한국수학사학회지 제22권 제3호(2009년 8월), 187-206

역사 속의 진법과 유추를 통한 진법의 확장에 대한 연구

한국교육과정평가원 서보억
eukeuk@kice.re.kr

본 연구에서는 진법에 대한 역사적 흐름을 간략하게 살펴보고, 유추를 활용하여 진법 내용에 대한 수학탐구활동의 방향 탐색 및 교수학습 자료를 개발하였다. 중학교에서 학습하는 십진법과 이진법을 수학기초지식으로 하여 다양한 수학적인 사실들을 탐구하였다. 먼저, 대수적인 수학내용으로 유추적 사고활동을 어떻게 진행할 것인지에 대해 고찰하였다. 다음으로 중학교 1학년에서 학습하는 진법을 바탕으로 a진법, $-a$진법, $\frac{1}{a}$진법, $\sqrt{a}$진법의 정의를 유추를 활용하여 확장하였고, 이러한 진법의 정의를 바탕으로 자연수, 정수, 유리수를 다양한 진법으로 표현하는 방법에 대해 고찰하였다. 마지막으로 확장된 진법에서 덧셈과 곱셈 연산을 수행하는 방법을 개발하였다. 유추를 활용하여 얻은 자료를 통해 수학교육과정과 교수학습에 의미 있는 시사점을 주리라 기대한다.

주제어 : 진법, 유추, 진법의 확장, 대수, 학습자료

0. 서론

우리나라에서는 초・중・고등학교 학생들이 수학에 대한 관심도는 매우 높고, 수학을 잘하고자 하는 의지도 높은 편이다. 이러한 수학에 대한 높은 관심은 지난해 국제 학업성취도 평가에서 수학 과목의 경우 세계 2위를 차지하는 성과로 나타났다. 또한 이러한 높은 관심은 초등학교를 넘어 유치원과 영아와 유아에까지 이르고 있다. 이렇게 높은 관심을 보이는 수학교육의 출발점은 어디에 두는 것이 바람직할까? 이 물음에 대한 분명한 답은 국가에서 지정한 정규 수학 교육과정이어야 한다는 것이다. 실례를 보면, 2003년 이후 다양한 종류의 수학영재교육 프로그램이 제시되었고 그에 따른 교육이 학교현장에서 이루어지고 있지만, 사교육 시장의 팽창과 수업내용의 부실 및 상급학교 진학의 수단으로써의 수학영재교육 등과 같은 다양한 문제를 발생시키고 있다. 이러한 이유에 대해 우광식([15]), 김순심([9])은 그 문제의 발단을 학교 수학교육과정(또는 교과서)에 기초하지 않았기 때문이라고 지적하고 있다. 또한 서보억(2009)은 수학기초지식에 대한 조사 연구에서 국내 중학생들의 이러한 성향에 대한 연구 결과를 발표하였다.

그리고 수학교육에서 유추의 중요성은 폭넓게 제기되고 있다. 한인기와 에르든예프([20])는 '유추의 사용은 학습 자료를 깊이 이해할 수 있도록 도우며 지식들을 질적으로 새롭게 한다.'고 하면서 유추를 통해 학생들의 독자성과 자발성의 계발 및 육성에 중요한 역할을 한다고 하였고, Polya([28])는 수학적 발견에서 유추가 큰 역할을 한다고 강조하고 있다. 또한 이러한 유추를 효과적으로 진행하기 위해 수학의 역사 속에서 진법의 다양한 모습들을 살펴보는 것은 중요한 가치가 있다.

수학교육에서 유추를 활용한 수학탐구활동이나 학습자료 개발 및 진법의 역사에 대한 선행 연구를 보면 첫째, 유추를 활용한 도형의 성질 탐구에 대한 연구가 있었고([7], [18], [21]), 둘째, 유추를 이용한 개념의 확장이나 일반화에 대한 연구가 있었고([13], [22]), 셋째, 유추를 활용한 기하 학습자료 개발 연구가 있었고([23]), 넷째, 진법 단원을 수업하기 위한 수학사의 활용에 대한 연구가 있었다([17], [19]).

앞에서 언급한 것 같이 유추는 수학적 발견이나 지식의 확장에 중요한 역할을 하는데, 이러한 측면에서의 유추의 기능에 부합되는 수학탐구활동이나 교수학습 자료 개발에 대한 연구들이 대부분 기하 학습 내용을 중심으로 진행되었음을 알 수 있다. 우정호([16])는 유추가 모든 수학 학습에 매우 필요하고 강력한 사고 도구이며 수학 학습-지도의 기본 바탕이라고 보았는데, 유추와 관련된 수학탐구활동이나 교수학습 자료 개발 연구가 기하 영역에만 국한된 것은 개선될 필요가 있다. 따라서 기하 내용이 아닌 대수, 해석 내용을 바탕으로 유추를 활용한 수학탐구활동이 필요하다. 이러한 필요성에 의해서, 본 연구에서는 학교에서 학습하는 대수 내용인 진법을 수학기초지식으로 하여 유추를 활용한 수학탐구활동의 수행을 연구의 목적으로 설정하였다. 이러한 연구의 목적을 이루기 위해 본 연구에서는 역사 속에서 진법의 발달과정을 간략히 살펴보고, 대수 내용에 대한 유추를 활용한 수학탐구활동의 방향을 설정하고, 이러한 방향 설정을 바탕으로 진법의 확장에 대한 구체적인 수학탐구활동 및 교수학습 자료를 개발하였다.

1. 연구 절차 및 방법

본 연구는 유추를 활용한 대수 내용에 대한 학습 자료 개발 연구로 다음과 같은 절차에 의해 연구를 수행하였다.

첫째, 선행연구 및 사례 분석을 바탕으로 역사속의 진법의 다양한 유형을 살펴보고, 대수 내용에 대한 수학탐구활동의 방향을 설정하였다.

둘째, 대수 내용에 대한 수학탐구활동 수행을 위한 구체적인 소재를 선택하였다. 본 연구에서는 중학교 7-가 첫 단원에서 학습하는 대수 내용인 진법을 수학탐구활동의 소재로 선정하였다.

셋째, 설정된 탐구활동의 방향을 바탕으로 유추를 활용한 진법의 확장에 대한 수학

탐구활동을 수행하고, 다양한 수학 교수학습 자료를 개발하였다. 구체적인 방향설정으로 변수와 관련된 탐구활동, 수 집합과 관련된 탐구활동, 연산과 관련된 탐구활동을 수행하였다.

2. 역사속의 진법과 유추를 위한 수학탐구활동의 방향 설정

가. 역사속의 진법

거의 모든 수학은 인간의 부단한 노력과 인내를 통해 조금씩 개선되고 발전되어진 학문임을 수학사를 통해 알 수 있다. 이러한 이유 때문에 수학사는 수학뿐만 아니라 수학교육에서 매우 중요한 역할을 한다. 특히 수학사는 새로운 수학적 사실을 발전 및 확장에 있어서 기초적인 밑거름을 제공하고, 새로운 수학적 발견에 방향 설정에 중요한 실마리를 제공한다. 따라서 본 연구에서 진법의 확장을 위해 역사속의 진법을 간략하게 살펴보는 것은 의미가 있고, 이를 통해 새로운 진법의 세계로 확장해 나갈 수 있는 길을 열어줄 것으로 기대한다.

(1) 십진법의 사용

인간은 손가락 두 손을 써서 손가락 10개로 열 개까지의 집합을 셀 수 있다. 이에 대해 아리스토텔레스는 인간이 10진법을 널리 사용하는 것은 인간이 열 개의 손가락과 열 개의 발가락을 갖고 태어나는 생물학적인 결과라고 하였다([25]). 최초로 10진법을 발전시킨 곳은 중국과 이집트로 알려져 있다. 한자의 십(十), 백(百), 천(千), 만(萬) 등은 십진법의 형태를 지니고 있고, 영어에서도 11을 나타내는 'eleven' 이 10위의 1이라는 뜻을 가진 것도, 'hundred' 가 원래 '열배' 라는 뜻을 가진 것도 십진법이 역사 속에서 얼마나 일찍 사용되었는지 보여주는 증거이다.

