한국수학사학회지 제22권 제3호(2009년 8월), 171-186

푸앵카레(Poincaré)의 발명 심리학의 고찰[1)]

광주교육대학교 이대현
leedh@gnue.ac.kr

수학 분야에서 수학적 발명이 어떻게 일어나는가에 관심을 갖는 연구가에게 푸앵카레의 자서전적 일화와 그의 저서들은 많은 시사점을 준다. 수학 분야에서 능통한 학자였던 푸앵카레는 그의 수학을 연구하는 과정에 대한 자서전적 글에서 수학 분야에서 발명의 과정에 대한 상세한 설명을 제시하고 있다. 푸앵카레는 의식적 활동 뒤에 일어나는 무의식적 활동의 가치를 논의하고, 수학적 발명의 과정에서 의식적 활동과 무의식적 활동의 상보적 관계를 제시하고 있다.

또한, 수학적 발견의 과정에서 직관과 논리의 상보적 관계를 중시하고 있다. 이것은 유클리드 원론을 바탕으로 논리적 사고를 우선적으로 강조해 온 종전의 수학교육과 학생들의 창의적인 수학 능력을 기르는 교육에 시사하는 바가 크다. 특히 최근의 학습 원리로 직관적 원리를 제시하는 것도 논리와 더불어 직관을 강조해야 한다는 푸앵카레의 견해가 교육 현장에 뿌리내리는 과정이라고 볼 수 있다.

주제어 : 발명, 창의성, 무의식적 활동, 의식적 활동, 직관, 논리

0. 서론

창의적인 인간의 능력은 인류 문명의 발달뿐만이 아니라, 수학의 발달에도 중요한 역할을 하였다. 5천년 이상 계속된 수학의 역사를 살펴볼 때, 창의적인 인간의 수학적 활동을 통하여 수학적 지식은 생성・발전해 왔으며, 창의적인 인간의 수학적 활동은 수학 발전의 원동력이었다. 따라서 학교 수학교육은 다량의 단편적인 수학적 지식을 주입하기보다는 창의적으로 사고하고 문제를 해결할 수 있는 학생을 길러내는데 관심을 가져야 한다. 특히 정보화와 지식기반 사회로 일컬어지는 미래사회를 살아갈 학생들에게는 창의적인 사고력을 기르는 교육이 더욱 중요시되고 있다.

창의성이나 창의적 사고력에 대한 연구가 학자에 따라 다양하게 전개・발전되고 있어, 창의성에 대한 정의나 창의력을 기를 수 있는 방안에 대한 합의점을 찾기란 쉽지 않은 일이다([10], [11]). 그렇지만 수학자가 자신의 수학적 발명의 과정을 회상하여

1) 이 논문은 2009년도 광주교육대학교 학술연구비 지원에 의한 것임.

제시한 일화는 학생들이 사고실험을 통하여 그 과정을 경험할 수 있는 환경을 제시함으로써 창의적인 사고력을 길러줄 수 있는 자료가 될 것이다.

학생들이 수학을 행하는 과정(문제해결 과정)과 수학자가 수학을 만드는 과정(수학적 발명)이 유사하다고 볼 수 있다. 모든 학생들은 도전적인 수학 문제 상황에 처했을 때, 새롭고, 융통성 있고, 독창적이며, 창의적인 아이디어를 생산해 낼 수 있는 잠재능력을 가지고 있다. 따라서 수학자가 수학을 발명해 가는 과정을 분석하고 따름으로써 학생들이 창의적인 수학적 활동에 참여하도록 할 수 있을 것이다.

수학의 역사를 통하여 위대한 수학자이며, 자신의 창의적인 수학 발명의 과정을 구체적으로 기술하여 학생들이 창의적인 문제해결을 경험할 수 있는 방안을 제시해 준 수학자로 푸앵카레를 들 수 있다. 푸앵카레는 후대의 연구가들이 창의적 사고의 과정을 몇 단계로 나누고, 각각의 단계에서 구체적으로 어떤 일들이 일어나는가를 분석하는 단계 이론의 배경을 제공하였다. 푸앵카레는 창의적인 수학적 발명과 관련된 사고의 과정을 무의식적 활동과 의식적 활동의 가치의 측면, 직관과 논리의 역할의 측면에서 다루고 있는데, 여기서는 이를 푸앵카레의 '발명의 심리학'이라고 칭하기로 한다. 이 글에서는 푸앵카레의 발명의 심리학에 대하여 살펴보고, 이를 바탕으로 푸앵카레의 이론이 수학 교실에 줄 수 있는 시사점을 생각해 보고자 한다.

1. 수학자 푸앵카레와 의식적・무의식적 활동의 가치

푸앵카레는 1854년 프랑스에서 태어났으며, 1879년에 파리대학교에서 이학박사 학위를 받았다. 그는 카엥대학교에서 강사로 2년간 재직한 것을 제외하고는 파리대학교에서 교수로 재직하였다. 푸앵카레는 수학과 과학을 대중에게 보급하는데 기여를 했으며, 30여 권의 책과 500여 편의 논문을 쓴 다작의 학자였다([13]).

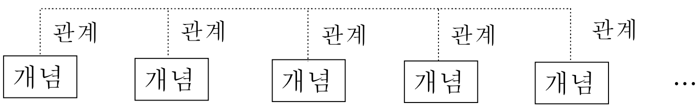
푸앵카레는 수학 분야에서 전반적으로 능통한 학자였는데, 그의 박사학위 논문인 미분방정식 분야와 확률론, 위상수학, 응용수학 등 수학의 여러 영역을 넘나들어 다양한 수학 분야에 기여했다. 그의 수학을 연구하는 과정에 대한 자서전적 글을 보면, 푸앵카레는 안정하지 못하고 서성거릴 때 수학을 머릿속에서 연구하고, 생각이 완성되면 새로 쓰거나 삭제 없이 재빨리 논문으로 만들었다는 것을 알 수 있다.

