

두 개의 이상원인을 고려한 VSSI 원인선별 관리도의 경제적-통계적 설계

정민수 · 임태진[†]

송실대학교 산업·정보시스템공학과

Economic-Statistical Design of VSSI Cause-Selecting Charts Considering Two Assignable Causes

Min-Su Jung · Tae-Jin Lim[†]

Dept. of Industrial & Information Systems Engineering, Soongsil University

Key Words : Cause-selecting Chart, Adaptive Control Chart, AATS, Economic Design, VSSI

Abstract

This article investigates economic-statistical design of VSSI(variable sampling size and interval) cause-selecting charts considering two assignable causes. We consider a process which is composed of two dependent sub-processes. In each sub-process, two kinds of assignable cause may exist. We propose a procedure for designing VSSI cause-selecting charts, based on Lorenzen and Vance model. Computational experiments show that the VSSI cause-selecting chart is superior to the FSSI cause-selecting chart in the economic-statistical characteristics, even under two assignable causes.

1. 서 론

관리도는 통계적 품질관리의 중요한 도구 중 하나로써 공정의 이상상태를 효율적으로 감지하는데 널리 사용되어왔다. 관리도에 대한 대다수의 기존 연구는 단일 공정을 대상으로 수행되었으나, 대부분의 현실적인 공정은 상호 종속적인 여러 단계의 하부공정으로 구성된다. 따라서 각각의 하부 공정을 독립적인 관리도로 감시하는 것은 적절하지 못한 결과를 초래할 수 있다. 이에 착안하여 Zhang(1984)은 2단계의 종속적인 공정을 감지하기 위한 원인선별 관리도를 제안하였고, 두 공정 단계에 독립적으로 Shewhart 관리도를 사용하는 경우보다 공정단계간의 관계를 더 명확히 설명할 수 있다고 주장하였다.

일반적으로 하나의 공정에는 다수의 이상원인이 존

재하기 마련이다. 모든 이상원인을 고려하는 것은 비현실적이지만, 크게 차이나는 두 가지의 이상원인을 분리하여 접근하는 방법이 하나의 이상원인만을 고려하는 것보다 우수하다는 결과가 발표된 바 있다[Lee *et al.*(2007)]. 그러나 2단계 공정 각각에 두 개의 이상원인이 존재하는 경우에 대한 연구는 아직까지 없는 실정이다. 본 연구는 가장 기본이 되는 2단계 공정에서 각각의 하부공정에 두 개의 이상원인을 고려하여 효율적인 원인선별 관리도를 제안하고자 한다.

공정평균의 변화를 감지하기 위한 Shewhart \bar{X} 관리도는 고정된 표본크기, 샘플링간격, 관리한계선 등의 기본적인 설계모수만을 사용하므로 운용이 단순하여 가장 보편적으로 사용되고 있다.

표본크기 및 샘플링간격이 일정한 표본추출방법(Fixed Sampling Size and Interval: FSSI)을 사용하는 Shewhart 관리도는 공정평균의 변화가 큰 경우에는 우수한 성능을 보이나, 변화가 작은 경우에는 민감하지 못하다. FSSI 관리도의 성능을 향상시키기 위해서

[†] 교신저자 tjlim@ssu.ac.kr

※ 본 연구는 송실대학교 교내연구비 지원으로 수행되었음.

CUSUM(Cumulative Sum) 관리도, EWMA(Exponentially Weighted Moving Average) 관리도 등의 특수한 관리도들이 개발되었으나, 개념이 복잡하여 보편적으로 사용되지 못하고 있다.

최근에는 임계한계를 사용하여 표본통계량의 타점영역에 따라 표본크기 또는 샘플링간격을 변경하는 적응형 관리도가 연구되었다. VSI(Variable Sampling Interval) 관리도는 표본크기를 일정하게 유지하고 타점영역에 따라 샘플링간격을 변화시키는 방법이며, VSS(Variable Sample Size) 관리도는 고정된 샘플링간격을 사용하며 표본의 타점영역에 따라 다음 표본의 크기를 변화시키는 방법이다. 표본크기 및 샘플링간격을 동시에 변화시켜 그 성능을 높이는 VSSI(Variable Sampling Size and Interval) 관리도는 Prabhu *et al.* (1994), Costa(1997) 등에 의해 연구 되었다.

Wade and Woodall(1993)은 원인선별 관리도와 다변량 T^2 관리도의 관계를 조사하여, 이상신호 발생 시 어떤 하부 공정이 이상상태인지를 판단함에 있어 원인선별 관리도가 다변량 T^2 관리도보다 유리함을 밝혔다. Yang and Su(2007)는 적응형 샘플링 기법을 원인선별 관리도에 적용하여 FSSI 방법 보다 VSSI 방법을 사용하는 것이 더 우수한 통계적 성능을 갖는다고 하였다.

본 연구에서는 Lorenzen and Vance(1986)의 경제적 설계 모형에 기초하여 두 개의 이상원인이 존재하는 2단계 공정에 대한 VSSI 원인선별 관리도의 경제적-통계적 설계 절차를 제안한다. 또한 수치예제를 통하여 두 개의 이상원인을 고려한 경우에 VSSI 원인선별 관리도의 경제적-통계적 특성이 FSSI 관리도보다 우수함을 보이고자 한다.

2. VSSI 원인선별 관리도의 운영절차

본 연구에서 사용하는 기호는 다음과 같다.

- $\Phi(\cdot)$ 표준정규 누적분포함수
- $Z_{\bar{X}_i}$ [공정1]에 대한 i 번째 표본 군의 표준화된 표본평균
- Z_{e_i} [공정2]에 대한 i 번째 표본 군의 표준화된 표본잔차의 평균
- LCL 표준화된 표본평균의 관리하한선
- UCL 표준화된 표본평균의 관리상한선

설계모수(design parameters)

- w VSSI 관리도의 표준화된 임계한계
- k VSSI 관리도의 표준화된 관리한계
- n_1 VSSI 관리도의 최소 표본크기
- n_2 VSSI 관리도의 중간 표본크기
- n_3 VSSI 관리도의 최대 표본크기
- h_1 VSSI 관리도의 최소 샘플링 간격
- h_2 VSSI 관리도의 중간 샘플링 간격
- h_3 VSSI 관리도의 최대 샘플링 간격
- n_0 FSSI 관리도의 고정 표본크기
- h_0 FSSI 관리도의 고정 샘플링 간격
- k_0 FSSI 관리도의 표준화된 관리한계

공정모수(process parameters)

- λ_{ij} [공정 i]에 존재하는 이상원인 AC_{ij} 의 발생률 ($i=1,2, j=1,2$)(공정단계별 이상원인 두 개)
- A 이상원인의 총 발생률 ($\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \lambda_{ij}$)
- δ_{ij} [공정 i]에 존재하는 이상원인 AC_{ij} 에 의한 공정평균의 표준화된 이동
[공정 1]에서 $\delta_{10}=0, \delta_{13}=(\delta_{11}+\delta_{12})$,
[공정 2]에서 $\delta_{20}=0, \delta_{23}=(\delta_{21}+\delta_{22})$
- γ_1 지시변수(이상원인을 조사하는 동안 공정이 멈추면 0, 아니면1)
- γ_2 지시변수(공정을 수리하는 동안 공정이 멈추면 0, 아니면1)

