T. R. (2001). Estimation of the change point of a normal process mean in SPC applications. *Journal of Quality Technology*, **33**, 82-95.

Reynolds, M. R., Jr. and Stoumbos, Z. G. (2004). Control charts and the efficient allocation of sampling resources. *Technometrics*, **46**, 200-214.

Samuel, T. R., Pignatiello, J. J., Jr. and Calvin, J. A. (1998). Identifying the time of a step change with $\bar{X}$control charts. *Quality Engineering*, **10**, 521-527.

Timmer, D. H. and Pignatiello, J. J., Jr. (2003). Change point estimates for the parameters of an AR(1) process. *Quality and Reliability Engineering International*, **19**, 355-369.

Vander Wiel, S. A. (1996). Monitoring processes that wander using integrated moving average models. *Technometrics*, **38**, 139-151.

Journal of the Korean Data & Information Science Society
2009, **20**(2), 435–443

한국데이터정보과학회지

Change point estimators in monitoring the parameters of an IMA(1,1) model[†]

Ho Yun Lee[1] · Jaeheon Lee[2]

[12]Department of Statistics, Chung-Ang University

Received 21 January 2009, revised 16 March 2009, accepted 20 March 2009

Abstract

Knowing the time of the process change could lead to quicker identification of the responsible special cause and less process down time, and it could help to reduce the probability of incorrectly identifying the special cause. In this paper, we propose the maximum likelihood estimator (MLE) for the process change point when a control chart is used in monitoring the parameters of a process in which the observations can be modeled as a IMA(1,1).

Keywords: Autocorrelation, control chart, maximum likelihood estimator, residual, process change point.

† This Research was supported by the Chung-Ang University Research Grants in 2009.
1 Graduate student, Department of Statistics, Chung-Ang University, Seoul 156-756, Korea.
2 Corresponding author: Professor, Department of Statistics, Chung-Ang University, Seoul 156-756, Korea. E-mail: jaeheon@cau.ac.kr