(2) 오진법의 사용

인간은 자신의 손과 발을 관찰하면서 생긴 5의 배수라는 양에 매우 친숙하였을 것으로 추측된다. 이러한 이유로 인하여 김군찬([8])은 가장 널리 사용된 첫 번째 수체계로 5진법을 지목하였다. 실제로 로마 숫자 Ⅴ와 Ⅵ을 보면 6의 경우 Ⅰ과 Ⅴ를 합성한 것으로 보이고, 남아메리카의 한 종족은 손으로 셈을 하는 언어적 특징을 보이고 있고, 독일의 농부의 달력은 최근까지 5진법을 사용하였다고 한다([27]).

(3) 이진법, 사진법, 팔진법의 사용

이진법의 역사는 기원전 7세기 인도에서 비롯되었다는 주장이 있고, 지금도 일부 원주민은 이진법을 사용하고 있는 것으로 보인다([17]). 인도-게르만어에서 8을 뜻하는 것은 4를 두 개 겹친 꼴에서 만들어진 듯하다고 일컬어지고, 라틴어의 9는 새로운 수열의 처음을 뜻하는 것으로 보인다. 4진법 또는 8진법이 과거 어느 시점에 사용하

였음을 보여준다([25]).

(4) 십이진법, 이십진법, 육십진법의 사용

측량과 관련하여 12진법이 사용된 것으로 보인다. 일년이 12달이고, 12인치가 1피트이고, 12온스가 1파운드이고, 12펜스가 1실링이고, 시계가 12시간으로 구성되어져 있다. 양손과 양발을 이용하는 셈의 습관은 20진법을 만든 것으로 보인다. 고대 아메리카의 마야인과 미국의 인디언들이 20을 한 묶음으로 세었고, 우리나라에서도 오징어 1축을 20마리, 한약 1재를 20첩으로 사용하는 것은 20진법의 수 체계의 흔적으로 보인다. 60진법은 고대 바빌로니아인들이 사용한 것으로 추측되고 있으며, 각의 크기를 360분법으로 하고, 1분을 60초로 계산하고, 60갑자의 60도 60진법의 흔적으로 보인다.

이상과 같이 역사 속에서 진법은 다양한 형태로 존재하였고, 지금도 우리의 생활속에서 부분적으로나마 밀접한 영향을 미치고 있다. 10진법이 우리의 삶속에 보편화되기 이전에 2진법, 4진법, 5진법, 12진법, 20진법, 60진법 등이 존재하였음 알 수 있었다. 이제, 중학교 1학년에서 배우는 10진법과 2진법을 학교수학의 수학기초지식으로 하여 진법을 확장하는 것은 역사 속의 진법을 재조명하고 심화 발전시켜 보자.

나. 유추를 활용한 대수 내용에 대한 수학탐구활동의 방향 설정

구체적으로 진법을 확장하기 이전에, 여기서는 대수 내용인 진법을 바탕으로 유추를 활용한 다양한 수학탐구활동을 진행하기 위한 기본 방향을 설정한다. 지금까지의 선행연구로 볼 때, 유추를 활용한 교수학습 자료의 개발 및 수학 탐구활동은 기하 내용을 중심으로 폭넓게 진행되었다. 따라서 기하 내용 중심의 선행연구 분석을 바탕으로 대수 내용에 대한 유추를 활용한 수학 탐구 방법에 대한 방향을 다음과 같이 설정한다.

대수는 집합과 연산에 대한 수학분야이다. 현대대수 시간에 처음 접하게 되는 학습내용은 군(group)에 대한 개념이다. 대수의 기본인 군에 대해서, 주어진 집합(G)과 정의된 연산($*$)에서 성립하는 군이라는 의미에서 군을 $(G, *)$로 표현한다([10]). 따라서 대수 내용에 대한 탐구의 방향을 집합과 연산, 그리고 그에 따라 결정되어지는 연산법칙과 다양한 변수에 바탕을 삼아야 한다. 이에따라 구체적으로 다음 네 가지로 세분화하여 방향을 설정한다.

첫째, 대수에서 취급하는 변수와 관련하여 탐구 방향을 설정한다. 변수는 다가성을 지니고 있으므로 한 수만을 대표하지 않는다. 따라서 변숫값으로 여러 가지 값을 적용하는 활동으로 여러 가지 탐구 활동이 가능하다. 이를 통해 다양한 교수학습 자료 개발 연구를 수행한다.

둘째, 대수에서 다루는 수 집합과 관련하여 탐구 방향을 설정한다. 여기서는 자연수, 정수, 유리수, 실수 등으로 수의 범위를 확장하면서 유추를 활용한 탐구 활동이

가능할 뿐만 아니라 주어진 수 집합을 여러 가지 방법으로 분할 혹은 분류하는 탐구 활동도 가능하다.

셋째, 대수에서 정의되어진 연산과 관련하여 탐구 방향을 설정한다. 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈의 사칙계산 뿐 아니라 다양한 이항연산을 정의함으로써 여러 가지 탐구 활동이 가능하다.

넷째, 다양한 대수적 성질이나 규칙과 관련하여 탐구 방향을 설정한다. '닫혀있음, 결합법칙, 교환법칙, 항등원, 역원, 소인수, 소인수분해, 공약수, 공배수, 지수법칙, 대소관계' 등과 같은 수학적인 의미를 포함한 유추를 통해 여러 가지 탐구 활동이 가능하다.

3. 유추를 활용한 진법에 대한 수학탐구활동

앞에서 살펴본 것 같이 대수 내용에 대한 유추를 활용한 수학탐구활동의 방향을 네 가지로 설정하였다. 본 연구에서는 처음 세 가지 방법으로 유추를 활용한 진법에 대한 수학 탐구활동을 진행한다.

가. 변수와 관련된 수학탐구활동

중학교 1학년 자연수 단원에서 진법에 대한 내용을 학습한다. 교육과정에서 진법의 학습에서 가장 기초적인 수학지식은 십진법과 이진법에 대한 개념과 표현방법이다. 그런데 수학사에서 십진법의 역사만큼이나 삼진법, 십이진법, 오진법, 육십진법의 역사도 매우 길다. 실제로 Dresden([26])은 십진법을 기초로 하는 셈법보다는 삼진법을 기초로 한 셈법이 역사적으로 더 오래 전에 발생한 것으로 보고 있다. 이것에 대해 Boyer 등([25])은 당대에 어떤 진법을 사용하느냐는 그 사회의 문화적인 전통과 습관에 큰 영향을 받아왔기 때문이라고 설명하고 있다. 결국 진법 사용의 변화는 시대의 변화만큼 다양한 변화를 겪었고 앞으로도 그러한 가능성이 충분히 있다.

여기서 수를 표현하는 진법의 학습에서 변수를 하나 추출한다면 그것은 바로 a진법(단, a는 자연수)에서 a를 추출하는 것은 당연한 귀결이다. 또한 a를 변수로 추출하였을 경우 a를 보는 관점에 따라 다음 두 가지 방향으로 변수의 수학적인 다양성을 줄 수 있다. 하나는 중학교 1학년에서 학습하는 것처럼 a의 값을 자연수 2, 3, 4, 5, … 로 보는 것이다. 다른 하나는 변수로서 a를 자연수에 한정하지 않고 정수, 유리수, 실수 등으로 보는 것이다. 이러한 관점에서 진법과 관련된 탐구활동을 다음과 같이 진행한다.

(1) a진법으로 나타내기

현재 교육과정에서는 중학교 1학년 자연수 단원에서 십진법과 이진법에 대해 학습한다. 이를 수학기초지식으로 하여 유추를 사용하여 다음과 같은 탐구 활동을 한다.

(가) 진법의 정의에 대한 유추

배종수 등([12])은 중학교 1학년 교과서에서 이진법의 정의를 [정의1]과 같이 내리고 있다. 이것을 a진법으로 유추하면 [정의2]와 같다.

[정의1] (이진법의 정의)
자리가 하나씩 올라감에 따라 자리의 값이 2배씩 커지도록 정하여 수를 나타내는 방법이다. 다른 진법과

유추 $\Rightarrow$

[정의2] (a진법의 정의)
자리가 하나씩 올라감에 따라 자리의 값이 a배씩 커지도록 정하여 수를 나타내는 방법이다. 다른 진법과 구별하여 $1101_{(a)}$이라 쓴다.