> 나는 수론의 문제를 연구하였지만, 그럴싸한 결과를 얻지 못하고, 또 이것이 내 연구와 깊은 관계가 있을 것이라는 것도 전혀 느끼지 못했었다. 속이 상하여 바닷가에 가서 며칠 지내기로 하였다. 그리고 아주 딴 짓을 생각하고 있었다. 어느 날 벼랑 위를 거닐고 있을 때 부정 3차 2원 형식의 수론적 변환은 비유클리드기하학의 변환과 같다는 생각이 돌연히 간결하고도 직접적이고 확실성 있게 머리에 떠올랐다([20], p. 34).

이와 같은 푸앵카레의 일화는 수학을 통한 발명이 어떻게 일어나는가에 관심을 갖

는 연구가에게 시사점을 준다. 그는 수학의 발명이란 유용한 조합을 만드는 것으로 물리학 법칙을 발견해 내는 것과 같이, 전부터 알려져 있기는 하지만, 서로 관계가 지어지지 못했던 사실들을 연결시키는 등의 새로운 사실을 찾는 것을 의미한다고 한다. 이것은 형식적 수학 이론이 개념들의 정의와 정의된 개념들의 관계로 구성된 체계라는 의견과 유사하다([2]).

관계란 <그림 1>에서 연역적인 구조로부터 출현하는 매우 특수한 것으로, 개념들은 연결망의 연결 고리이고, 관계는 연결 고리들을 연결하는 유향선분으로 생각할 수 있다. 이러한 연결은 논리적으로 기본적인 연결 고리로부터 더 복잡한 고리들로 순서 있게 진행된다.



<그림 1> 형식적인 수학의 이론([2], p. 33)

여기서 수학적 창의성이란 유용한 새로운 개념을 창안하고, 두 연결 고리간의 이전에 알려지지 않은 관계를 필요한 순서대로 발견하여 유용한 순서를 구성하는 것이다. 예를 들면 군론과 같이 이전에는 무관했던 사실들을 관계 지어 새로운 공리로 설정하고, 그를 바탕으로 하나의 법칙을 만들어 새로운 수학의 영역을 발견해 가는 것이다([20]). 결국 수학적 발명은 과거에 개별적으로 존재하던 사실들이 일정한 관계를 맺어 그 자신뿐만이 아니라, 다른 사실과 관련을 맺게 되는 것이다. 이러한 과정을 통해 각 부분 간 조화가 이루어지고 질서와 통일감을 주어 전체를 구성해 가는 것이다.

그런데 유용한 조합을 산출하는 정신적인 힘은 어떻게 얻어지는가? 많은 지식을 소유한다면 수학을 발견할 능력을 갖추게 되는 것인가? Schoenfeld([21])는 문제를 해결하기 위하여 인지적 자원뿐만이 아니라, 발견술, 제어, 신념체계 등이 요구된다고 하였다. 단지 인지적 능력을 겸비하는 것이 문제를 잘 해결하기 위한 충분조건은 아닌 것이다. 이것은 수학적 발명을 위해 필요한 능력에도 적용된다. 푸앵카레([20])는 수학적 발명을 위해 무의식적 활동의 가치와 중요성을 제시하고 있다.

> 갑자기 하늘의 계시가 내리는 것과 같이 사고의 영역이 활짝 열리는 경우가 있다. 이것은 사실 사고가 오랫동안 무의식 속에서 활동하고 있었다는 것을 나타내 주고 있는 것이다. 이 무의식적 활동이 수학 상의 발견에 크게 공헌했다는 것은 의심할 여지가 없다고 나는 생각한다(p. 35).

문제를 연구하는 과정에서 그 해결 방안이 떠오르지 않을 때 문제에서 잠시 손을 떼고 휴식을 취하는 것은 정신에 새로운 힘을 주어 의식적 활동을 더욱 활발하게 하

기 때문이다. 그렇지만 아무런 사고의 과정도 없이 단지 무의식적 활동만으로 수학적 발명이 일어나는 것은 아니다. 무의식적 활동은 의식적 활동과 더불어 진행되거나, 의식적 활동의 뒤를 따를 때 효과가 있는 것이다. 또한 무의식적 활동을 통해 영감을 얻고 난 후에는 의식적 활동을 통해 결과를 정선하고 검증할 필요가 있다([20]).

푸앵카레의 발명의 심리학은 창의적인 문제해결 과정에 관심이 있는 학자들에게 많은 영감을 주었다. Wallas([23])는 창의적 사고의 과정을 몇 개의 단계로 나누어 창의성을 이해하려고 시도했는데, 준비(preparation), 부화(incubation), 발현(inspiration), 검증(verification)의 4단계로 창의적인 사고 과정을 제시하였다.

준비단계는 의식적 사고 활동의 과정으로 주어진 문제의 배경 정보를 흡수하고, 문제에 대하여 생각하여 가능한 최선의 아이디어를 산출하는 단계이다. 부화단계에서는 무의식적 사고 활동의 과정으로 문제해결의 미완성 상태에서 휴식하는 동안에 문제해결에 관한 기발한 해결책이 떠오르기 쉽다는 것이다. 발현단계는 지금까지 찾고 있던 문제해결책이 번쩍 떠오르는 단계이고, 이 과정에서 떠오른 해결책을 의식적인 사고 과정을 통해 검증하는 단계를 거치게 된다.

월러스(Wallas)는 '부화와 발현'에 대한 생각을 형식화하는데 있어 헬름홀쯔(Helmholtz)와 푸앵카레의 영향을 받았다고 한다. 헬름홀쯔는 새로운 사고 형성에서 준비-부화-조명으로 이어지는 3단계설을 주장하였다([11]). 이와 같이 연구가의 견해를 살펴볼 때, 창의적인 사고 과정에서 무의식적 사고 활동의 가치가 강조되고 있음을 알 수 있다. 이러한 창의적인 사고 과정을 분석하는 방법은 듀이(Dewey)의 문제해결 모델에서도 발견된다([22], p. 23재인용).