비용모수(cost parameters)

- a 고정 샘플링비용
- b 단위당 가변 샘플링비용
- C_0 관리상태에서 시간당 소요되는 비용
- C_1 이상상태에서 시간당 소요되는 비용
- Y 오류신호 한 건당 비용
- W 이상원인의 조사 및 제거 비용

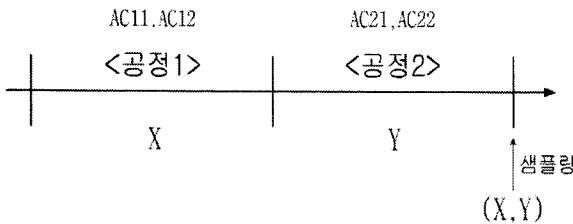
시간모수(time parameters)

- T_0 오정보 조사에 소요되는 평균시간
- T_1 이상원인에 대한 평균 조사시간
- T_2 이상원인 제거에 소요되는 평균시간
- e 하나의 관측치를 샘플링하고 검사 및 기록하는데 소요되는 평균시간

통계량(statistics)

- ATC 공정시작부터 이상신호가 발생까지의 평균 주기
- ATS_0 관리상태에서 신호발생까지 평균시간
- $AATS_\delta$ 첫 번째 이상원인 발생시점부터 이상신호 발생까지의 평균 소요시간
- ANS_{cycle} 공정시작부터 이상신호가 발생하기까지 평균 샘플링 회수($ANS_0 + ANS_\delta$)
- ANS_0 관리상태에서의 평균 샘플링 회수
- ANS_δ 이상상태에서의 평균 샘플링 회수
- ANL_{cycle} 공정시작부터 이상신호 발생까지의 평균 관측치 수($ANL_0 + ANL_\delta$)
- ANL_0 관리상태에서의 평균 관측치 수
- ANL_δ 이상상태에서의 평균 관측치 수
- b** 초기상태 확률벡터
- α 오류신호발생확률 $(1 - (2\Phi(k) - 1)^2)$

원인선별 관리도는 선행 공정의 품질변수가 후행 공정의 품질변수에 영향을 미치는 경우에, 어느 공정에서 이상원인이 발생하는지 판별하기 위한 관리도이다. 본 연구에서는 종속적인 2단계 공정을 이상원인 AC_{11} , AC_{12} 가 존재하는 [공정1]과 이상원인 AC_{21} , AC_{22} 가 존재하는 [공정2]로 구분한다. [공정1]의 품질특성변수를 X , [공정2]의 품질특성변수를 Y 라 하면 하나의 표본은 (X_i, Y_i) 로 나타낼 수 있다. <그림 1>은 공정단계별로 두 개의 이상원인이 존재하는 품질특성변수 (X, Y) 에 대한 2단계 공정을 나타낸다.



<그림 1> 종속적인 2단계 공정

[공정1]이 관리상태일 때 X 는 평균이 μ_X , 표준편차가 σ_X 인 정규분포를 따르고, [공정2]의 품질특성변수 Y 또한 전 공정단계인 [공정1]의 품질특성변수 X 에 영향을 받으며, 정규분포를 따른다고 가정한다. X 와 Y 의 관계식은 일반적으로 다음과 같이 표현된다.

$$Y|X = f(X) + \epsilon \tag{1}$$

단, 오차항 ϵ 은 [공정2]가 관리상태일 때 평균이 0, 분산이 σ_ϵ^2 인 독립적 정규분포를 따른다.

[공정1]을 관리하기 위하여 X 에 대한 관리도를 직접 사용하는 것은 타당하나, [공정2]에서 Y 에 대한 관리도를 직접 사용하는 것은 부정확하거나 효율성이 떨어질 수 있다[Wade and Woodal, 1993]. [공정2]의 올바른 관리를 위해 Y 에 대한 X 의 영향을 고려하여 그 품질특성치를 잔차 $e = Y|X - \hat{Y}|X$ 로 나타낸다. 이때 $\hat{Y}|X$ 는 (X, Y) 에 대한 공정의 과거 데이터를 통해 최소제곱오차 방법을 사용하여 도출한 관계모형이다. 이와 같이 원인선별 VSSI 관리도를 설계할 때 품질특성변수 X 와 e 를 사용한다.

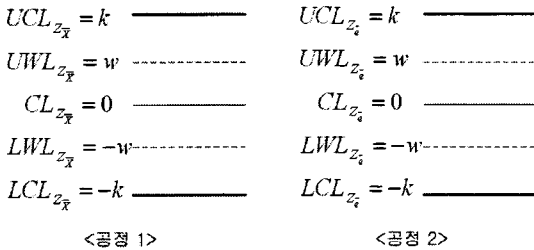
본 연구는 다음과 같이 가정을 기초로 한다.

- ① 공정은 관리상태에서 시작되고, 이상원인의 발생은 공정평균을 변화시킨다.
- ② 각 이상원인은 독립적으로 발생하고, 이상원인의 발생시간은 지수분포를 따르며 한 번 발생한 이상원인은 반복하여 발생하지 않는다.
- ③ 각 공정단계별로 두 개의 이상원인을 고려하며, 이들이 모두 발생하면 공정평균의 이동이 증폭된다. 즉, [공정1]의 증폭된 공정평균 이동은 AC_{11} 에 의한 δ_{11} 과 AC_{12} 에 의한 δ_{12} 의 합 $\delta_{13} = \delta_{11} + \delta_{12}$ 로 나타내고, [공정2]도 또한 $\delta_{23} = \delta_{21} + \delta_{22}$ 이다. <표 1>은 공정단계별 2개의 이상원인을 고려할 때 이상원인 발생 유무에 따른 X 와 e 의 평균변화를 나타낸다.

<표 1> 이상원인 발생유무에 따른 X 와 e 의 평균변화(공정단계별 2개의 이상원인)

[공정1]		[공정2]			
이상원인 발생유무	X 의 평균	이상원인 발생유무		e 의 평균	
		AC_{21}	AC_{22}		
AC_{11}	AC_{12}	AC_{21}	AC_{22}		
×	×	μ_X	×	×	0
○	×	$\mu_X + \delta_{11}\sigma_X$	○	×	$\delta_{21}\sigma_\epsilon$
×	○	$\mu_X + \delta_{12}\sigma_X$	×	○	$\delta_{22}\sigma_\epsilon$
○	○	$\mu_X + \delta_{13}\sigma_X$	○	○	$\delta_{23}\sigma_\epsilon$

VSSI 방법을 적용하여 관리도를 운영하기 위해 공정으로부터 표본 (\bar{X}_i, \bar{Y}_i) 를 하나의 쌍으로 샘플링하고, $\hat{Y}|X$ 을 이용하여 (\bar{X}_i, \bar{e}_i) 를 구한다. 또한 이들은 $Z_{\bar{X}} = (\bar{X} - \mu_X) \sqrt{n_j} / \sigma_X$, $Z_{\bar{e}} = \bar{e} \sqrt{n_j} / \sigma_e$ 으로 표준화할 수 있다. 여기서 [공정1], [공정2]가 모두 관리상태일 때 $Z_{\bar{X}} \sim N(0,1)$, $Z_{\bar{e}} \sim N(0,1)$ 이다. $Z_{\bar{X}}$ 와 $Z_{\bar{e}}$ 는 공통의 임계한계 및 관리한계($\pm w, \pm k$)를 갖는 VSSI 원인선별 관리도에 타점된다.