(나) 진법의 전개식에 대한 유추

배종수 등([12])은 중학교 1학년 교과서에서 이진법의 전개식의 정의를 [정의3]과 같이 내리고 있다. 이것을 a진법으로 유추하면 [정의4]와 같다.

[정의3] (이진법의 전개식)
이진법으로 나타낸 수를 2의 거듭제곱을 써서 나타낸 식이다. 즉 $101_{(2)}=1\times2^2+0\times2+1\times1$ 을 이진법의 전개식이라고 한다.

유추 $\Rightarrow$

[정의4] (a진법의 전개식)
a진법으로 나타낸 수를 a의 거듭제곱을 써서 나타낸 식이다. 즉, $101_{(a)}=1\times a^2+0\times a+1\times1$ 을 이진법의 전개식이다.

(다) 십진법과 a진법 사이의 관계에 대한 유추

십진법과 이진법 사이의 관계와 십진법을 이진법으로 나타내기에 대한 학습을 중학교 1학년에서 한다. 특히 배종수 등([12])은 십진법을 이진법으로 나타내는 방법을 [명제1]과 같이 설명하고 있다. 이것을 a진법으로 유추하면 [명제2]와 같다.

[명제1] (십진법을 이진법으로 나타내기)
이진법은 십진법으로 나타낸 수를 몫이 0이 될 때까지 2로 계속 나누어서 나눗셈의 몫을 쓰고 나머지를 맨 나중의 것부터 차례대로 쓴다.

유추 $\Rightarrow$

[명제2] (십진법을 a진법으로 나타내기)
a진법은 십진법으로 나타낸 수를 몫이 0이 될 때까지 a로 계속 나누어서 나눗셈의 몫을 쓰고 나머지를 맨 나중의 것부터 차례대로 쓴다.

[문제1] 79를 3진법, 5진법, 7진법으로 나타내시오.

(풀이)

```
3)79
3)26  --- 1
3) 8  --- 2
3) 2  --- 2
   0  --- 2
```

```
5)79
5)15  --- 4
5) 3  --- 0
   0  --- 3
```

```
7)79
7)11  --- 2
7) 1  --- 4
   0  --- 1
```

3진법으로 고치면 $2221_{(3)}$이고, 5진법으로 고치면 $304_{(5)}$이고, 7진법으로 고치면 $142_{(7)}$이다.

지금까지 a진법에서 a의 값이 자연수인 자연수 진법에 대해서 살펴보았다. 이제 a의 값을 정수, 유리수, 실수로 확장하여 새로운 진법을 정의하여 보자.

(2) $-a$진법(음수 진법), $\frac{1}{a}$진법(역수 진법), $\sqrt{a}$진법(제곱근 진법)으로 나타내기

일반적으로 a진법이라고 할 때, a의 의미는 여러 가지 측면이 있다. 그중에서 0부터 $a-1$까지의 정수 a개만을 사용하여 나타낸 진법이라는 의미가 가장 중요하다. 본 연구에서 $-a$진법, $\frac{1}{a}$진법, $\sqrt{a}$진법에서 사용된 a에서도 동일한 의미를 가진다. 예를 들면, $\sqrt{5}$진법에서는 0, 1, 2, 3, 4만 사용되어지고, -3진법에서는 0, 1, 2만 사용되어진다.

(가) 진법의 정의에 대한 유추

앞에서 유추한 [정의2]로부터 $-a$진법, $\frac{1}{a}$진법, $\sqrt{a}$진법의 정의를 [정의2-1]~[정의2-3]과 같이 유추할 수 있다.

[정의2-1] ($-a$진법의 정의)
자리가 하나씩 올라감에 따라 자리의 값이 $-a$배씩 되도록 정하여 수를 나타내는 방법이다. 다른 진법과 구별하여 $1101_{(-a)}$이라 쓴다.

[정의2-2] ($\frac{1}{a}$진법의 정의)
자리가 하나씩 올라감에 따라 자리의 값이 $\frac{1}{a}$배씩 되도록 정하여 수를 나타내는 방법이다. 다른 진법과 구별하여 $1101_{(\frac{1}{a})}$이라 쓴다.

[정의2-3] ($\sqrt{a}$진법의 정의)
자리가 하나씩 올라감에 따라 자리의 값이 $\sqrt{a}$배씩 되도록 정하여 수를 나타내는 방법이다. 다른 진법과 구별하여 $1101_{(\sqrt{a})}$이라 쓴다.

(나) 진법의 전개식에 대한 유추

앞에서 유추한 [정의4]의 a진법의 전개식으로부터 $-a$진법, $\frac{1}{a}$진법, $\sqrt{a}$진법의 전개식을 [정의4-1]~[정의4-3]으로 유추할 수 있다.

[정의4-1] ($-a$진법의 전개식)
$-a$진법으로 나타낸 수를 $-a$의 거듭제곱을 써서 나타낸 식, 즉 $101_{(-a)}=1\times(-a)^2+0\times(-a)+1\times1$ 이 이진법의 전개식이다.

[정의4-2] ($\frac{1}{a}$진법의 전개식)
$\frac{1}{a}$진법으로 나타낸 수를 $\frac{1}{a}$의 거듭제곱을 써서 나타낸 식, 즉 $101_{(\frac{1}{a})}=1\times(\frac{1}{a})^2+0\times\frac{1}{a}+1\times1$ 이 이진법의 전개식이다.

[정의4-3] ($\sqrt{a}$진법의 전개식)
$\sqrt{a}$진법으로 나타낸 수를 $\sqrt{a}$의 거듭제곱을 써서 나타낸 식, 즉 $101_{(\sqrt{a})}=1\times(\sqrt{a})^2+0\times\sqrt{a}+1\times1$ 이 이진법의 전개식이다.

(다) 십진법과 $-a$진법, $\frac{1}{a}$진법, $\sqrt{a}$진법의 관계에 대한 유추

앞에서 유추한 [명제2]의 십진법과 a진법의 관계로부터 [명제2-1]~[명제2-3]을 유추할 수 있다.

[명제2-1] (십진법을 $-a$진법으로 나타내기)
$-a$진법은 십진법으로 나타낸 수를 몫이 0이 될 때까지 $-a$로 계속 나누어서 나눗셈의 몫을 쓰고 나머지를 맨 나중의 것부터 차례대로 쓴다.

[명제2-2] (십진법을 $\frac{1}{a}$진법으로 나타내기)
$\frac{1}{a}$진법은 십진법으로 나타낸 수를 정숫값이 0이 될 때까지 $\frac{1}{a}$로 계속 곱해서 곱의 정숫값을 쓰고 남은 분자의 값을 맨 처음의 것부터 차례대로 쓴다.(이때 처음 나오는 수는 일의 자리의 수이다.)

[명제2-3] (십진법을 $\sqrt{a}$진법으로 나타내기)
$\sqrt{a}$은 십진법으로 나타낸 수를 몫이 0이 될 때까지 $\sqrt{a}$로 계속 나누어서 나눗셈의 몫을 쓰고 나머지를 맨 나중의 것부터 차례대로 쓴다.

[문제2] 79를 -3진법, $\frac{1}{3}$진법, $\sqrt{3}$진법으로 나타내시오.

(풀이)

$$
\begin{array}{r|l l}
-3 & \underline{79} & \\
-3 & \underline{-26} & --- 1 \\
-3 & \underline{9} & --- 1 \\
-3 & \underline{-3} & --- 0 \\
-3 & \underline{1} & --- 0 \\
 & 0 & --- 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l l}
79 & \\
\times \frac{1}{3} & \\
\hline
26 & --- 1 \\
\times \frac{1}{3} & \\
\hline
8 & --- 2 \\
\times \frac{1}{3} & \\
\hline
2 & --- 2 \\
\times \frac{1}{3} & \\
\hline
0 & --- 2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l l}
\sqrt{3} & \underline{79} & \\
\sqrt{3} & \underline{26\sqrt{3}} & --- 1 \\
\sqrt{3} & \underline{26} & --- 0 \\
\sqrt{3} & \underline{8\sqrt{3}} & --- 2 \\
\sqrt{3} & \underline{8} & --- 0 \\
\sqrt{3} & \underline{2\sqrt{3}} & --- 2 \\
\sqrt{3} & \underline{2} & --- 0 \\
\sqrt{3} & 0 & --- 2
\end{array}
$$

79를 -3진법으로 고치면 $10011_{(-3)}$이고, $\frac{1}{3}$진법으로 고치면 $1.222_{(\frac{1}{3})}$이고, $\sqrt{3}$진법으로 고치면 $2020201_{(\sqrt{3})}$이다.