창의적인 문제해결 과정이나 수학적 발견의 과정에서 의식적 활동과 무의식적 활동이 모두 중요한다는 것은 주지의 사실이다. 그렇지만 수학의 발명에서 의식적 활동을 주관하는 의식적 자아보다 무의식적 활동을 주관하는 무의식적 자아가 가치가 있음을 푸앵카레의 일화를 통해 확인할 수 있다. 이것은 의식적인 문제해결의 노력으로 해결되지 않는 문제를 무의식적 활동을 통한 영감의 획득으로 해결 가능한 사례를 통해 알 수 있다. 즉 의식적인 노력 뒤에 따르는 오랜 시간 동안의 무의식적 활동에 의해 돌연히 떠오르는 아이디어가 수학적 발명에 유용하다는 것을 의미한다.

그런데 무의식적 활동에서 떠오르는 유용한 조합은 어떤 과정으로 이루어지는 것인가에 대하여 푸앵카레([20])는 두 가지로 그 가능성을 제시하고 있다. 먼저, 처음의 선택이 실마리가 되어 잠재적 자아는 미묘한 직관에 따라 이를 조합의 유용한 것을 통찰하여 불필요한 것들을 만들지 않는다고 판단할 수 있다. 다음으로는 잠재적 자아가 스스로 활동함으로써 모든 조합을 만들 수는 있지만, 단지 유용한 조합만이 의식의 영역 속에 나타나는 것으로 판단할 수 있다.

푸앵카레([20])는 두 가지의 가능성에 대하여 후자의 경우에 대하여 좀 더 가능성을 두고 있다. 그는 잠재적 자아가 맹목적으로 만든 많은 조합에는 관심을 가지지 않으며, 유용한 조합에 관심을 갖는 것은 그것이 우리의 수학적 감수성을 자극하기 때

문이라고 한다([20]). 그리고 우리의 감수성을 자극하는 수학적 대상은 조화 있게 배열된 원소들로 구성된 것으로, 전체를 한 눈에 조감하여 질서 있게 배열함으로써 수학적 법칙을 예감하게 해 주는 것이다. 이러한 수학적 감수성은 심미적인 감정이며, 진실한 감수성을 가진 자만이 느낄 수 있다고 한다.

잠재적 자아가 의미 없게 만든 수많은 조합들은 우리의 관심을 끌지 못하며, 따라서 수학적 감수성을 자극하지도 못하게 된다. 우리의 심미적 감수성을 자극할 수 있는 조합은 조화적이며, 유용하고 아름답기까지 한 것이다. 이러한 조합이 우리의 감수성을 자극할 때 우리의 관심이 그 조합으로 향하게 되고, 마침내 의식의 대상이 되는 것이다([20]).

그렇지만 우리가 수학적 감수성을 가지고 있다고 할지라도 이것만으로 유용한 조합을 아주 짧은 시간에 생산해 낼 수만은 없다. 유용한 조합을 산출해내기 위해서는 무의식적 활동에 선행되는 의식적 활동이 요구된다. 이러한 예비적인 의식적 활동은 유용한 조합의 부분이 될 원소를 자극하여 서로 충돌이 일어나고 서로 결합할 가능성을 열어 놓게 된다. 따라서 유용한 조합을 구성하는 원소들 중에는 우리의 의지에 의해 선택된 것들이 존재하게 되며, 막연한 무의식적 활동보다 의식적 활동의 상호보완적 관계의 유지가 중요함을 알 수 있다.

> 나는 15일간 내가 function fuchsienne라고 명명한 함수와 유사한 함수는 없다는 것을 증명하려고 했다. 매일 수많은 조합을 만들어 보았지만 아무런 결과를 얻지 못했다. 어느 날 밤 나는 전에 없이 우유를 넣지 않은 커피를 마신 탓으로 잠을 이룰 수가 없었다. 많은 생각이 떠오르고 서로 충돌하는 가운데 그 중의 두 개가 서로 밀착하여 안정된 조합을 이루는 것 같은 느낌이 들었다. 마침내 다음날 아침까지는 초기하급수로부터 유도되는 function fuchsienne의 한 부류가 존재함을 증명하기에 이르렀고 나머지 결과는 단지 몇 시간 안에 서 내려갔을 뿐이다([20], pp. 33-34).

위의 푸앵카레의 일화는 무의식적 활동에 선행되는 의식적 활동의 가치와 발명의 심리학에서 의식적 활동과 무의식적 활동의 상보적 관계를 파악할 수 있다. 푸앵카레의 이러한 발명의 심리학은 영감 또는 통찰이라고 부르는 갑작스런 계시가 오로지 우연에 의해서만 생길 수가 없다는 것을 암시한다([16]). 물론 우연이 어느 정도 개입될 수는 있지만, 발명은 다소 강도 높은 의식의 선행 활동에 필연적으로 의존하는 것이다. 따라서 의식적인 활동의 결과로 어느 산출물도 얻지 못했다할지라도 의식적 활동이 아무런 유익한 일을 하지 못했다고 할 수는 없다. 의식적 활동은 무의식적 활동을 촉발하고 무의식이 일해야 할 일반적인 방향을 암시하며, 새로운 결합이 일어나도록 하는데 힘을 줄 가능성이 내재되어 있기 때문이다.

푸앵카레의 발명의 심리학에 비추어 우리의 학교수학 교육은 학문적 지식을 지나치게 강조하는 경향으로 인해 학생들이 수학적 사실을 발명할 기회를 충분히 가지지 못하는 현실이다. 이것은 교육의 대상인 학생보다 교육의 내용을 강조하며, 궁극적으

로는 학생들의 자유로운 사고를 억압하는 결과를 초래하게 되는 것이다([11]). 학생들이 충분히 사고하고 판단하여 결과를 산출하기 보다는 정해진 짧은 시간에 문제를 해결하도록 강요하는 교육 환경은 수학에 대한 부정적 사고를 조장하게 된다. 이러한 이유로 문제해결 교육에서 강조되는 개방형 문제(open-ended problem)는 학생들의 다양한 사고를 보장하고, 충분히 생각하고 탐구할 수 있는 기회를 제공함으로써 수학적 발명의 기쁨을 누리도록 이끌어 주는 좋은 도구이다([12]).

