한국수학사학회지 제22권 제3호(2009년 8월), 131 – 152

에우독소스의 비례론과 데데킨트의 실수계에 관한 고찰

순천이수중학교 강대원
kdw1467@hanmail.net

순천대학교 수학교육과 김권욱
kkwook@sunchon.ac.kr

에우독소스의 비례론이 데데킨트가 실수를 현대적으로 정의한 '데데킨트 절단'과 일치한다고 해도 과언이 아니다. 데데킨트는 2000년보다 더 앞선 에우독소스의 방법을 근거로 조사함으로써 실수체계에 대한 확고한 기초를 확립하였다고 볼 수 있다. 그래서 데데킨트의 정의에서 그리스 유산을 구별하는 것은 가치가 있을 것으로 판단된다. 그런데 에우독소스의 비례론과 데데킨트 절단 사이에는 '근본적인 차이'가 존재한다. 그리스인들은 수(number)와 공간적 크기(magnitude)사이의 구별에 생각이 미치지 못한 것으로 보인다. 본 논문에서는 비와 비례 개념에 대한 에우독소스의 설명과 '데데킨트 절단'을 통한 실수의 구조와의 관계를 살펴봄으로서 에우독소스의 비례론이 데데킨트의 실수의 완비성을 증명하기 위해 도입된 절단의 개념과 어떤 관계가 있으며 어떤 영향을 끼쳤는지를 고찰하고자 한다.

주제어 : 에우독소스, 데데킨트, 비와 비례, 데데킨트의 절단, 통약불가능

0. 들어가는 말

기하학은 선, 평면, 입체 등의 공간적 크기[1]를 대상으로 하는 반면, 산술학은 수를 대상으로 한다. 공간적 크기는 연속적, 불가분적[2]이지만, 수는 가분적, 불연속적이다.

1) 여기서 '공간적 크기'는 영어의 'magnitude'를 번역한 것이다. 아리스토텔레스는 양(quantity)을 불연속적인 수(number)와 연속적인 공간적 크기(magnitude)로 분류하고 있다(Cat. 4b20). 또한 그는 『형이상학』 5권13장에서 양에 대해서 정의를 내린 다음에 이러한 구분을 하고 있다(본 논문 2-1절 확인). 그런데 Heath(1956)는 유클리드의『원론』을 번역하면서 "quantity" 대신 "magnitude"를 사용하여 둘 사이를 구별하지 않았으며, 'magnitude'을 '크기의 속성을 가진 것(p.117)'으로 하였다. 그러나 전반적으로 양(quantity)과 구별하기 위하여 량, 크기 등으로 번역하고 있으나 size(크기)와 구별되지 않아 본 논문에서는 '공간적 크기'라는 단어를 사용하기로 한다.

2) 불가분(indivisibility)이란 더 이상 나누어 질 수 없는 양, 즉 '불가분량'(不可分量)을 뜻한다. 평면도형은

수학의 이 두 영역은 역사적으로 각기 다른 전통 위에서 발전하였다. 기하학은 고대 그리스에서 발전하면서 엄격하게 연역적이며, 이론적인 학문으로 성립되었으나, 산술학은 이집트 등에서 실용적으로 발전했고, 경험적으로 발견된 성질들에 의존하였다.

그런데 양적 크기에 대한 두 종류 사이의 관계는 오랫동안 수학자 및 철학자들을 괴롭혔던 문제였다. 거슬러 올라가 고대 제논의 역설에서 다루어졌던 문제도 이것과 관계된다고 하겠다. 그의 문제는 불가분적 크기인 기하학적 선을 가분적 점의 집합으로 구성할 수 있는가의 문제라고 규정할 수 있을 것이다. 중세를 거치면서 대수학의 발전으로 수학의 두 영역은 서로 교차하기 시작하였다. 대수학을 받아들이면서 구체적인 공간표상으로부터 해방되어 보다 일반적인 수학으로 발전하게 되었으며, 반면에 산술학은 연역적인 체계를 추구하기 시작하였다.

그런데 근대에 들어와서 공간적 크기들을 대수학을 통해 구성하는 해석학이 제기되면서, 다시 이 문제는 철학적인 주목을 받게 되었다. 이는 연속적 크기인 시간과 공간을 불연속적인 수를 통해 재구성하는 문제이기 때문이다. 이런 해석학은 무한의 개념을 도입함으로써 미적분학으로 발전하였다[3].