나. 수 집합과 관련된 수학탐구활동

제7차 수학과 교육과정([4])에서 진법의 학습은 중학교 1학년 초기에 이루어진다. 중학교 1학년 초기의 경우 학생들이 학습한 수의 범위는 자연수로써 학생들이 인지하고 있는 자연수 범위에서만 제한적으로 진법을 다루고 있다.

따라서 수에 대한 학습의 범위가 확장되면서 진법으로 표현할 수 있는 수의 범위도 자연스럽게 확장되어질 수 있다. 자연수를 a진법(단, a는 자연수)으로 표현하기에서 정수, 유리수를 a진법(단, a는 자연수)으로 표현하기로 확장이 가능하다. 이번 절에서는 첫째, 정수의 범위에서 a진법으로 표현하기, 둘째, 유리수의 범위에서 a진법으로 표현하기와 관련된 탐구활동을 진행한다.

(1) 정수 범위로 확장

정수의 범위에서 주어진 수를 a진법으로 나타내 보자. 정수론에서 학습하는 나눗셈 정리는 $a, b \in Z$, $a \neq 0$일 때, $b = aq + r$, $0 \leq r < |a|$인 $q, r \in Z$가 유일하게 존재(두 정수 q, r은 각각 b를 a로 나누었을 때의 몫, 나머지)한다는 것이다. 비록 중학교에서는 엄밀하게 다루지도 않고, 자연수 범위로 제한되기는 하지만 나눗셈 정리의 원리는 여러 가지 문제해결에서 폭넓게 이용되고 있다. 이 원리로부터 정수를 다양한 자연수 진법으로 나타낼 수 있다.

[문제3] -79를 3진법, 5진법, 7진법으로 나타내 보시오.

(풀이) 먼저 -79를 3진법으로 나타내어 보자. -79는 -(79)이므로 79를 3진법으로 고친 다음 음의 부호(-)를 붙여주면 된다. 따라서 -79는 3진법, 5진법, 7진법으로 다음과 같이 고칠 수 있다.

```
3) 79            5) 79            7) 79
3) 26  --- 1     5) 15  --- 4     7) 11  --- 2
3)  8  --- 2     5)  3  --- 0     7)  1  --- 4
3)  2  --- 2         0  --- 3         0  --- 1
    0  --- 2
```

따라서 -79는 3진법으로 $-2221_{(3)}$이고, 5진법으로 $-304_{(5)}$이고, 7진법으로 $-142_{(7)}$이다.

(2) 유리수 범위로 확장

(가) a진법의 소수로 나타내기

유리수의 범위에서 주어진 수를 a진법으로 나타내 보자. 이것을 위해서는 나눗셈 정리를 유리수 범위에서 어떻게 확장할 것인가를 결정해야 한다. 유리수 b가 1보다 큰 수라면 $b = n + \frac{p}{q}\left(\frac{p}{q} < 1\right)$로 고칠 수 있다. 이 때, 정숫값 n은 a진법으로 고칠 수 있으므로 $\frac{p}{q}$를 a진법으로 어떻게 나타낼 것인지 결정하면 된다. 만약 유리수 b가 1보다 작은 양수라도 동일한 상황이 된다. 즉, 1보다 작은 양수를 어떻게 a진법으로 고칠 것인가를 생각해 보자. 1보다 작은 양수는 소수점 아래의 수를 의미하므로 a진법에서의 자릿값은 $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}, \cdots$ 이 된다. 이제 [명제2]의 상황을 통해 새로운 상황에 대한 유추를 새롭게 해 보자. 이 명제에서 a로 계속 나누어질 때 이 a는 정수의 자릿값이 a의 거듭제곱으로 커진다는 것을 의미한다. 그렇다면 소수점 이하의 자릿값은

$\frac{1}{a}$의 거듭제곱으로 작아진다는 것을 유추할 수 있다. 그런데 이것은 [명제2-2]에서 $\frac{1}{a}$진법과의 유사성이 있음을 발견하게 된다. $\frac{1}{a}$진법의 자릿값이 $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$,⋯ 이 되는 것과 1보다 작은 수를 a진법으로 나타낼 때 각각의 자리의 값을 찾는 것과 유사한 연산과정을 거침을 확인할 수 있다. 따라서 [명제2]와 [명제2-2]로부터 [명제3]을 유추할 수 있다.

[명제2] (십진법을 a진법으로 나타내기)
[명제2-2] (십진법을 $\frac{1}{a}$진법으로 나타내기)

$\overset{\text{유추}}{\Longrightarrow}$

[명제3] (1보다 작은 수를 a진법으로 나타내기)
a진법은 십진법으로 나타낸 수를 나머지(분자의 값)가 0이 될 때까지 a로 계속 곱해서 곱의 나머지를 쓰고 몫(정숫값)을 맨 처음의 것부터 차례대로 쓴다.

구체적인 문제를 통해 이 사실을 확인해 보자.

[문제4] $\frac{149}{12}$을 3진법, 5진법, 12진법으로 나타내시오.

(풀이) $\frac{149}{12}=12+\frac{5}{12}$이므로 십진법에서의 정수자리 12와 소수점 이하 자리인 $\frac{5}{12}$ 각각을 주어진 각 진법으로 고치면 된다. 즉, 3진법으로 고치면 $110.11_{(3)}$이고, 5진법으로 $22.2020\cdots_{(5)}$이고, 12진법으로 $10.5_{(12)}$이다.

$$\begin{array}{ll} \frac{5}{12} & \\ \times 3 & \\ \hline \frac{1}{4} & \text{--- } 1 \\ \times 4 & \\ \hline 0 & \text{--- } 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \frac{5}{12} & \\ \times 5 & \\ \hline \frac{1}{12} & \text{--- } 2 \\ \times 5 & \\ \hline \frac{5}{12} & \text{--- } 0 \\ \times 5 & \\ \hline \frac{1}{12} & \text{--- } 2 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \frac{5}{12} & \\ \times 12 & \\ \hline 0 & \text{--- } 5 \end{array}$$

[문제5] $\frac{7}{16}$을 4진법, 6진법, 9진법으로 나타내시오.

(풀이)

$$\begin{array}{ll} \frac{7}{16} & \\ \times 4 & \\ \hline \frac{3}{4} & \text{--- } 1 \\ \times 4 & \\ \hline 0 & \text{--- } 3 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \frac{7}{16} & \\ \times 6 & \\ \hline \frac{5}{8} & \text{--- } 2 \\ \times 6 & \\ \hline \frac{3}{4} & \text{--- } 3 \\ \times 6 & \\ \hline \frac{1}{2} & \text{--- } 4 \\ \times 6 & \\ \hline 0 & \text{--- } 3 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \frac{7}{16} & \\ \times 9 & \\ \hline \frac{15}{16} & \text{--- } 3 \\ \times 9 & \\ \hline \frac{7}{16} & \text{--- } 8 \\ \times 9 & \\ \hline \frac{15}{16} & \text{--- } 3 \\ \times 9 & \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

주어진 수는 4진법으로 $0.13_{(4)}$이고, 6진법으로 $0.2343_{(4)}$이고, 9진법으로 $0.3838\cdots_{(9)}$이다.

$\frac{7}{16}$을 9진법으로 나타내면 $0.3838\cdots_{(9)}$이고, $\frac{149}{12}$을 5진법으로 나타내면 $12.2020\cdots_{(5)}$이 됨을 확인하였다. 이 두 수들은 각각의 진법에서 순환하는 무한소수이다. 그런데, $\frac{7}{16}$은 십진법의 체계에서는 0.4375로 유한소수이다. 진법이 바뀜에 따라 유한소수와 무한소수의 의미도 변하게 된다는 것을 확인할 수 있다. 중학교 2학년에서 유리수를 소수로 고칠 때 유한소수가 될 것인지 무한소수가 될 것인지 판정하는 방법에 대해 학습하는데 이것을 수학기초지식으로 하여 새로운 수학적인 유추가 가능하다.