한편, 무의식적 활동 과정에서 여러 가지 조합 중 유용한 조합을 사고의 영역으로 나타나게 하는 것이 수학적 심미안이다. 수학적 심미안은 유용한 선택을 가능하게 하는 원동력이므로 수학 교실에서 학생들이 수학적 심미안을 갖게 하는 것은 중요하다. 푸앵카레가 말하는 수학적 심미안이 수학적 발명을 위해 중요하듯이, 학생들은 학교교육을 통하여 수학적 소양(mathematical literacy)을 갖도록 하는 것이 중요하다([17], [18]). 학생들은 수학교실에서 부딪치는 수학 문제뿐만 아니라, 일상에서 부딪치는 다양한 문제에 접하여 상황과 맥락에 맞는 수학적 개념, 원리, 법칙을 발견하고, 이를 적용하여 문제를 해결할 수 있어야 한다. 상황과 맥락에 맞는 수학적 사실을 찾아 현상에 수학을 적용하고 활용할 수 있는 능력을 기르도록 교육하는 것이 그 수준의 수학적 능력과 발달 과정에 있는 학생들의 수학적 혜안을 길러주는 방법인 것이다.

2. 푸앵카레의 직관과 논리에 대한 견해

수학 학습의 주요 목적은 어떤 문제를 수학적으로 해결하기 위하여 생각하는 힘, 즉 수학적 사고력을 기르는 것이라고 할 수 있다. 철학 사전에서는 사고를 “우리가 문제해결이 요구되는 상황에 당면했을 때 그것을 습관적 수단으로 해결할 수 없을 경우에는 수단의 탐구가 행해지고 그 변형이 일어나며, 또는 수단 체계의 새로운 구성이 일어난다. 이와 같이 문제 상황에 대처하는 정신 기능”이라고 정의하고 있다([1]에서 재인용). 특히 수학적 사고란 대상을 수학적으로 보고 생각하며 수학을 만들고 다듬어 가는데 근원이 되는 생각이라고 할 수 있다.

수학적 사고는 수학교육의 목표 달성 면에서 생각되는 수학적 사고, 수학의 특성이나 수학적 방법 면에서 생각되는 수학적 사고, 수학의 내용면에서 생각되는 수학적 사고 등과 같이 다양한 관점에서 분류하거나 구분할 수 있다([1], [9]). 이 중 수학의 특성 상 수학을 행하는데 중요한 사고이면서, 서로 상반되기보다 상보적 역할을 하는 ‘직관(intuition)’과 ‘논리(logic)’의 위상과 역할 및 관계 등을 논의할 필요가 있다.

직관과 논리에 대해서는 학자에 따라 그 정의와 표현도 조금씩 다르다([1]). 일반적으로 직관은 “사유의 작용 없이 대상을 직접 파악하는 작용([1]에서 재인용)”을 의미하며, 직관적 사고는 “분석・비교・종합 등 논리적 수순을 밟지 않고, 결론을 이끌어 내는 사고의 형태(p. 525)”라고 할 수 있다([3]). Fischbein([14])은 직관을 ‘직관적인 지식’과 같은 인지 형태로 간주하였으며, 직관은 ‘직관적 사고’와 같은 의미로 쓰

이기도 한다([8]). 직관은 지식의 창조 과정에 참된 지식을 발명하는 도구이며, 문제해결 과정에서 문제해결의 방향이나 문제해결의 실마리를 제공하여 통찰, 계시, 영감과 같이 번뜩이는 아이디어가 발현되는 것이다. Wittmann([24])은 직관적 사고가 구체적인 도형이나 기호로 표현된 대상에 대하여 직접적인 방법으로 진행되며, 구체적이고, 즉각적이며, 부분적으로는 무의식적이라고 하였다.

Fischbein([14])은 수학과 과학 분야에서 직관에 관한 많은 연구를 수행하였는데, 직관의 특성으로 자명성, 내재적 확실성, 전체성 등을 들고 있다. 또한 그는 직관을 역할에 의해 단정 직관, 추측 직관, 예측 직관, 결정 직관으로, 기원에 의해 개인의 경험에 바탕을 두고 발전하는 제1직관과 본래의 근원이 없는 새로운 직관을 계발할 수 있다는 가정 하에 제시되며, 학교 교육을 통하여 직관을 계발할 수 있는 가능성을 제시하는 제2직관으로 구분하여 제시하고 있다.

한편, 논리는 "오류를 범하지 않는 사고의 형식과 규칙"을 의미하며([7]), 논리적 사고는 "전제에서 결론을 이끌어 내는 과정이 분석적이고 단계적이며, 후속의 명제는 선행하는 명제로부터 정당하게 이끌어진 사고 작용([3], p. 135)"이라고 할 수 있다. 여기서 '분석적이고 단계적'이란 의미는 '가설-증명-음미'의 단계에서 있을 수 있는 비교, 변별, 분석, 종합과 같은 사고・행동 양식을 뜻한다. 그리고 '후속의 명제는 선행하는 명제로부터 정당하게 이끌어진 사고 작용'이라는 의미는 수학의 전개 방식으로 이론의 근거를 분명히 하는 공리론적 방법이나 그 밖의 연역적 추론방법에 근거를 둔 것으로 바른 사고, 또는 어느 집단에서나 인정받을 수 있는 사고를 뜻한다. 따라서 직관은 수학의 학습과정에서 "왜 그렇게 되는가?"의 왜(why)에 초점이 맞추어지며, 이론의 근거를 분명히 하여 어느 집단에서나 인정을 받을 수 있는 사고이다([1], p. 118).