<그림 2> VSSI 원인선별 관리도의 형태

샘플링 시 다음 표본의 크기 및 샘플링간격은 현재 표본의 타점위치에 따라 정해지고, 타점영역은 다음과 같이 구분된다.

$$\begin{aligned}
 I_1 &= [-w, w] \\
 I_2 &= [-k, -w) \cup (w, k] \\
 I_3 &= [-k, k] = I_1 \cup I_2 \\
 I_4 &= (-\infty, -k) \cup (k, \infty)
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

공정의 초기상태는 정상상태로 가정하며 첫 표본크기는 랜덤하게 선택된다. 표본통계량 $(Z_{\bar{X}}, Z_{\bar{e}})$ 가 (I_1, I_1) 영역에 타점되면 다음 표본은 최대샘플링간격 h_3 후에 최소표본크기 n_1 개를 샘플링 한다. 만약 (I_1, I_2) 영역 또는 (I_2, I_1) 영역에 타점되면 다음 표본을 중간샘플링간격 h_2 후에 중간표본크기 n_2 만큼 샘플링하고, (I_2, I_2) 영역에 타점되면 다음 표본을 최소샘플링간격 h_1 후에 최대표본크기 n_3 만큼 샘플링 한다. 식(3)은 현재 표본 통계량의 타점위치와 다음 표본의 샘플링간격 및 표본 크기 사이의 관계를 나타낸다.

$$(N_i, H_i) = \begin{cases} (n_1, h_3) & \text{if } Z_{\bar{X},i-1} \in I_1 \cap Z_{\bar{e},i-1} \in I_1 \\ (n_2, h_2) & \text{if } (Z_{\bar{X},i-1} \in I_1 \cap Z_{\bar{e},i-1} \in I_2) \\ & \text{or } (Z_{\bar{X},i-1} \in I_2 \cap Z_{\bar{e},i-1} \in I_1) \\ (n_3, h_1) & \text{if } Z_{\bar{X},i-1} \in I_2 \cap Z_{\bar{e},i-1} \in I_2 \end{cases}
 \tag{3}$$

3. 두 개의 이상원인을 고려한 VSSI 원인선별 관리도의 경제적-통계적 설계

관리도를 통계적 기준만으로 설계한다면 바람직한 통계적 특성을 만족시킬 수 있지만 운영비용이 높아질 수 있다는 단점이 있다. Duncan(1956)은 공정관리에 소요되는 총 비용을 낮추기 위한 경제적인 기준을 고려하였고, 그 이후에도 많은 경제적 설계 연구가 수행되었다. Lorenzen and Vance(1986)는 공정운영의 선택 사항 및 표기법등을 통합하여 포괄적인 접근 방법을 제시하였다.

Woodall(1986)은 경제적 모형에서는 최소의 운영비용이 소요되도록 관리도를 설계할 수는 있지만 통계적인 속성이 무시되어 오류신호발생의 증가와 같은 문제가 생길 수 있다고 지적하였고, Prabhu et al.(1997)은 이러한 문제를 해결하기 위해 관리상태와 이상상태에서의 ATS(Average Time to Signal)에 제약을 추가하였다. 이를 순수한 경제적 설계와 비교해 봤을 때 ATS 제약 추가로 인하여 비용이 더 소요될 수 있으나, 이 손실비용은 오류신호발생 감소와 공정평균이동의 빠른 감지로 인한 이익보다 작다고 할 수 있다.

따라서 본 연구에서는 Lorenzen and Vance(1986)의 경제적 모형에 통계적 제약을 추가한 경제적-통계적 설계 모형을 사용한다.

3.1 AATS₀의 계산

통계적 성능지표인 AATS(Adjusted Average Time to Signal)를 구하기 전에 우선 마코프체인을 이용한 ATC(Average Time of a Cycle)를 계산해야 한다.

ATC 계산을 위한 마코프 체인의 상태를 <표 2>와 같이 정의할 수 있다. 각각의 상태는 이상원인 발생유무에 따라 16개의 상태로 구분되고, 이는 다시 표본통계량의 타점영역에 따라 4개의 상태로 나누어진다. 이들의 조합으로 16×4=64개의 과도상태(transient state)와 표본통계량 $Z_{\bar{X}}$ 또는 $Z_{\bar{e}}$ 가 관리한계를 벗어나는 하나의 흡수상태(absorbing state)를 정의할 수 있다.

마코프체인의 특성을 이용하여 ATC는 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$ATC = \mathbf{b}^T(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{h} \quad (4)$$

단, \mathbf{Q} 는 흡수상태를 제외한 전이확률 행렬을 나타내며, \mathbf{b} 는 초기상태 확률벡터로서 관리상태(상태 1, 17, 33, 49)의 정상(stationary) 확률로 계산한다.

$$\mathbf{b} = [b_1, 0, \dots, 0, b_{17}, 0, \dots, 0, b_{33}, 0, \dots, 0, b_{49}, 0, \dots, 0]^T \quad (5)$$

$$b_1 = \pi_1^2, \quad b_{17} = b_{33} = \pi_1\pi_2, \quad b_{49} = \pi_2^2$$

$$\pi_1 = P[Z \in I_1 | \sum \delta_{ij} = 0] / P[Z \in I_3 | \sum \delta_{ij} = 0] \quad (6)$$

$$\pi_2 = P[Z \in I_2 | \sum \delta_{ij} = 0] / P[Z \in I_3 | \sum \delta_{ij} = 0]$$

또한 \mathbf{I} 는 64×64 의 단위행렬이고, \mathbf{h} 는 샘플링간격 벡터로 상태 1~16은 h_3 , 상태 17~48은 h_2 , 상태 49~64는 h_1 을 사용한다.

$$\mathbf{h} = [h_3, \dots, h_3, h_2, \dots, h_2, h_1, \dots, h_1]^T \quad (7)$$

전이행렬 \mathbf{Q} 는 각 공정에서의 타점 영역에 따라 식(8)과 같이 부분행렬로 나누어 표현할 수 있다.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{1,11} & \mathbf{R}_{1,12} & \mathbf{R}_{1,21} & \mathbf{R}_{1,22} \\ \mathbf{R}_{2,11} & \mathbf{R}_{2,12} & \mathbf{R}_{2,21} & \mathbf{R}_{2,22} \\ \mathbf{R}_{3,11} & \mathbf{R}_{3,12} & \mathbf{R}_{3,21} & \mathbf{R}_{3,22} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\mathbf{R}_{l,mn} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{00,l,mn} & \mathbf{M}_{01,l,mn} & \mathbf{M}_{02,l,mn} & \mathbf{M}_{03,l,mn} \\ 0 & \mathbf{M}_{11,l,mn} & 0 & \mathbf{M}_{13,l,mn} \\ 0 & 0 & \mathbf{M}_{22,l,mn} & \mathbf{M}_{23,l,mn} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{M}_{33,l,mn} \end{bmatrix}$$