강행고 외([1])에 따르면 '유한소수 0.7, 0.29, 0.123은 $0.7=\frac{7}{10}$, $0.29=\frac{29}{10^2}$, $0.123=\frac{123}{10^3}$과 같이 분모가 10의 거듭제곱인 분수로 나타낼 수 있다. 그런데 이들 10의 거듭제곱인 분모를 각각 소인수분해하면 소인수가 2와 5로만 이루어져 있음을 알 수 있다. 한편, 분수 $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{20}$은 $\frac{2}{5}=\frac{2\times2}{5\times2}=\frac{4}{10}=0.4$, $\frac{3}{20}=\frac{3}{2^2\times5}=\frac{3\times5}{2^2\times5^2}=\frac{15}{10^2}=0.15$이다' 라고 하며 [명제4]를 제시하였다. 여기서 2와 5는 십진법에서 10의 소인수이므로, 이로부터 a진법에서 [명제4-1]을 유추할 수 있다.

[명제4](십진법에서 유한·무한소수의 판정)		[명제4-1](a진법에서 유한·무한소수의 판정)
십진법에서는 분모의 소인수가 2나 5로만 이루어진 기약분수는 적당한 수를 곱하여 분모를 10의 거듭제곱으로 고칠 수 있으므로 유한소수로 나타낼 수 있다.	유추 $\Rightarrow$	a진법에서는 분모의 소인수가 a의 소수인 약수로만 이루어진 기약분수는 적당한 수를 곱하여 분모를 a의 거듭제곱으로 고칠 수 있으므로 유한소수로 나타낼 수 있다.

[문제6] 다음 유리수를 주어진 진법의 소수로 나타낼 때 유한소수인지 무한소수인지 판정하시오.

(a) $\frac{7}{16}$을 4진법으로 (b) $\frac{3}{10}$을 5진법으로 (c) $\frac{5}{12}$을 6진법으로

(풀이) (a) $\frac{7}{16}$을 4진법으로 나타낼 때 유한소수가 되기 위해서는 분모의 소인수가 2만으로 이루어져 있어야 한다. $\frac{7}{16}$의 분모의 소인수가 2뿐이므로 4진법으로 나타내면 유한소수이다. 실제로, $\frac{7}{16}$을 4진법으로 나타내면

$\frac{7}{16}=1\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{4^2}=0.13_{(4)}$으로 유한소수가 된다.

(b) $\frac{3}{10}$을 5진법으로 나타낼 때 유한소수가 되기 위해서는 분모의 소인수가 5만으로 이루어져 있어야 한다. $\frac{3}{10}$의 분모의 소인수가 2와 5이므로 5진법으로 나타내면 무한소수이다. 실제로, $\frac{3}{10}$을 5진법으로 나타내면

$$\frac{3}{10}=1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{1}{5^2}+2\times\frac{1}{5^3}=0.122\cdots_{(5)}$$

으로 무한소수가 된다.

(c) $\frac{5}{12}$을 6진법으로 나타낼 때 유한소수가 되기 위해서는 분모의 소인수가 2와 3만으로 이루어져 있어야 한다. $\frac{5}{12}$의 분모의 소인수가 2와 3이므로 6진법으로 나타내면 유한소수이다. 실제로, $\frac{5}{12}$을 6진법으로 나타내면 $\frac{5}{12}=2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6^2}=0.23_{(6)}$으로 유한소수가 된다.

(나) a진법의 분수꼴로 나타내기

지금까지는 분수꼴의 유리수를 a진법의 소수로 나타내는 것에 대해 고찰하였다. 여기에서는 십진법에서의 분수꼴을 a진법의 분수꼴로 나타내는 것에 대해 생각해 보자. 중학교 1학년 교과서([12])에서는 유리수를 '분자, 분모($\neq 0$)가 정수인 분수로 나타낼 수 있는 수'라고 정의하고 있다. 이것을 기호로 표현하면 유리수는 $Q=\{\frac{p}{q} \mid p,q\in Z, q\neq 0\}$로 나타낼 수 있다. 여기서 p,q는 모두 정수의 원소로 십진법의 수라고 생각할 수 있다. 만약 유리수 Q를 a진법의 분수꼴로 나타낸 전체의 집합을 $Q_{(a)}$라고 하면, $Q_{(a)}=\{\frac{p}{q}_{(a)}=\frac{p_{(a)}}{q_{(a)}} \mid p_{(a)},\ q_{(a)}\in Z,\ q_{(a)}\neq 0_{(a)}\}$로 유추하여 나타낼 수 있다. 예를 들어 $\frac{5}{12}$를 6진법의 분수꼴로 나타내면 $\frac{5}{20}_{(6)}$와 같다.

이제 이것을 활용하여 소수를 분수로 나타내는 방법에 대해 생각해 보자. 초등학교 6학년에서는 유한소수를 분수로 고치는 방법([명제5])에 대해 학습하고, 중학교 2학년에서는 순환소수를 분수로 고치는 방법([명제6])에 대해 학습을 한다. 각각의 경우에 a진법의 소수를 a진법의 분수꼴로 고치는 방법을 [명제5-1], [명제6-1]로 유추할 수 있다.

[명제5](십진법의 유한소수를 분수로 고치기)1)
소수 한 자리 수는 분모를 10으로 하고, 소수 두 자리 수는 분모를 100으로 하고, 소수 세 자리 수는 분모를 1000으로 하여 나타내며, 이 때 분모는 그대로 쓴다. 또한 분수는 기약분수로 고친다.

유추 $\Rightarrow$

[명제5-1](a진법의 유한소수를 분수로 고치기)
소수 한 자리 수는 분모를 $10_{(a)}$으로 하고, 소수 두 자리 수는 분모를 $100_{(a)}$으로 하고, 소수 세 자리 수는 분모를 $1000_{(a)}$으로 하여 나타내며,이 때 분모는 그대로 쓴다. 또한 분수는 기약분수로 고친다.

[문제7] 다음 유한소수를 해당 진법의 분수로 바꾸시오.

(a) $0.2_{(6)}$ (b) $0.13_{(4)}$

(풀이) (a) $0.2_{(6)}$을 분수로 고치기 위해 [명제5-1]을 적용하면 먼저 분모는 $10_{(6)}$로 바뀌고, 분자는 그대로 쓴다. 따라서 $0.2_{(6)}=\frac{2_{(6)}}{10_{(6)}}=\left.\frac{2}{10}\right._{(6)}$가 된다. 실제로 $\left.\frac{2}{10}\right._{(6)}=\left.\frac{1}{3}\right._{(6)}=\frac{1}{3}$이다.

(b) $0.13_{(4)}$을 분수로 고치기 위해 [명제5-1]을 적용하면 먼저 분모는 $100_{(4)}$로 바뀌고, 분자는 그대로 쓴다. 따라서 $0.13_{(4)}=\frac{13_{(4)}}{100_{(4)}}=\left.\frac{13}{100}\right._{(4)}$가 된다. 실제로 $\left.\frac{13}{100}\right._{(4)}=\frac{7}{16}$이다.

[명제6](십진법의 순환소수를 분수로 고치기)2)
구하는 분수를 x라고 두고, 이 식의 양변에 10의 거듭제곱을 곱하여 소수점 아래에 순환마디만 반복되어 나타나도록 한 다음 뺄셈으로 간단히 하여 기약분수로 나타낸다.

유추 $\Rightarrow$

[명제6-1](a진법의 순환소수를 분수로 고치기)
구하는 분수를 x라고 두고, 이 식의 양변에 $10_{(a)}$의 거듭제곱을 곱하여 소수점 아래에 순환마디만 반복되어 나타나도록 한 다음 뺄셈으로 간단히 하여 기약분수로 나타낸다.

[문제8] 다음 무한소수를 해당 진법의 분수로 바꾸시오.