Wittmann([24])은 논리에 해당되는 사고로 반영적 사고(reflective thinking)를 들고 있는데, 반영적 사고는 일반적인 관계나 절차의 명확한 형식화를 목표로 한다고 한다. 그는 반영적 사고에서 개념에 대한 수학적 언어와 기호는 필수적이지만, 반영적 사고는 직관적 사고에 비해 메타 수준이며, 사고의 주체는 자신의 활동에 대하여 반성해야 한다고 한다.

푸앵카레([19])는 수학분야에서 많은 연구 결과를 산출한 수학자들의 예를 제시하며, 수학적 발명의 과정에 직관과 논리의 역할에 대하여 제시하였다. 그는 직관에 대하여 수학에서 직관 없이는 진정한 창의적인 활동이 불가능하며, 직관은 논리적으로 타당한 길을 선택하는 힘을 부여한다고 보았다. 그는 직관이 탐구자가 길을 선택하는데 필요한 것이며, 또한 탐구자의 뒤를 이어 그가 발견한 것을 공부하려는 사람이 탐구자가 왜 그 길을 택하였는가를 알려고 할 때도 마찬가지로 직관이 필요하다고 하였다(p. 70).

그렇지만 직관은 우리에게 엄밀성을 주지 못하며, 완전한 확실성조차 줄 수도 없기 때문에 수학의 발명 과정에서 지식의 확실성을 보장받기 위하여 직관에서 논리로의 전환이 일어나야 한다([19]). 수학의 발명 과정에서 논리도 직관과 마찬가지로 독

특한 역할을 가지고 있는데, 논리는 수학의 발명에 확실성을 부여해 주는 유일한 것으로 증명의 도구이다. 수학에서는 논리를 해석이라고 부르는데, 해석이란 분석, 분해를 의미한다. 이것은 현미경으로 동물의 세포를 관찰하고 분석하는 것과 같이 논리가 수학적 사실의 확실성을 확인하거나 기각하는데 이용된다는 것이다.

수학자들의 논문을 살펴보고 푸앵카레([19])는 두 종류의 수학자로 구분하여 기하학적 학파와 해석학적 학파로 제시하고 있다. 기하학적 학파는 연구에 직관의 힘을 이용하며, 이 부류의 학자를 전장에서 확실한 승리의 전략도 없이 일거에 급속히 쳐들어가는 최전방의 용사와 같다고 비유하고 있다.

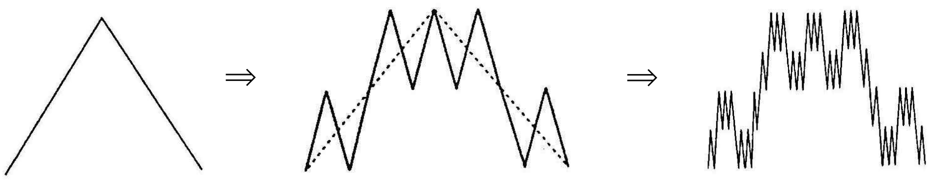
반면에 푸앵카레는 수학자의 논문이나 저서가 매우 논리적으로 구성되어 있어서 어느 한 부분도 우연에 의해 만들어진 점이 없는 수학자를 해석적인 학파로 구분하고 있다([19]). 그는 이 부류의 학자를 마치 포위작전을 하면서 적의 성곽을 한발씩 진격해 가며 점차로 조여 가는 용병술을 구사하는 전문가에 비유하고 있다.

그렇지만 기하학적 학파와 해석학적 학파의 구분은 내용에 따라 구분되는 것이 아니라, 수행을 행하는 정신적 소질에 의해서 구분되며, 천성에 따른다고 한다. 예를 들면 해석적 학파에 속하는 학자는 기하학의 연구를 할 때에도 해석적이라는 것과 같이 수학자가 새로운 문제를 접할 때 그 소질이 나타나게 되는 것이다([19]).

푸앵카레는 수학자를 실례로 제시하며, 수학자들을 두 부류로 구분하고 있다. 예를 들면 19세기의 독일의 수학자인 바이어스트라스(Weierstrass)와 리만(Riemann)을 들고 있는데, 바이어스트라스는 해석학적 학자로 그의 논문에는 도형을 찾아볼 수 없으며, 리만은 기하학적 학파로 그는 연구에 기하학의 도움을 받는데 모든 관념을 도형을 표현하곤 했다고 한다([19]). 이러한 경향은 다른 여러 수학자의 일례를 통해서도 알 수 있는데, 학생들에게서도 이러한 경향은 나타난다.

그렇지만, 수학의 역사를 살펴볼 때 온전히 직관만으로, 또는 논리만으로 수학을 발명하기란 쉽지 않다. 발명의 과정에서 직관적으로 옳게 보이는 현상에도 오류가 내재되어 있는 경우가 많이 있다. 예를 들어 직관적으로 판단할 때 우리는 연속함수에 대응하는 그래프에 부착하는 암묵적 그림 모델 때문에 연속함수는 모든 점에서 미분계수를 가져야 한다고 믿는 경향이 있다([14]). 우리는 선이 폭이 없다는 것을 알고 있다고 할지라도, 폭이 없는 직선이나 곡선을 생각할 수 없다. 따라서 직선과 곡선의 띠를 서로 관통하지 않게 접촉하는 위치에 놓는 상황을 상상을 하게 된다. 따라서 곡선은 언제나 접선을 갖게 되며, 연속함수는 반드시 도함수를 갖는다는 잘못된 결론을 이끌어 낼 수 있다([19]).

한(Hann)은 <그림 2>와 같은 구체적 모델을 이용하여 직관적으로 연속함수가 미분계수를 갖지 않을 수 있음을 보이고 있다([14]에서 재인용). <그림 2>와 같이 오르막과 내리막 선분을 꺾은선으로 대치하고, 그 선분을 더 작은 선으로 이루어진 꺾은선으로 다시 그리면 선분의 수가 증가함에 따라 어떤 점에서도 정확한 기울기를 갖지 않는 특정 곡선에 접근할 수 있다는 것을 알 수 있다.