($l=1,2,3, m=1,2, n=1,2$)

상태 $i \rightarrow j$ 의 전이행렬 \mathbf{Q} 는 이전상태 i 의 표본크기, 샘플링간격 (n_i, h_{4-i})과 현재상태 j 의 타점영역 (I_m, I_n)에 따라 부분행렬 $\mathbf{R}_{l,mn}$ 으로 나눌 수 있고, 또한 $\mathbf{R}_{l,mn}$ 은 <표 3>에 따라 부분행렬 $\mathbf{M}_{uv,l,mn}$ 으로 나누어 표현이 가능하다. $\mathbf{M}_{uv,l,mn}$ 의 세부적인 계산은 부록에 정리한다.

상태 i 에서 j 로의 전이확률을 $p_{i,j}(n_i, h_{4-i})$ 로 나타낸다($i, j=1, \dots, 64, l=1, 2, 3$). 이때(n_i, h_{4-i})은 상태 i 에 의해 결정된다. 예를 들어, 식(9)는 상태 2에서 상태 22로 전이할 확률이다.

<표 2> 마코프체인의 상태정의

상태 번호	이상원인 발생유무				타점 영역		상태 번호	이상원인 발생유무				타점 영역	
	공정1		공정2		공정 1	공정 2		공정1		공정2		공정 1	공정 2
	AC	AC	AC	AC				AC	AC	AC	AC		
1	×	×	×	×	I ₁	I ₁	33	×	×	×	×	I ₂	I ₁
2	×	×	○	×			34	×	×	○	×		
3	×	×	×	○			35	×	×	×	○		
4	×	×	○	○			36	×	×	○	○		
5	○	×	×	×			37	○	×	×	×		
6	○	×	○	×			38	○	×	○	×		
7	○	×	×	○			39	○	×	×	○		
8	○	×	○	○			40	○	×	○	○		
9	×	○	×	×			41	×	○	×	×		
10	×	○	○	×			42	×	○	○	×		
11	×	○	×	○			43	×	○	×	○		
12	×	○	○	○			44	×	○	○	○		
13	○	○	×	×			45	○	○	×	×		
14	○	○	○	×			46	○	○	○	×		
15	○	○	×	○			47	○	○	×	○		
16	○	○	○	○			48	○	○	○	○		
17	×	×	×	×	I ₁	I ₂	49	×	×	×	×	I ₂	I ₂
18	×	×	○	×			50	×	×	○	×		
19	×	×	×	○			51	×	×	×	○		
20	×	×	○	○			52	×	×	○	○		
21	○	×	×	×			53	○	×	×	×		
22	○	×	○	×			54	○	×	○	×		
23	○	×	×	○			55	○	×	×	○		
24	○	×	○	○			56	○	×	○	○		
25	×	○	×	×			57	×	○	×	×		
26	×	○	○	×			58	×	○	○	×		
27	×	○	×	○			59	×	○	×	○		
28	×	○	○	○			60	×	○	○	○		
29	○	○	×	×			61	○	○	×	×		
30	○	○	○	×			62	○	○	○	×		
31	○	○	×	○			63	○	○	×	○		
32	○	○	○	○			64	○	○	○	○		

○: 이상원인 발생
×: 발생하지 않음

65 표본통계량 $Z_{\bar{x}}$ 또는 Z_c 가 I_1 영역에 타점 (흡수상태)

<표 3> 부분행렬 $M_{uv,lmn}$ 의 구분

[공정1]의 상태 _i 에서 이상원인 발생유류			[공정2]의 상태 _j 에서 이상원인 발생유류		
AC_{11}	AC_{12}	u	AC_{21}	AC_{22}	v
×	×	0	×	×	0
○	×	1	○	×	1
×	○	2	×	○	2
○	○	3	○	○	3

$$\begin{aligned}
 & p_{2,22}(n_1, h_3) \\
 &= (1 - e^{-\lambda_{11}h_3})(e^{-\lambda_{12}h_3})(e^{-\lambda_{22}h_3}) \\
 & \quad \times P[Z_{\bar{X}} \in I_1 | \delta_{11}] P[Z_e \in I_2 | \delta_{21}] \\
 &= (1 - e^{-\lambda_{11}h_3})(e^{-\lambda_{12}h_3})(e^{-\lambda_{22}h_3}) \\
 & \quad \times (\Phi(w - \delta_{11}\sqrt{n_1}) - \Phi(-w - \delta_{11}\sqrt{n_1})) \\
 & \quad \times (\Phi(k - \delta_{21}\sqrt{n_1}) - \Phi(w - \delta_{21}\sqrt{n_1})) \\
 & \quad + \Phi(-w - \delta_{21}\sqrt{n_1}) - \Phi(-k - \delta_{21}\sqrt{n_1})
 \end{aligned} \tag{9}$$

이상원인 AC_{ij} 의 발생시간이 T_{ij} 이라 할 때 모든 $T_{ij} \sim \exp(\lambda_{ij})$ 이며 각각의 T_{ij} 는 서로 독립이다. 공정 시작부터 첫 이상원인의 발생까지 시간 T 는 $T \sim \exp(\lambda_{11} + \lambda_{12} + \lambda_{21} + \lambda_{22})$ 이다. 그러므로 $AATS_0$ 식은 다음과 같이 표현된다.

$$AATS_0 = ATC - E(T) = ATC - 1/\Lambda \tag{10}$$

VSSI 원인선별 관리도의 통계적 성능을 평가할 때 관리상태에서의 기대 표본크기와 샘플링간격이 FSSI 관리도의 n_0 및 h_0 와 같아지도록 다음과 같은 제약을 부과한다.

$$E[N | \sum_{i,j} \delta_{ij} = 0; |Z_{\bar{X}}| < k; |Z_e| < k] = n_0 \tag{11}$$

$$E[H | \sum_{i,j} \delta_{ij} = 0; |Z_{\bar{X}}| < k; |Z_e| < k] = h_0 \tag{12}$$

Yang and Su(2007)로부터 식 (11)과 (12)를 통해 다음과 같이 h_3 를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 h_3 = & [-4\Phi(w)^2(-2h_2 + h_1) \\
 & - 4\Phi(w)(2\Phi(k)h_2 + h_2 - 2\Phi(k)h_1) \\
 & + h_0(2\Phi(k) - 1)^2 + 4\Phi(k)h_2 - 4\Phi(k)^2h_1] \\
 & / [4\Phi(w)^2 - 4\Phi(w) + 1]
 \end{aligned} \tag{13}$$