(a) $0.3838\cdots_{(9)}$ (b) $0.122\cdots_{(5)}$

(풀이) (a) $0.3838\cdots_{(9)}$을 분수로 고치기 위해 [명제6-1]을 적용하면 먼저 $x=0.3838\cdots_{(9)}$ (㉠)로 두고, 양변에 $100_{(9)}$을 곱한다. 즉, $100_{(9)}x=38.3838\cdots_{(9)}$ (㉡)을 얻는다. ㉡식에서 ㉠식을 빼면, $88_{(9)}x=38_{(9)}$이고 $x=\left.\frac{38}{88}\right._{(9)}$이다. 실제로, $\left.\frac{38}{88}\right._{(9)}=\left.\frac{7}{17}\right._{(9)}=\frac{7}{16}$이다.

(b) $0.122\cdots_{(5)}$을 분수로 고치기 위해 [명제6-1]을 적용하면 먼저 $x=0.122\cdots_{(5)}$로 두고, 양변에 각각 $10_{(5)}$, $100_{(5)}$을 곱한다. 즉, $100_{(5)}x=12.22\cdots_{(5)}$ (㉠), $10_{(5)}x=1.22\cdots_{(5)}$ (㉡)을 얻는다. ㉠식에서 ㉡식을 빼면, $40_{(5)}x=11_{(5)}$이고, $x=\left.\frac{11}{40}\right._{(5)}$이다. 실제로, $\left.\frac{11}{40}\right._{(5)}=\left.\frac{3}{20}\right._{(5)}=\frac{3}{10}$이다.

1) 초등학교 6학년 수학 교사용 지도서 참조([5]).
2) 중학교 2학년 수학 교과서 참조([24]).

다. 연산과 관련한 수학탐구활동

제7차 교육과정에서는 이진법의 덧셈과 뺄셈을 다루도록 되어있었지만, 2007년 개정교육과정 해설([3])을 보면 십진법과 이진법의 관계를 이해하는 내용은 다루되, 학습량의 감축과 난이도 조정이라는 이유로 이진법의 덧셈과 뺄셈은 다루지 않도록 하였다. 본 연구에서는 제7차 교육과정에서의 이진법의 덧셈만을(뺄셈은 덧셈의 역연산) 수학기초지식으로 하여 연구를 진행한다. 고성은 외([2])은 이진법의 덧셈에 대해 [명제7]과 같이 언급하고 있고 이로부터 [명제7-1]을 유추할 수 있다.

[명제7] 십진법의 덧셈에서는 같은 자리끼리 더한 수가 10이상이면 자리를 하나 올린다. 마찬가지로 이진법의 덧셈에서는 같은 자리끼리 더한 수가 2이면 자리를 하나 올려 계산한다.

[명제7-1] a진법의 덧셈에서는 같은 자리끼리 더한 수가 a이상이면 자리를 하나 올려 계산한다.

이진법의 덧셈을 보면 <표1>과 같은 덧셈표를 사용한다([12]). 따라서 다른 진법의 계산에서도 이와 유사한 덧셈표를 만들어 사용하면 된다. <표2>는 오진법의 덧셈표의 예이다.

또한 십진법의 곱셈으로부터 다른 진법의 곱셈도 [명제7-2]와 같이 유추할 수 있다. 또한, 십진법의 곱셈을 실행하기 위해서는 곱셈구구(<표3>)가 가장 중요한 역할을 하고 있다. 따라서 a진법에서의 곱셈을 실행하기 위해서는 새로운 곱셈표가 필요하다. <표4>는 구진법의 곱셈을 위해 필요한 곱셈팔팔의 예이다.

표 1. 이진법의 덧셈표

+	$0_{(2)}$	$1_{(2)}$
$0_{(2)}$	$0_{(2)}$	$1_{(2)}$
$1_{(2)}$	$1_{(2)}$	$10_{(2)}$

표 2. 오진법의 덧셈표

+	$0_{(5)}$	$1_{(5)}$	$2_{(5)}$	$3_{(5)}$	$4_{(5)}$
$0_{(5)}$	$0_{(5)}$	$1_{(5)}$	$2_{(5)}$	$3_{(5)}$	$4_{(5)}$
$1_{(5)}$	$1_{(5)}$	$2_{(5)}$	$3_{(5)}$	$4_{(5)}$	$10_{(5)}$
$2_{(5)}$	$2_{(5)}$	$3_{(5)}$	$4_{(5)}$	$10_{(5)}$	$11_{(5)}$
$3_{(5)}$	$3_{(5)}$	$4_{(5)}$	$10_{(5)}$	$11_{(5)}$	$12_{(5)}$
$4_{(5)}$	$4_{(5)}$	$10_{(5)}$	$11_{(5)}$	$12_{(5)}$	$13_{(5)}$

[명제7-2] 십진법은 형식화된 곱셈의 원리를 이용하여 10이상이면 자리를 하나 올려서 계산한다. 마찬가지로 a진법의 곱셈에서는 형식화된 원리를 동일하게 적용하여 a이상이면 자리를 하나 올려 계산한다.

표 3. 십진법의 곱셈구구표

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

표 4. 구진법의 곱셈팔팔표

×	$1_{(9)}$	$2_{(9)}$	$3_{(9)}$	$4_{(9)}$	$5_{(9)}$	$6_{(9)}$	$7_{(9)}$	$8_{(9)}$
$1_{(9)}$	$1_{(9)}$	$2_{(9)}$	$3_{(9)}$	$4_{(9)}$	$5_{(9)}$	$6_{(9)}$	$7_{(9)}$	$8_{(9)}$
$2_{(9)}$	$2_{(9)}$	$4_{(9)}$	$6_{(9)}$	$8_{(9)}$	$11_{(9)}$	$13_{(9)}$	$15_{(9)}$	$17_{(9)}$
$3_{(9)}$	$3_{(9)}$	$6_{(9)}$	$10_{(9)}$	$13_{(9)}$	$16_{(9)}$	$20_{(9)}$	$23_{(9)}$	$26_{(9)}$
$4_{(9)}$	$4_{(9)}$	$8_{(9)}$	$13_{(9)}$	$17_{(9)}$	$22_{(9)}$	$26_{(9)}$	$31_{(9)}$	$35_{(9)}$
$5_{(9)}$	$5_{(9)}$	$11_{(9)}$	$16_{(9)}$	$22_{(9)}$	$27_{(9)}$	$33_{(9)}$	$38_{(9)}$	$44_{(9)}$
$6_{(9)}$	$6_{(9)}$	$13_{(9)}$	$20_{(9)}$	$26_{(9)}$	$33_{(9)}$	$40_{(9)}$	$46_{(9)}$	$53_{(9)}$
$7_{(9)}$	$7_{(9)}$	$15_{(9)}$	$23_{(9)}$	$31_{(9)}$	$38_{(9)}$	$46_{(9)}$	$54_{(9)}$	$62_{(9)}$
$8_{(9)}$	$8_{(9)}$	$17_{(9)}$	$26_{(9)}$	$35_{(9)}$	$44_{(9)}$	$53_{(9)}$	$62_{(9)}$	$71_{(9)}$

구체적인 문제를 통해 a진법에서의 덧셈과 곱셈에 대해 살펴보자.

[문제8] 다음 계산을 하시오.

(a) $13.34_{(5)} + 32.23_{(5)}$ (b) $38_{(9)} \times 53_{(9)}$

(풀이)

(a) $13.34_{(5)} + 32.23_{(5)} = 13_{(5)} + 32_{(5)} + 0.34_{(5)} + 0.23_{(5)} = 100_{(5)} + 1.21_{(5)} = 101.21_{(5)}$

$38_{(9)} \times 53_{(9)} = 30_{(9)} \times 50_{(9)} + 30_{(9)} \times 3_{(9)} + 8_{(9)} \times 50_{(9)} + 8_{(9)} \times 3_{(9)}$(b)

$= 1600_{(9)} + 100_{(9)} + 440_{(9)} + 26_{(9)} = 2266_{(9)}$. ■

이제 a진법에서의 덧셈과 곱셈을 수학기초지식으로 하여 다양한 진법($-a$진법, $\frac{1}{a}$진법)과 여러 가지 수 집합(정수, 유리수)에서 덧셈과 곱셈이 어떻게 정의되고 실행되어질 수 있지 살펴보자.