<그림 2> 미분계수 모델([14], p. 137)

그러나 이 과정이 끝없이 계속된다는 것을 직관적으로 알 수 있지만, 그 과정의 극한인 곡선 그 자체를 직관적으로 깨달을 수는 없다. 이러한 곡선은 존재하지 않으며, 곡선은 우리의 상상 속에서 여전히 가느다란 잉크 자취정도로 남아 있게 된다. 그런데 미분계수가 없는 곡선은 아무리 작더라도 잉크 반점으로 이루어진 것이 아니라, 순수하게 개념적이고 차원이 없는 점으로 이루어져 있는 것이다([14]).

그림 모델이 곡선을 표현하고 곡선으로 표현된 함수의 성질을 많이 보여 주어 직관의 영역으로 그 연구의 대상을 끌어들이지만, 한계도 있음을 알아야 한다. 즉 그림 모델이 직관적 판단의 유용한 도구이지만, 그림 모델에 의한 직관적 판단에 의존할 때 오류가 야기될 수 있음을 보여준다. 이러한 예는 푸앵카레가 주장하듯이 직관과 논리의 상호보완적 관계가 수학 학습에 중요하다는 것을 말해 준다. 다음의 예를 보자.

길이가 다른 두 선분 위의 점의 수는 같은가? 다른가? 라는 문제에 학생들은 당황해 한다. 분명히 선분 CD에는 선분 AB보다 많은 점들이 있다. 이러한 판단은 점이 물리적 반점이라고 생각하는 직관적 판단에 의한 것이다. 따라서 선분이 더 길수록 더 많은 점을 포함한다고 판단하는 것이다.

<그림 3> 두 선분 위의 점의 비교

위의 예에서와 같이 직관에 의존한 방법으로는 잘못된 결론에 도달할 수 있다. 따라서 직관에 의한 판단은 논리의 힘을 빌려 개념적으로 확인·검증받는 과정을 겪어야 한다. 우리는 사실의 확실성과 타당성을 얻기 위하여 논리에 의존하게 되는 것이다.

그렇지만 순수한 논리는 언제나 우리를 반복에로 이끌 뿐이어서 새로운 것을 만들어내는 힘이 없다. 따라서 순수 논리 외에 그 무엇이 필요한데 바로 직관인 것이다([19]). 우리가 직관적으로 인식하는 사실은 감각에만 의존하는 것이 아니다. 사람

은 몇 가지 종류의 직관을 갖는데, 감각 및 상상에 따른 직관, 귀납적 개괄에 의한 직관, 순수한 수의 직관을 들 수 있다. 이 중에서 감각 및 상상에 따른 직관과 귀납적 개괄에 의한 직관에 의해서는 확실성을 얻을 수 없다. 순수한 수의 직관에 의해 우리는 엄밀함을 구할 수 있는 것이다([19]). 순수한 수의 직관과 같이 직관에 의존하여 새로운 사실을 발명해 내지만, 직관적 인식의 이면에는 엄밀한 수학적 논리가 내재되어 있는 것이다.

논리에 의해 엄밀하게 만들어진 수학은 결점은 없으나, 엄밀성을 추구해감에 따라 그 발생의 과정을 망각하게 된다. 논리에만 의존할 때 수학적 사실들은 현상과의 관계를 끊고, 오로지 추상적인 체계로서 수학만이 존재하게 되며, 수학은 그 자체로 무의미한 공허한 변론에 지나지 않게 된다([19]). 따라서 직관에 의해 수학적 사실의 의미를 파악하고 느껴야만 진정한 수학을 경험하게 된다.

학생들이 문제를 해결할 때 논리에만 치중하면 문제를 오직 해결할 수 있는가에만 관심을 가지게 되고, 최초의 사고자가 이 문제와 관련된 수학적 개념의 형성과정에서 어떤 과정으로 그 사실을 발명하게 되었는가를 고려하지 않게 된다. 이러한 이유로 수학 학습에서 논리만을 강조하거나, 직관만을 강조해서는 안 되는 것이다. 이 사실로 푸앵카레([19])는 "논리만으로 불충분하다는 것, 논리 과학만이 유일한 과학이 아니라는 것, 그리고 직관은 논리에 보충, 혹은 보정 해독의 역할을 한다(p. 68)"라고 하고, 직관과 논리의 상호 보완적인 역할을 강조하고 있다.

푸앵카레([19])가 해석학적 학자로 제시한 바이어스트라스에 대하여 Hadamard([16])는 해석학적 학자인 바이어스트라스도 최초의 직관 다음에 논리가 개입한다는 사실을 들어, 직관과 논리의 상호 보완적 관계를 강조하고 있다.

> 여기에서 그는 단 하나의 도형을 그리는데, 그 다음에는 의심할 수 없는 그의 특징인 극도의 논리적인 방식으로 모든 것이 연역된다. 그래서 수학의 방법론을 충분히 아는 사람이라면 누구나 이 도형을 한 번 보고 모든 추론을 재구성할 수 있을 것이다. 물론 최초의 직관이 있었으니, 바로 이 도형을 만든 직관이다(p. 111).

이 예는 수학적 발명의 과정에서 논리는 수학적 진리의 완전함을 보장하지만, 직관은 많은 길 중에서 논리적으로 타당한 길을 선택하도록 힘을 부여한다는 것을 말해준다. 수학에서 순전히 직관적이거나 논리적인 발명은 찾기 어렵다. 그래서 무의식의 개입이 필요한데, 무의식의 개입은 논리적 작업을 위한 출발점인 것이다.

직관과 논리의 상호 보완적 관계에 대하여 Hadamard([16])는 무의식 속에는 여러 층이 있으며, 아이디어가 만나고 결합하는 수준이 의식과 멀리 떨어질 수도 있고 가까워 질 수도 있다고 한다. 그는 아이디어가 결합하는 수준이 깊을 때에는 보다 직관적인 정신이라 하고, 이 수준이 의식과 충분히 가까운 곳에 있을 때 논리적 정신이라고 한다. 아다마르의 관점에서 푸앵카레의 수학적 발명의 일화들은 무의식의 심연에서 개발된 아이디어를 그대로 의식에 옮겨 놓는 경우이다. 푸앵카레의 착상은 직

관에 의해 계시를 받았지만, 그 발견을 발표할 때에는 논리적인 과정을 따른 것이다.