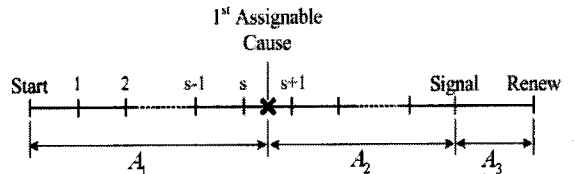
3.2 기대 주기시간

<그림 3>에 나타난 바와 같이 Lorenzen and Vance

(1986) 모형에 기초한 기대 주기(cycle)는 다음과 같이 구성된다.

$$E[T_{cycle}] = E[A_1 + A_2 + A_3] \tag{14}$$

- ① 관리상태 지속시간(A_1)
- ② 이상원인 방치시간(A_2)
- ③ 이상원인 탐색 및 제거시간(A_3)



<그림 3> 공정의 기대주기

관리상태 지속시간은 지수분포의 기대값 $1/\Lambda$ 에 오류신호 발생 시 공정이 정지하는 경우 이상원인 조사시간이 추가될 수 있으므로 다음과 같다.

$$E[A_1] = 1/\Lambda + (1 - \gamma_1) T_0 E[FA] \tag{15}$$

단, $E[FA]$ 는 평균 오류신호 발생횟수로 다음과 같다.

$$E[FA] = \alpha ANS_0 \tag{16}$$

$$ANS_0 = \mathbf{b}^T (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{u} \tag{17}$$

단, \mathbf{u} 는 1,17,33,49번째 행 원소가 1이고, 나머지 원소는 0인 64×1 행렬이다.

이상원인 방치시간은 이상원인 발생시점부터 이상신호 발생까지의 소요시간으로 다음과 같다.

$$E[A_2] = AATS_0 \tag{18}$$

ATC를 사용하여 공정시작부터 이상신호 발생까지의 시간을 다음과 같이 간단히 나타낼 수 있다.

$$E[A_1] + E[A_2] = ATC + (1 - \gamma_1) T_0 E[FA] \tag{19}$$

이상원인 탐색 및 제거시간에는 마지막 표본의 분석 시간과 이상원인의 조사시간 및 제거시간 등이 포함되므로 다음과 같이 나타낸다.

$$E[A_3] = e E_0[N] + T_1 + T_2 \tag{20}$$

단, $E_0[N] = \frac{ANL_0}{ANS_0} = \frac{ANL_{cycle} - ANL_0}{ANS_{cycle} - ANS_0}$ 이다.

주기 당 평균 관측치수 및 평균 표본 수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} ANI_{cycle} &= \mathbf{b}^T(\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}\mathbf{n} \\ ANS_{cycle} &= \mathbf{b}^T(\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}\mathbf{1} \end{aligned} \quad (21)$$

단, \mathbf{n} 은 1~16행 원소가 n_1 , 17~48행 원소가 n_2 , 49~64행 원소가 n_3 인 64×1 행렬이고, $\mathbf{1}$ 은 모든 원소가 1인 64×1 행렬이다.

관리상태동안의 평균 관측치수는 다음과 같다.

$$ANI_0 = \mathbf{b}^T(\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}\mathbf{v} \quad (22)$$

단, \mathbf{v} 는 1행 원소가 n_1 , 17,33행 원소가 n_2 , 49행 원소가 n_3 이고, 나머지는 0인 64×1 행렬이다.

3.3 주기당 기대비용

Lorenzen and Vance(1986) 모형에 따라 주기당 기

대비용은 다음과 같이 구성할 수 있다.

$$E[C_{cycle}] = B_1 + B_2 + B_3 + W \quad (23)$$

- ① 공정운영비용(B_1)
- ② 샘플링 비용(B_2)
- ③ 오류신호 비용(B_3)
- ④ 이상원인 조치비용(W)

공정운영비용은 관리상태와 이상상태로 구분하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$B_1 = C_0/\lambda + C_1(E[A_2] + E[A'_3]) \quad (24)$$

단, $E[A'_3] = eE_0[N] + \gamma_1 T_1 + \gamma_2 T_2$.

샘플링비용 또한 관리상태와 이상상태로 구분하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

<표 4> 다양한 관리도의 $AATS_0$ 비교 ($(h_1, h_2) = (0.01, 0.7)$)

n_1	n_2	n_3	h_3	w	δ_{11}	0.25	0.25	0.25	0.25	0.75	0.75	0.75	0.75
					δ_{12}	0.75	0.75	1.25	1.25	0.75	0.75	1.25	1.25
					δ_{21}	0.25	0.75	0.25	0.75	0.25	0.75	0.25	0.75
					δ_{22}	0.50	0.50	1.00	1.00	0.50	0.50	1.00	1.00
1	2	15	2.59	0.67	VSI	9.39	6.64	4.95	3.34	7.13	5.13	3.64	2.47
					VSS	8.63	6.13	5.30	3.50	6.49	4.70	3.85	2.58
					VSSI	8.18	5.78	5.37	3.51	6.12	4.40	3.88	2.58
1	2	20	2.01	0.79	VSI	9.54	6.73	4.88	3.30	7.27	5.21	3.60	2.44
					VSS	8.38	5.98	5.53	3.67	6.32	4.60	4.04	2.73
					VSSI	8.08	5.70	5.42	3.56	6.07	4.37	3.94	2.62
1	2	25	1.76	0.87	VSI	9.68	6.83	4.88	3.32	7.39	5.30	3.61	2.46
					VSS	8.37	6.02	5.77	3.89	6.37	4.68	4.28	2.95
					VSSI	8.13	5.78	5.54	3.70	6.17	4.47	4.08	2.76
1	2	30	1.61	0.93	VSI	9.79	6.91	4.88	3.34	7.49	5.38	3.63	2.48
					VSS	8.48	6.16	5.98	4.12	6.53	4.85	4.51	3.17
					VSSI	8.26	5.92	5.67	3.86	6.34	4.64	4.24	2.93
2	3	15	2.08	0.77	VSI	9.52	6.72	4.89	3.30	7.24	5.20	3.60	2.44
					VSS	8.79	6.23	5.21	3.44	6.61	4.78	3.79	2.54
					VSSI	7.98	5.54	4.99	3.15	5.87	4.14	3.51	2.22
2	3	20	1.72	0.88	VSI	9.70	6.85	4.88	3.32	7.41	5.32	3.61	2.47
					VSS	8.49	6.03	5.36	3.53	6.38	4.62	3.90	2.61
					VSSI	7.86	5.45	5.03	3.18	5.81	4.09	3.56	2.25
2	3	25	1.55	0.96	VSI	9.84	6.95	4.89	3.35	7.54	5.42	3.64	2.50
					VSS	8.42	6.01	5.50	3.66	6.36	4.63	4.04	2.74
					VSSI	7.87	5.48	5.11	3.28	5.86	4.14	3.65	2.35
2	3	30	1.45	1.03	VSI	9.95	7.04	4.90	3.38	7.64	5.50	3.66	2.53
					VSS	8.47	6.07	5.63	3.81	6.45	4.73	4.18	2.88
					VSSI	7.94	5.56	5.19	3.39	5.97	4.25	3.76	2.46
FSSI ($n_0 = 5, h_0 = 1, k = 3$)						12.01	8.63	5.54	4.14	9.48	7.00	4.43	3.37

$$B_2 = aANS_0 + bANI_0 + (a + bE_8[N])(ANS_5 + E[A'_3]/E_8[H]) \quad (25)$$

오류신호 비용은 다음과 같이 오류신호 발생횟수의 기댓값을 이용하여 구할 수 있다.

$$B_3 = E[FA]Y \quad (26)$$

단위시간당 기대비용은 재생보상정리를 이용하여 주기 당 기대비용을 기대주기로 나누어 구하고, 이 비용 함수를 최소화하는 설계모수를 구한다.

$$E[C_{hr}] = E[C_{cycle}]/E[T_{cycle}] \quad (27)$$

4. 민감도 분석

본 연구에서는 $AATS_5$ 의 계산 및 주어진 비용함수의 최소화문제를 풀기 위해서 MATLAB 소프트웨어를 사용하였다.