(1) $-a$진법에서의 덧셈과 곱셈

먼저 $-a$진법에서의 덧셈을 어떻게 실행할 것인지 살펴보자. $-a$진법에서의 자릿값은 1, $-a$, a^2, $-a^3$, a^4, $\cdots$으로 $-a$의 거듭제곱이 된다. 이 때 자릿값이 양수와 음수가 항상 번갈아 나타난다. 따라서 일반적인 진법의 덧셈이라면 $-a$이상이면 자리를 하나 올려 계산을 해야 하지만, $-a$진법에서는 그런 경우는 생길 수 없으므로 a 이상이면 자리를 하나 올려 계산하되 올려진 값의 부호를 바꾸어주는 방향으로 유추할 수 있다. 예를 들어, $124_{(-5)} + 43_{(-5)}$의 계산을 아래와 같이 해 보자. 일의 자리의 합이 $12_{(5)}$로 5이상이므로 1을 -5의 자리로 올려주는데, 이 때 1을 올리는 것이 아니라 -1을 올려서 계산을 한다. 동일한 방법으로 그 다음 자릿값도 계산하여 정확한 답을 얻을 수 있다.

$$
\boxed{\begin{array}{r} {}^{-1}\quad \\ 124_{(-5)} \\ +\ 43_{(-5)} \\ \hline 2_{(-5)} \end{array}}
\Rightarrow
\boxed{\begin{array}{r} {}^{-1}\quad \\ 124_{(-5)} \\ +\ 43_{(-5)} \\ \hline 2_{(-5)} \\ 0_{(-5)} \end{array}}
\Rightarrow
\boxed{\begin{array}{r} 124_{(-5)} \\ +\ 43_{(-5)} \\ \hline 2_{(-5)} \\ 0_{(-5)} \\ 0_{(-5)} \end{array}}
\Rightarrow
\boxed{\begin{array}{r} 124_{(-5)} \\ +\ 43_{(-5)} \\ \hline 2_{(-5)} \\ 0_{(-5)} \\ 0_{(-5)} \\ \hline 2_{(-5)} \end{array}}
$$

다음으로 $-a$진법에서의 곱셈에 대해 살펴보자. 덧셈과 마찬가지로 $-a$진법에서의 자릿값이 양수와 음수가 번갈아 나타나기 때문에 a이상이면 자리를 하나 올려 계산하고 올려진 값의 부호를 바꾸어주도록 하자. 예를 들어, $124_{(-9)}+43_{(-9)}$의 계산을 아래와 같이 할 수 있다. 일의 자리끼리의 곱이 $13_{(-9)}$으로 5이상이므로 1을 -5의 자리로 올려주는데, 이 때 1을 올리는 것이 아니라 -1을 올려서 계산을 한다. 동일한 방법으로 곱셈을 계속 실행하면 정확한 답을 얻을 수 있다.

$$
\boxed{\begin{array}{r} {}^{-1}\quad \\ 124_{(-9)} \\ \times\ 43_{(-9)} \\ \hline 3_{(-9)} \end{array}}
\Rightarrow
\boxed{\begin{array}{r} 124_{(-9)} \\ +\ 43_{(-9)} \\ \hline 353_{(-9)} \end{array}}
\Rightarrow
\boxed{\begin{array}{r} {}^{-1}\quad \\ 124_{(-9)} \\ \times\ 43_{(-9)} \\ \hline 353_{(-9)} \\ 7_{(-9)} \end{array}}
\Rightarrow
\boxed{\begin{array}{r} 124_{(-9)} \\ \times\ 43_{(-9)} \\ \hline 353_{(-9)} \\ 477_{(-9)} \end{array}}
\Rightarrow
\boxed{\begin{array}{r} 124_{(-9)} \\ \times\ 43_{(-9)} \\ \hline 353_{(-9)} \\ 477_{(-9)} \\ \hline 3033_{(-9)} \end{array}}
$$

이상의 결과를 정리하여 [명제8]을 유추하여 얻을 수 있다.

[명제8] $-a$진법의 덧셈과 곱셈은 a이상이면 자리를 하나 올려서 계산하되 올라가는 값의 부호를 음수로 한다. 나머지 계산은 a진법의 연산 원리를 동일하게 적용한다.

(2) $\frac{1}{a}$진법에서의 덧셈과 곱셈

먼저 $\frac{1}{a}$진법에서의 덧셈을 어떻게 실행할 것인지 살펴보자. $\frac{1}{a}$진법에서의 자릿값은 1, $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^2}$, …으로 a진법과는 반대로 점차 작아진다. 따라서 일반적인 a진법의 덧셈과 정반대의 방향으로 덧셈 연산을 수행하는 것으로 유추할 수 있다. 예를 들어, $124_{(\frac{1}{5})}+43_{(\frac{1}{5})}$의 계산을 아래와 같이 해 보자. 일의 자리의 합을 먼저 구하는 것이 아니라 $(\frac{1}{5})^2$의 자리의 합을 구하고, 그 다음 $\frac{1}{5}$의 자리, 1의 자리의 순서로 덧셈을 수행하면 정확한 답을 얻을 수 있다.

$$\boxed{\begin{array}{r} 124_{(\frac{1}{5})} \\ +\ 43_{(\frac{1}{5})} \\ \hline 1_{(\frac{1}{5})} \end{array}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 124_{(\frac{1}{5})} \\ +\ 43_{(\frac{1}{5})} \\ \hline 11_{(\frac{1}{5})} \end{array}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{r} {\scriptstyle .1} \\ 124_{(\frac{1}{5})} \\ +\ 43_{(\frac{1}{5})} \\ \hline 113_{(\frac{1}{5})} \end{array}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{r} 124_{(\frac{1}{5})} \\ +\ 43_{(\frac{1}{5})} \\ \hline 113.1_{(\frac{1}{5})} \end{array}}$$

다음으로 $\frac{1}{a}$진법에서의 곱셈에 대해 살펴보자. 덧셈과 마찬가지로 $\frac{1}{a}$진법에서의 자릿값이 점차 작아지기 때문에 일반적인 곱셈과 정반대로 곱셈을 수행하는 것으로 유추할 수 있다. 예를 들어, $124_{(\frac{1}{9})}+43_{(\frac{1}{9})}$의 계산을 다음과 같이 해 보자. 가장 먼저 $(\frac{1}{9})^2$의 자리의 1과 $\frac{1}{9}$의 자리의 4와 곱하는 것에서 시작해서 일반적인 곱셈과 정반대의 순서로 연산을 수행하면 정확한 답을 얻을 수 있다. 이 때 연산 결과를 기록할 때는 좌측방향에서 우측방향으로 적는다.

$$\boxed{\begin{array}{r} 124_{(\frac{1}{9})} \\ \times\ 43_{(\frac{1}{9})} \\ \hline 4_{(\frac{1}{9})} \end{array}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{r} 124_{(\frac{1}{9})} \\ \times\ 43_{(\frac{1}{9})} \\ \hline 4871_{(\frac{1}{9})} \end{array}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{r} 124_{(\frac{1}{9})} \\ \times\ 43_{(\frac{1}{9})} \\ \hline 4871_{(\frac{1}{9})} \\ 3_{(\frac{1}{9})} \end{array}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{r} 124_{(\frac{1}{9})} \\ \times\ 43_{(\frac{1}{9})} \\ \hline 4871_{(\frac{1}{9})} \\ 363.1_{(\frac{1}{9})} \end{array}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{r} 124_{(\frac{1}{9})} \\ \times\ 43_{(\frac{1}{9})} \\ \hline 4871_{(\frac{1}{9})} \\ 363.1_{(\frac{1}{9})} \\ \hline 4253.1_{(\frac{1}{9})} \end{array}}$$

이상의 결과를 정리하여 [명제9]를 유추하여 얻을 수 있다.

[명제9] $\frac{1}{a}$진법의 덧셈과 곱셈은 a진법의 덧셈과 곱셈 연산과 정반대의 순서로 진행하고, 정반대의 방향으로 연산 결과를 적는다. 나머지 계산은 a진법의 연산 원리를 동일하게 적용한다.