푸앵카레([19])는 수학자 정신을 논리적인 것과 직관적인 것으로 나눈 것이 단지 나타내어지는 현상에 대한 것이고, 실제로 수학자의 정신은 한 가지라고 말하고 있다. 그러한 예로는 지극히 논리적인 해석학자의 경우에도 대상을 시각적으로 표현하지 않았을 뿐이지, 직관에 의해 개념들이 내적 통일의 원리를 가지고 있다는 것을 느끼기 때문이다. 이 해석학적 학자는 감각의 도움을 받는 직관과 순수 직관 중 바로 순수한 논리적 형식의 직관을 이용하고 있는 것이다. 이와 같이 직관과 논리는 따로 떼어서 생각할 수 없는 것이다.

논리와 직관의 상보적인 관계에 대한 언급은 다른 학자들의 연구에서도 나타난다. Wittmann([24])은 수학적 지식의 생성 과정에서 직관적 사고와 반영적 사고의 상보성을 제시하였다. 그는 직관적 사고가 증명을 검증하고 오류를 찾아내는데 필수적이며, 직관적 사고에 의존한 반영적 사고는 수학의 성장에 필수적이라고 하였다.

박성택 등([5])은 수학적 사고를 직관적 사고와 논리적 사고로 구분하고, 이들 관계를 상보적인 것으로 파악하였다.

> 직관과 논리는 서로 상반된 듯한 인식이면서 상보적인 역할 관계에 있으며, 동시에 일어나는 것은 아니지만, 수학적으로 사고하는 경우 거기에는 긴밀한 연대성을 요구하는 것이다. 직관으로 예상을 세워서 논리로 정리하고 확인하게 되며, 또한 논리적으로 정리된 결과야말로 거기서부터 새로운 직관이 낳아지는 것이다. (중략) 논리적 사고는 직관적인 판단에 대하여 의문이나 불안감이 생길 때에 일어나는 것이고, 이 직관적 판단은 논리적 사고를 거쳐야 비로소 그 확실성을 보장받게 된다(pp. 29-30).

푸앵카레의 직관과 논리의 의미와 역할에 대한 논의와 이들의 상보적 관계의 중요성은 우리의 수학교육에 시사하는 바가 크다. 수학자들이 수학적 지식을 발명하는 과정에서 직관과 논리의 역할을 적절히 활용하듯이 수학 교수-학습은 직관과 논리의 조화로운 균형을 유지하여야 한다.

수학 문제해결교육을 예로 들면, 한정된 시간 안에 순차적으로 빠르고 정확하게 알고리즘을 수행하는 문제해결에 관심을 두었던 교육 환경에서는 학생들이 창의적으로 문제를 해결할 수 있는 기회가 적다. 학생들은 문제에 대하여 다양한 해결 방법을 모색해 보고 충분히 숙고할 시간을 가짐으로써 문제해결의 실마리를 스스로 발견해 내는 직관의 힘을 느껴야 하며, 스스로 발견한 사실에 확실성을 부여하기 위하여 논리적으로 검증할 기회를 가질 필요가 있다. 또한 논리적 검증 과정에서는 직관에 의해 초래될 수 있는 오류를 교정하기 위하여 자신의 사고를 체계적으로 모티터하는 메타인지적 사고를 병행하는 것도 바람직하다. 이와 같이 문제해결 과정에서도 직관과 논리를 적절히 활용하는 체계적인 문제해결의 경험을 통하여 학생들은 수학적 문제해결 능력을 기를 수 있다.

3. 결론

수학 학습 과정에서 학생들이 창의적으로 문제를 해결할 수 있도록 지도하는 방안에 대한 요구가 높다([4]). 학생들이 창의적으로 문제를 해결한다는 것은 다양하며 독특한 자신의 방법으로 문제를 해결한다는 의미이고, 그런 면에서 창의적으로 문제를 해결할 수 있는 능력을 겸비한 학생들은 그 수준의 수학자라고 할 수 있다. 수학 분야에서 자신의 수학적 발명 과정을 바탕으로 창의적인 수학적 발명에 대한 아이디어를 제시한 수학자로 푸앵카레를 들 수 있다.

푸앵카레는 창의적인 문제해결 과정이나 수학적 발명의 과정에서 의식적 활동과 무의식적 활동의 중요성을 강조하였다. 그는 무의식적 활동에 선행되는 의식적 활동의 가치와 수학적 발명의 과정에서 의식적 활동과 무의식적 활동의 상보적 관계를 확인하였는바, 수학적 발명은 발명의 실마리가 되는 갑작스런 계시가 오로지 우연에 의해서만 생길 수가 없다고 한다([16]).

마찬가지로 푸앵카레([19])는 수학분야에서 많은 연구 결과를 산출한 수학자들의 예를 제시하며, 수학적 발명의 과정에서 직관과 논리의 역할에 대하여 논의하였다. 그는 수학적 발명의 과정에서 논리는 수학적 진리의 완전함을 보장하며, 직관은 많은 길 중에서 논리적으로 타당한 길을 선택하도록 힘을 부여한다고 하였다. 이것은 수학에서 순전히 직관이나 논리만으로는 온전한 발명을 할 수 없다는 것을 제시한다.

푸앵카레와 여러 학자들의 공통적 견해는 수학적 발명의 과정에서 직관과 논리의 상보적 관계의 중요성을 제시한 것이다. 최근에 수학교육 이론의 발달과 학교 교육현장에서 많은 변화가 있기는 하지만, 여전히 수학 자체를 완성된 지식 체계로 간주하고, 수학적 개념・원리・법칙을 형식적이고 논리적으로 지도하는 경향이 강하며 학생들이 접하는 문제도 논리적 사고력을 요구하는 문제가 대부분이다. 이러한 수학 학습 문화에 의해 학생들을 대상을 실시한 직관적 사고력 검사 결과는 문제해결 과정에서 직관에 의한 문제해결 능력이 낮으며, 자신의 답을 확신하기 위하여 주로 계산이나 증명의 방법을 선호한다는 것을 보여주고 있다([6], [8]).