먼저 VSSI 원인선별 관리도의 통계적 성능을 분석하기 위하여 $AATS_5$ 관점에서 FSSI, VSI, VSS 원인선별 관리도와 비교하였다. 각종 모수의 값은 Yang and Su(2007)의 모수와 동일하게 설정하였고, 각 이상원인의 발생률은 각각 $\lambda_{11}=0.03$, $\lambda_{12}=0.05$, $\lambda_{21}=0.04$, $\lambda_{22}=0.05$ 로 하였다.

<표 4>는 표준화된 평균이동 δ_{ij} 의 크기에 따른 VSSI 원인선별 관리도의 $AATS_5$ 결과를 FSSI, VSI, VSS 방법을 적용한 경우와 비교한 것이다. 이때 식(12)에 의하여 공정이 관리상태에 있을 때 모든 관리도의 ATS_0 값은 같아진다.

거의 모든 경우, 특히 평균의 이동 폭 δ_{ij} 가 크지 않은 경우에 VSSI 원인선별 관리도가 다른 관리도에 비해서 통계적 성능이 더 뛰어남을 알 수 있다. 또한 표본크기 n_1, n_2 와 샘플링간격 h_1, h_2 를 고정하였을 때, 최대표본크기 n_3 가 증가함에 따라 임계한계 w 는 증가하고, 최대샘플링간격 h_3 는 감소하는 것으로 나타났다.

다음으로 단위시간당 비용을 기준으로 하여 FSSI 원인선별 관리도와 VSSI원인선별 관리도의 경제적-통계적 성능을 비교하였다. 실험에 사용된 공정 및 비용모수를 <표 5>에 나타내었으며, 다음과 같은 최적화 문제를 설정하였다.

<표 5> 공정 및 비용모수

고정	λ_{11}	λ_{21}	δ_{11}	δ_{21}	Y	W		
	0.03	0.03	1.0	1.0	200	300		
	e	T_0	T_1	T_2	γ_1	γ_2		
	0.275	5.5	3.5	8	1	0		
	C_0	C_1	a	b	λ_{12}	λ_{22}	δ_{12}	δ_{22}
1	100	300	3	1	0.01	0.01	0.5	1.25
2	100	300	3	1	0.05	0.01	0.5	0.75
3	100	300	3	2	0.01	0.01	1	0.75
4	100	300	3	2	0.05	0.01	1	1.25
5	100	300	5	1	0.01	0.05	0.5	0.75
6	100	300	5	1	0.05	0.05	0.5	1.25
7	100	300	5	2	0.01	0.05	1	1.25
8	100	300	5	2	0.05	0.05	1	0.75
9	100	500	3	1	0.01	0.05	1	0.75
10	100	500	3	1	0.05	0.05	1	1.25
11	100	500	3	2	0.01	0.05	0.5	1.25
12	100	500	3	2	0.05	0.05	0.5	0.75
13	100	500	5	1	0.01	0.01	1	1.25
14	100	500	5	1	0.05	0.01	1	0.75
15	100	500	5	2	0.01	0.01	0.5	0.75
16	100	500	5	2	0.05	0.01	0.5	1.25
17	200	300	3	1	0.01	0.05	1	1.25
18	200	300	3	1	0.05	0.05	1	0.75
19	200	300	3	2	0.01	0.05	0.5	0.75
20	200	300	3	2	0.05	0.05	0.5	1.25
21	200	300	5	1	0.01	0.01	1	0.75
22	200	300	5	1	0.05	0.01	1	1.25
23	200	300	5	2	0.01	0.01	0.5	1.25
24	200	300	5	2	0.05	0.01	0.5	0.75
25	200	500	3	1	0.01	0.01	0.5	0.75
26	200	500	3	1	0.05	0.01	0.5	1.25
27	200	500	3	2	0.01	0.01	1	1.25
28	200	500	3	2	0.05	0.01	1	0.75
29	200	500	5	1	0.01	0.05	0.5	1.25
30	200	500	5	1	0.05	0.05	0.5	0.75
31	200	500	5	2	0.01	0.05	1	0.75
32	200	500	5	2	0.05	0.05	1	1.25

$$\begin{aligned} & \text{Min } E[C_{hr}] \\ & \text{sub. to. } ATS_0 \geq 500, \\ & \quad \quad \quad AATS_5 \leq 8 \end{aligned} \quad (28)$$

<표 6>은 FSSI 원인선별 관리도와 VSSI 원인선별 관리도의 최적 설계모수 및 단위 시간당 최소 기대 비용을 나타낸다. <그림 4>는 FSSI 원인선별 관리도에 대한 VSSI 원인선별 관리도의 단위시간당 비용 감소율을 나타낸다. <그림 5>는 FSSI 및 VSSI 원인선별 관리도의 최소비용 산출시의 $AATS_5$ 결과를 비교한 것이

<표 6> FSSI 관리도와 VSSI 관리도의 경제적-통계적 성능 비교
 ($0.1 \leq h_1 \leq h_2 \leq h_3, 1 \leq n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq 50$)