4. 요약 및 결론

2007년 개정 수학과교육과정([6])에 따르면 중학교 1학년에서 진법에 대한 내용을 학습하지만 이진법에만 국한하고 있다. 또한, 이진법에서의 덧셈과 곱셈과 같은 연산은 다루지 않는다. 하지만 본 연구에서는 정규 교육과정에서 제시하고 있는 가장 기초적인 십진법과 이진법의 정의를 수학기초지식으로 삼아 이를 바탕으로 유추를 활용한 수학탐구활동을 통해 다양한 교수학습 자료를 개발하였다. 본 연구의 수학탐구활동을 통해 얻은 결과를 요약하면 다음과 같다.

첫째, 역사 속에서 진법의 다양한 유형이 존재하였음을 확인하였다.
둘째, 대수 학습 내용을 소재로 유추활동을 어떻게 진행할 것인지에 대한 방향을 설정하였다.
셋째, 변수와 관련된 수학탐구활동에서는 수를 표현하는 방법인 a진법(단, a는 자연수)에서 a를 변수로 추출하였다. 이로부터 a진법으로 나타내기, $-a$진법(음수 진법)으로 나타내기, $\frac{1}{a}$진법(역수 진법)으로 나타내기, $\sqrt{a}$진법(제곱근 진법)으로 나타내기에 대한 구체적인 방법을 개발하였다.
넷째, 수 집합과 관련된 수학탐구활동에서는 수에 대한 범위를 확장하면서 이들 수들을 진법으로 표현하는 방법을 연구하였다. 구체적으로 자연수를 a진법으로 표현하는 방법, 정수를 a진법으로 표현하는 방법, 유리수를 a진법으로 표현하는 방법을 개발하였다.
다섯째, 연산과 관련한 수학탐구활동에서는 십진법의 덧셈과 곱셈을 바탕으로 a진법에서의 덧셈과 곱셈, $-a$진법에서의 덧셈과 곱셈, $\frac{1}{a}$진법에서의 덧셈과 곱셈의 연산 방법을 개발하였다.

수학교육은 기존의 수학지식이나 기능 등을 단순히 반복 연습시키는 것을 통해 이루어지기 보다는 기존의 수학지식이나 기능에 대한 추측과 분석 과정을 통해 새로운 규칙성을 밝혀내어 확장해 가는 활동이 중심이 되어야 한다고 보고 있다. 이런 측면에서 본 연구의 유추를 활용한 수학탐구활동은 수학교육의 본질에 잘 부합된 것이다. 또한, 학습자 중심의 수학교육에서 스스로 수학적 사실을 발견하는 것은 매우 가치있는 일이다. 본 연구의 수학탐구활동 과정은 학생들 스스로 수학적 사실을 발견할 수 있는 기회를 제공하는 전형적인 사례로 볼 수 있다. 마지막으로 수학은 매우 계통적이고 구조적인 교과이다. 따라서 학습결과를 독자적인 것이 아닌 체계적인 것으로 이해시키는 것이 중요하다. 본 연구에서 유추를 활용하여 진법을 체계적으로 확장하고 일반화한 연구는 학생들이 수학을 체계화하는데 도움을 줄 수 있다.
따라서 본 연구에서의 수학탐구활동 과정과 개발된 교수학습 자료를 통해 수학교육과정 및 수학 교수학습에 의미 있는 시사점을 주리라 기대한다.

마지막으로 본 연구의 결과로부터 다음 두 가지를 제언할 수 있다. 첫째, 본 연구에서 제시한 대수 내용에 대한 유추를 활용한 수학탐구활동의 네 번째 방향 즉, ‘다양한 대수적 성질이나 규칙과 관련된 탐구활동’에 대한 구체적인 수학탐구활동이 가능하다. 둘째, 진법이외의 대수 내용, 예를 들면, ‘최대공약수’를 소재로 하여 유추를 활용한 최대공약수의 일반화에 대한 수학탐구활동이 가능하다.

참 고 문 헌

1. 강행고, 이화영, 박진석, 이용완, 한경연, 이준홍, 이혜련, 송미현, 박정숙, 중학교 수학 8-가, 중앙교육진흥연구소, 2001.
2. 고성은, 박복현, 김준희, 최수일, 강운중, 소순영, 중학교 수학 7-가, 블랙박스, 2000.
3. 교육과학기술부, 중학교 교육과정 해설(수학), 2008.
4. 교육부, 제7차 수학과 교육과정, 대한교과서 주식회사, 1997.
5. 교육부, 초등학교 수학 6-가 교사용지도서, 대한교과서 주식회사, 2002.
6. 교육인적자원부, 2007년 개정 수학과 교육과정, 대한교과서 주식회사, 서울 : 2007.
7. 김경선, 한인기, 삼각형의 방접원 및 사면체의 방접구에 관련된 다양한 성질 탐구, 수학교육논문집 21 (2007) No. 3, 385-406.
8. 김군찬, 역사적인 증명, 해법, 사건들로 보는 수학사, 경문사, 2008.
9. 김순심, 초등 수학 영재아동의 수학적 기본 개념에 관한 실태조사 연구, 한국교원대학교 석사학위논문, 2007.
10. 김응태, 박승안, 현대대수학, 경문사, 1992.
11. 박한식, 교직수학, 대한교과서주식회사, 1991.
12. 배종수, 박종률, 윤행원, 유종광, 김문환, 민기열, 박동익, 우현철, 중학교 수학 7-가, 한성교육연구소, 2000.
13. 서보억, 권영인, 코사인 법칙의 발달과정 분석과 논증을 통한 확장에 대한 연구, 한국수학사학회지 20(2007) No. 3, 147-166.
14. 서보억, 중학교 영재학생의 수학기초지식의 이해 정도에 대한 조사 연구, 한국학교수학회논문집 12(2009) No. 1, 131-149.
15. 우광식, 초등학교 수학영재 교육에 대한 사례 조사 연구, 한국교원대학교 박사학위논문, 2005.
16. 우정호, 학교수학의 교육적 기초, 서울대학교 출판부, 2000.
17. 원지현, 기수법에 대한 연구 : 기수법의 활용을 중심으로, 중앙대학교 석사학위논문, 2005.
18. 유익승, 한인기, 신현용, 삼각형의 높이와 방접원의 개념유추에 대한 연구, 수학교육논문집 20(2006) NO. 1. 9-18.
19. 정혜란, 이산수학에서의 형상수와 진법의 연구, 한국외국어대학교 석사학위논문, 2006.
20. 한인기, 에르든에프, 유추를 통한 수학탐구, 승산, 2005.
21. 한인기, 유추를 이용한 삼각형의 각의 이등분선 성질 탐구, 수학교육 41(2002) No. 2, 215-225.
22. 한인기, 유추를 통한 코사인정리의 일반화에 대한 연구, 수학교육논문집 21(2007)

No. 1, 51-64.
23. 한인기, 유추를 활용한 기하 심화학습 자료 개발, 수학교육학술지 5(2000) No. 1, 165-174.
24. 황석근, 이재돈, 중학교 수학 8-가, 한서출판사, 2001.
25. Boyer, C. B. & Merzbach, U. C., *A History of Mathematics,* John Wiley & Sons, Inc., 1991.
26. Dresden, A. (trans.Van der Waerden. B. L.), *Science Awakening,* Science Editions, 1963.
27. Eves, H., *An Introduction to the History of Mathematics*, Harcourt Brac, 1962.
28. Polya, G., *Mathematics and Plausible Reasoning, Vol I*, Princeton University Press, 1973.

The Study of the Extension of the Scale of Notation by Analogy and the Notation in History

Korea Institute for Curriculum and Evaluation(KICE) **Bo Euk Suh**

On this study, the historical flow of the notation was briefly examined and the direction of mathematical investigation activity of the content of notation by analogy was explored and teaching learning materials were developed. Diverse mathematical facts were investigated on the basis of decimal system and binary system which are learned in middle school. First, the way of progressing analytic activity with algebraic material was examined. Second, on the basis of the notation which are learned in the first grade of middle school, the definition of the scale of a-notation, $-a$-notation, $\frac{1}{a}$-notation, $\sqrt{a}$-notation was extended by analogy. The result of this study will be expected to establish the curriculum of mathematics and provide teaching and learning with the meaningful current events.

Key words: the scale of notation, analogy, extension of decimal notation, algebra, teaching material.

2000 Mathematics Subject Classification : 97D30

ZDM Classification : D33

접수일 : 2009년 5월 22일 수정일 : 2009년 8월 4일 게재확정일 : 2009년 8월 10일