한편 푸앵카레가 지적하듯이, 직관은 진정한 창의적인 활동을 가능하게 하고 논리적으로 타당한 길을 선택하는 힘을 부여하며, 논리는 수학적 발명에 확실성을 부여해주는 유일한 것으로 증명의 도구이다. 그런데 학생들이 수학 문제를 해결할 때 감각 및 상상에 따른 직관에 의존할 때 직관에 의해 오류가 발생되기도 한다. 예를 들어, '주어진 선분 위의 임의의 점을 선택하고 이 선분을 이등분한다. 새로 만들어진 선분들을 다시 이등분한다. 계속해서 만들어지는 선분들을 각각 이등분해 갈 때, 어떤 이등분점이 임의로 선택된 점에 도달할 것인가'라는 문제에, 유리수와 무리수에 대하여 학습한 응답자의 81.2%가 도달한다고 오답을 하였다([15]). 이것은 무한히 선분을 나누어가게 되면 언젠가는 처음 선택한 점에 도달할 것이라는 상상에 따른 직관에 의한 결과인 것이다.

수학교육은 직관에 의한 오류를 교정하기 위하여 의식적으로 자신의 사고과정을 뒤돌아보는 메타인지적 사고를 하도록 장려해야 한다. 메타인지적 사고는 체계적인 교정의 과정을 통해 오류를 수정할 기회를 제공할 수 있다. 또한 직관에 의해 해결된 문제의 경우에 논리적인 입증과정을 거쳐 해결 방법의 확실성을 보장받는 기회를 제공해야 한다. 마찬가지로 논리에 의존하는 교육의 형태에서 문제에 대해 숙고하고 해결의 실마리가 떠오르지 않을 때는 새로운 방법으로 접근할 수 있는 여유 있는 교육을 해야 한다.

참 고 문 헌

1. 강시중, 수학교육론, 서울: 교육출판사, 1992.
2. 강치형, 김수환, 라병소, 박성택, 이의원, 정은실, 7차 교육과정에 의한 초등수학교육, 서울: 동명사, 2008.
3. 교육공학사전 편찬위원회, 교육공학사전, 서울: 시청각교육사, 1972.
4. 교육과학기술부, 2007 개정 수학과 교육 과정, 교육과학기술부, 2007.
5. 박성택, 신택균, 양인환, 손용규, 이정재, 수학교육, 서울: 동명사, 1993.
6. 박현주, 수학문제 해결과정에서 직관적 사고 분석. 전주교육대학교 석사학위 논문, 2004.
7. 서울대학교교육연구소, 교육학 용어 사전, 하우, 1994.
8. 이대현, 수학문제해결과정에서 고등학생들의 직관적 사고의 분석, 한국교원대학교 박사학위논문, 2001.
9. 이용률, 성현경, 정동권, 박영배(역), 수학적인 생각의 구체화, 서울: 경문사, 1992.
10. 이종록, 김택윤, 창조교육이론, 서울: 교육과학사, 1996.
11. 임선하, 창의성에의 초대, 서울: 교보문고, 1996.
12. Becker, J. P., & Shimada, S., *The Open-Ended Approach: A New Proposal for Teaching Mathematics,* Reston: NCTM, 1997.
13. Eves, H., *An Introduction to the History of Mathematics*, Holt Rinehart And Winston, 1953.
14. Fischbein, E., *Intuition in science and mathematics: An Educational Approach,* Dordrecht: D. Reidel Publisching Company, 1987.
15. Fischbein, E., Tirosh, D., & Hess, P., *The Intuition of Infinity,* Educational Studies in Mathematics, 10 (1979) 3-40.
16. Hadamard, J., *An essay on the psychology of invention in the mathematical field,* Priceton university press, Princeton, 1945.
17. NCTM., *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.* Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc., 1989.
18. _______, *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc., 2000.
19. Poincaré, H., 김형보 역, 과학의 가치, 단대 출판부, 1983.
20. __________, 김형보, 오병승 역, 과학의 방법, 단대출판부, 1982.
21. Schoenfeld, A. H., *Mathematical problem solving*. California: Academic Press, 1985.
22. Starko, A. J., *Creativity in the classroom*. Longman publishers USA., 1995.

23. Wallas, G., *The Art of Thought*. Harcourt Brace, 1926.
24. Wittmann, E., *The complementary roles of intuitive and reflective thinking in mathematics teaching,* Educational Studies in Mathematics, 12(3) (1981) 389-397.

The Study on the Poincaré's Psychology in Invention[1)]

Gwangju National University of Education Lee Dae Hyun

Poincaré is mathematician and the episodes in his mathematical invention process give suggestions to scholars who have interest in how mathematical invention happens. He emphasizes the value of unconscious activity. Furthermore, Poincaré points the complementary relation between unconscious activity and conscious activity.

Also, Poincaré emphasizes the value of intuition and logic. In general, intuition is tool of invention and gives the clue of mathematical problem solving. But logic gives the certainty. Poincaré points the complementary relation between intuition and logic at the same reasons.

In spite of the importance of relation between intuition and logic, school mathematics emphasized the logic. So students don't reveal and use the intuitive thinking in mathematical problem solving. So, we have to search the methods to use the complementary relation between intuition and logic in mathematics education.

Key words: invention, creativity, unconscious activity, conscious activity, intuition, logic

2000 Mathematics Subject Classification: 97C50

ZDM Classification: C30

접수일 : 2009년 6월 8일 수정일 : 2009년 8월 5일 게재확정일 : 2009년 8월 7일

1) This work was supported by Gwangju National University of Education Research Grant