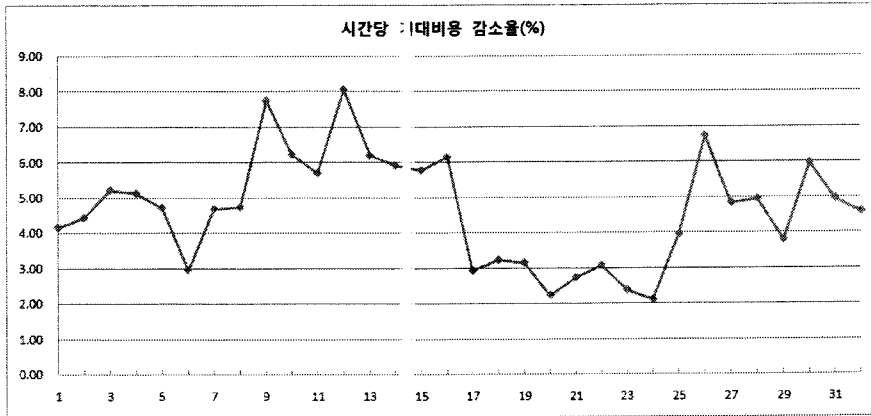
	FSSI($ATS_0^* = 500$)					VSSI($h_1^* = 0.1, h_2^* = 0.1, ATS_0^* = 500$)							
	n_0	h_0	k_0	$AATS_\delta$	C^*	n_1	n_2	n_3	h_3	w	k	$AATS_\delta$	C^*
1	9	0.9	3.32	2.39	147.6	7	7	7	1.5	1.31	3.29	1.99	141.5
2	13	1.0	3.30	3.68	168.4	3	7	28	1.0	1.09	3.46	2.76	160.9
3	10	1.4	3.20	2.03	148.8	7	7	7	1.9	1.31	3.23	1.55	141.0
4	9	1.1	3.27	1.76	151.9	7	7	7	1.5	1.39	3.26	1.23	144.1
5	11	0.9	3.33	2.44	159.0	9	9	9	1.5	1.27	3.29	1.83	151.5
6	9	0.9	3.33	3.12	163.0	7	7	7	1.3	1.40	3.30	2.92	158.1
7	8	1.1	3.27	1.74	149.9	6	6	6	1.5	1.37	3.27	1.31	142.9
8	10	1.1	3.27	2.21	161.3	8	8	8	1.6	1.35	3.26	1.62	153.7
9	10	0.5	3.50	1.59	220.7	1	2	24	0.3	1.06	3.73	1.29	203.5
10	7	0.3	3.58	1.20	213.5	1	1	16	0.2	0.98	3.77	0.98	200.2
11	8	0.7	3.39	1.78	216.3	1	8	15	0.3	1.65	3.61	1.62	204.0
12	12	0.8	3.36	3.12	257.0	1	2	36	0.3	1.11	3.70	2.26	236.2
13	8	0.6	3.44	1.29	195.0	6	6	7	1.1	1.21	3.39	0.95	182.9
14	9	0.5	3.47	1.30	213.2	7	7	7	1.0	1.24	3.41	1.04	200.5
15	10	1.0	3.30	2.53	216.4	8	8	8	1.5	1.29	3.28	2.00	203.9
16	12	1.0	3.29	3.80	252.1	1	1	29	0.6	0.91	3.61	2.88	236.6
17	8	0.8	3.34	1.46	180.8	6	6	6	1.3	1.33	3.33	1.13	175.5
18	10	0.8	3.36	1.85	184.3	7	7	7	1.3	1.20	3.35	1.66	178.3
19	11	1.4	3.19	3.14	195.0	9	9	9	2.1	1.36	3.18	2.29	188.8
20	9	1.3	3.21	3.58	192.1	6	7	7	1.6	1.50	3.23	3.35	187.8
21	10	1.3	3.22	1.93	189.2	8	8	8	1.8	1.42	3.21	1.31	184.0
22	9	1.0	3.30	1.64	183.7	7	7	7	1.4	1.38	3.28	1.18	178.0
23	10	1.9	3.10	3.06	194.6	7	7	7	2.3	1.42	3.14	2.66	190.0
24	13	1.9	3.10	4.76	203.4	11	11	11	2.6	1.41	3.11	3.94	199.1
25	10	0.7	3.40	2.14	251.9	8	8	9	1.2	1.24	3.36	1.72	242.0
26	12	0.7	3.41	3.32	275.7	1	2	39	0.3	1.08	3.71	2.15	257.2
27	9	0.9	3.31	1.45	244.5	6	6	7	1.4	1.24	3.32	1.14	232.6
28	9	0.7	3.37	1.63	252.8	7	7	7	1.2	1.29	3.34	1.20	240.3
29	8	0.6	3.44	1.63	247.5	6	6	6	1.0	1.28	3.39	1.47	238.1
30	12	0.6	3.43	2.82	277.4	1	3	37	0.3	1.11	3.69	2.02	260.8
31	10	0.8	3.35	2.17	262.8	8	8	8	1.4	1.22	3.32	1.58	249.7
32	8	0.7	3.40	1.38	250.1	6	6	6	1.1	1.29	3.37	1.12	238.6

다. 이것을 통해 공정단계별 두 개의 이상원인이 존재하는 2단계 공정에 대하여 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

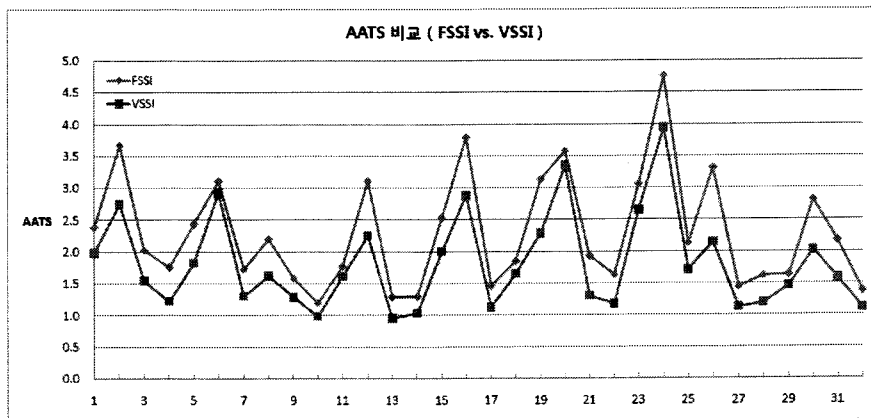
① 모든 경우에 대하여 VSSI 원인선별 관리도의 단

위시간당 기대비용이 FSSI 원인선별 관리도보다 작게 나타났다.

② VSSI 원인선별 관리도의 $AATS_\delta$ 가 FSSI 원인선별 관리도보다 작게 나타나므로, 이상상태에서 VSSI



<그림 4> FSSI 관리도에 대한 VSSI 관리도의 시간당 기대비용 감소율



<그림 5> FSSI 관리도와 VSSI 관리도의 AATS₀ 비교

원인선별 관리도가 FSSI 원인선별 관리도보다 빨리 이상원인을 탐지한다는 것을 알 수 있다.

- ③ 이상원인의 발생률이 상대적으로 크고, 공정평균의 이동 폭이 작은 경우에 VSSI 원인선별 관리도의 시간당 기대비용 감소율이 크게 나타났다.
- ④ 운영비용측면에서는 관리상태 운영비용이 작고, 이상상태 운영비용이 큰 경우에 VSSI 원인선별 관리도의 시간당 기대비용 감소율이 크게 나타났다.

5. 결 론

일반적으로 생산공정은 여러 중속적인 단계로 구성되고, 공정의 이상원인 또한 다중으로 존재한다. 하지만 대부분의 관리도 관련 연구에서는 단일 공정을 가정하거나, 연속공정을 대상으로 하더라도 단일 이상원인만을 가정하여 관리도를 설계하였다.

따라서 본 연구에서는 보다 현실적인 상황을 반영하기 위하여 단계별 두 개의 이상원인이 존재하는 연속공정에 대한 VSSI 원인선별 관리도의 경제적-통계적 설계절차를 제안하였다. VSSI 원인선별 관리도의 경제적-통계적 성능을 분석하기위해서 통계적 제약을 추가하여 단위시간당 최소비용을 구하였으며, VSSI 원인선별 관리도가 FSSI 원인선별 관리도보다 우수함을 보였다. 또한 AATS₀ 결과에 있어서도 VSSI 원인선별 관리도가 FSSI 원인선별 관리도보다 가 작게 나타났으므로 이것은 경제적 설계모형에서도 충분한 통계적 효율성을 가진다는 것을 의미한다.

참고문헌

[1] 임태진(2008), “적응형 관리도의 설계에 대한 비교 연구”, 『품질경영학회지』, 36권 1호, pp.7-19

부 록

[2] Costa, A.F.B.(1997), “ \bar{X} Charts with Variable Sample Size and Sampling Intervals”, *Journal of Quality Technology*, Vol. 29, No. 2, pp.197-204.

[3] Duncan, A.J.(1956), “Economic Design of \bar{X} Charts Used to Maintain Current Control of a Process”, *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 51(274), pp.228-242.

[4] Lee, H.J., Lim, T.J., and Jang, S.C(2007), “VSSI \bar{X} Control Charts for Processes With Multiple Assignable Causes”, Proceedings of the 2007 IEEE IEEM, pp.1241-1245.

[5] Lorenzen, T.J. and Vance, L.C.(1986), “The Economic Design of Control Charts: A Unified Approach”, *Technometrics*, Vol. 28, No. 3, pp. 3-10.

[6] Prabhu, S.S., Montgomery, D.C., and Runger, G.C.(1994), “A Combined Adaptive Sample Size and Sampling Interval \bar{X} Control Scheme”, *Journal of Quality Technology*, Vol.26, No.3, pp.164-176.

[7] Prabhu, S.S., Montgomery, D.C., and Runger, G.C.(1997), “Economic- Statistical Design of Adaptive \bar{X} Chart”, *International Journal of Production Economics*, Vol. 49, No. 1, pp.1-15.

[8] Wade, M.R. and Woodall, W.H.(1993), “A Review and Analysis of Cause-Selecting Control Charts”, *Journal of Quality Technology*, Vol.25, No.3, pp.161-169

[9] Woodall, W.H.(1986), “Weaknesses of the Economic Design of Control Charts”, *Technometrics*, Vol. 28, No. 4, pp.408-409

[10] Yang, S. and Su, H.(2007), “Adaptive control schemes for two dependent process steps”, *Journal of Loss Prevention in the Process Industries*, Vol. 20, pp.15-25.

[11] Zhang, G.X.(1984), “A New Type of Control Charts and a Theory of Diagnosis with Control Charts”, *World Quality Congress Transaction*, American Society for Quality Control, pp.175-185.

$M_{uv,l,mn}$ 는 4×4 행렬이며 다음과 같이 계산된다.

$$M_{uv,l,mn} = r_{uv}(t_{4-l}) q_1(\delta_{1v}, I_m, n_l) \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ 0 & p_{22} & 0 & p_{24} \\ 0 & 0 & p_{33} & p_{34} \\ 0 & 0 & 0 & p_{44} \end{bmatrix}$$

단,

$$\begin{aligned} r_{00}(t_{4-l}) &= e^{-\lambda_{11}t_{4-l}} \times e^{-\lambda_{12}t_{4-l}}, \\ r_{01}(t_{4-l}) &= (1 - e^{-\lambda_{11}t_{4-l}}) \times e^{-\lambda_{12}t_{4-l}}, \\ r_{02}(t_{4-l}) &= e^{-\lambda_{11}t_{4-l}} \times (1 - e^{-\lambda_{12}t_{4-l}}), \\ r_{03}(t_{4-l}) &= (1 - e^{-\lambda_{11}t_{4-l}}) \times (1 - e^{-\lambda_{12}t_{4-l}}), \\ r_{11}(t_{4-l}) &= e^{-\lambda_{12}t_{4-l}}, \quad r_{13}(t_{4-l}) = 1 - e^{-\lambda_{12}t_{4-l}}, \\ r_{22}(t_{4-l}) &= e^{-\lambda_{11}t_{4-l}}, \quad r_{23}(t_{4-l}) = 1 - e^{-\lambda_{11}t_{4-l}}, \\ r_{33}(t_{4-l}) &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_1(\delta_{1j}, I_1, n_l) &= P[Z_{\bar{X}} \in I_1 | \delta_{1j}] \\ &= \Phi(w - \delta_{1j}\sqrt{n_l}) - \Phi(-w - \delta_{1j}\sqrt{n_l}) \\ q_1(\delta_{1j}, I_2, n_l) &= P[Z_{\bar{X}} \in I_2 | \delta_{1j}] \\ &= \Phi(k - \delta_{1j}\sqrt{n_l}) - \Phi(w - \delta_{1j}\sqrt{n_l}) \\ &\quad + \Phi(-w - \delta_{1j}\sqrt{n_l}) - \Phi(-k - \delta_{1j}\sqrt{n_l}) \\ q_2(\delta_{2j}, I_1, n_l) &= P[Z_e \in I_1 | \delta_{2j}] \\ &= \Phi(w - \delta_{2j}\sqrt{n_l}) - \Phi(-w - \delta_{2j}\sqrt{n_l}) \\ q_2(\delta_{2j}, I_2, n_l) &= P[Z_e \in I_2 | \delta_{2j}] \\ &= \Phi(k - \delta_{2j}\sqrt{n_l}) - \Phi(w - \delta_{2j}\sqrt{n_l}) \\ &\quad + \Phi(-w - \delta_{2j}\sqrt{n_l}) - \Phi(-k - \delta_{2j}\sqrt{n_l}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{11} &= e^{-\lambda_{21}t_{4-l}} \times e^{-\lambda_{22}t_{4-l}} \times q_2(\delta_{20}, I_n, n_l), \\ p_{12} &= (1 - e^{-\lambda_{21}t_{4-l}}) \times e^{-\lambda_{22}t_{4-l}} \times q_2(\delta_{21}, I_n, n_l), \\ p_{13} &= e^{-\lambda_{21}t_{4-l}} \times (1 - e^{-\lambda_{22}t_{4-l}}) \times q_2(\delta_{22}, I_n, n_l), \\ p_{14} &= (1 - e^{-\lambda_{21}t_{4-l}}) \times (1 - e^{-\lambda_{22}t_{4-l}}) \times q_2(\delta_{23}, I_n, n_l), \\ p_{22} &= e^{-\lambda_{22}t_{4-l}} \times q_2(\delta_{21}, I_n, n_l), \\ p_{24} &= (1 - e^{-\lambda_{22}t_{4-l}}) \times q_2(\delta_{23}, I_n, n_l), \\ p_{33} &= e^{-\lambda_{21}t_{4-l}} \times q_2(\delta_{22}, I_n, n_l), \\ p_{34} &= (1 - e^{-\lambda_{21}t_{4-l}}) \times q_2(\delta_{23}, I_n, n_l), \\ p_{44} &= q_2(\delta_{23}, I_n, n_l) \end{aligned}$$