연속체는 연속적 크기인 시간과 공간을 수학화한 것이며 실수의 중요한 성질을 표현한 것이다. 그러나 시간이나 공간의 개념은 오랫동안 철학적 논쟁의 대상이 되어온 매우 난해한 개념으로, 연속체로서의 시간과 공간이 실수로 표현된다는 것과 실수가 시간과 공간의 성질을 추상화한 것이라는 순환의 논쟁을 낳게 하였다. 이는 실수의 본질과 시간이나 공간의 본질이 무엇인가 하는 보다 근원적인 문제를 유도하며 수학의 역사는 19세기 말에 이르러서야 이에 대한 수학적인 해답을 얻는다.[4]

19세기 말, 코시, 바이어슈트라스, 데데킨트 등의 수학자들은 미적분학의 기법들을 떠받치는 극한 이론을 개발하려 노력하였고, 그 과정에서 실수 연속체의 본성에 관한 보다 심오한 연구를 해야만 하였다. 그들이 출발점으로 삼는 것은, 실수 연속체를 양방향으로 무한히 뻗은 직선 위에 배열된 점들 –실수들– 의 집합으로 간주하는 것이었다. 그래서 코시는 유리수를 출발해서 유리수 수직선에 새로운 점들을 추가하는 방식으로 실수를 형식적으로 구성하였으며, 새로운 점들은 수들이 서로 가까워지는 성질을 지닌 모든 유리수 수열들의 극한으로 정의되었다. 이와는 다른 방식으로 데데킨트는 유리수로부터 실수를 구성하는 방법으로 절단을 통해 정의를 이끌었다. 이러한 개념들은 수학적으로 동치이며, 비직관적인 완비성 공리에 의해 재조직되어 보다 고등적인 형식으로 다시 제시되었다.

웨이유(Andre Weil)[5]는 “우리들은 그리스 사고의 유산들을 물려받은 무게로 어깨

더 이상 나눌 수 없는 불가분량(不可分量)의 어떤 선분들의 무한집합이고 입체는 더 이상 나눌 수 없는 불가분량(不可分量)의 평행한 단면들의 무한집합이라는 것이다.

3) 이병창(1997), 헤겔의 수 개념 – 미분 계산의 정당화, 경남대학교 철학과 논문집.

4) Russell. B, 임정대 역(1986), 수리 철학의 기초, 연세대학교 출판부, p.134. 한대희(1997) 논문에서 재인용

5) Morris Cline, 박세희 역(1980), 수학의 확실성, 민음사, p.386.

가 축 처지고, 또한 르네상스 시대의 영웅들의 발자취가 남겨진 길을 따라가고 있는 우리들에게 있어서 수학이 없는 문명이란 생각할 수가 없다"고 하였듯이, 현대수학에서 그리스인들의 은혜가 헤아릴 수 없이 많다는 것이다. 그런데 Heath(1956)[6]는 에우독소스의 비례론과 데데킨트가 실수를 현대적으로 정의한 '데데킨트 절단' 사이에 밀접한 관계가 있음을 말하고 있다. 더욱이, 완전히 일치한다고 해도 과언이 아니다. 그러나 에우독소스의 비례론과 데데킨트 절단 사이에는 '근본적인 차이'가 존재한다. 그리스인들은 수와 공간적 크기사이의 구별에 생각이 미치지 못한 것으로 보인 반면, 데데킨트는 연속적인 공간적 크기를 수 개념으로 확장하여 기하학에 의존하지 않고 무리수의 도입을 근거 짓는 방법으로 '유리수 절단'이라는 개념을 도입하였다. 따라서 데데킨트의 정의에서 그리스 유산을 구별하는 것은 가치가 있을 것으로 판단된다.

정은실(2003)[7], 박정숙(2008)[8]은 비와 비례 개념의 역사적 발달 과정을 분석하였다. 특히, 박정숙은 비와 비례 개념에 대한 발달과정에 초점을 맞추어 처음에는 산술적인 의미로 파악하였다가 통약불가능한 값의 발견으로 인하여 기하적인 의미로 비와 비례 개념이 대체 되었다가 다시 대수 표기법의 발달로 인해 산술적 의미와 기하학적 의미를 모두 포함하는 대수적인 의미로 확장되었음을 분석하고 있다. 본 논문에서는 선행 연구에서 미비한 비와 비례에 대한 에우독소스의 설명과 실수에 대한 '데데킨트 절단'의 구조와의 관계를 살펴봄으로서 에우독소스의 비례론이 데데킨트의 실수의 연속성을 증명하기 위해 도입된 절단의 개념과 어떤 관계가 있으며 어떤 영향을 끼쳤는지를 고찰하고자 한다.

이를 위해 본 논문에서는 먼저, 그리스시대의 비례론으로 피타고라스학파의 비례론과 에우독소스의 비례론을 알아보고, 그런 다음에 데데킨트가 공간적 크기를 수 개념으로 확장하여 무리수를 정의하는 데데킨트 절단에 대해서 살펴보고자 한다. 다음으로 그리스의 비례론과 현대 수학과의 관계를 연구하기 위해 그리스 수학에서의 양의 범주(수와 공간적 크기)에 대한 철학적 기초 위에서 에우독소스의 비례론과 데데킨트 절단 사이에 밀접한 관계가 있음을 분석한다. 마지막으로 에우독소스의 비례론과 데데킨트 정의 사이의 근본적인 차이를 분석한 후 그것을 기반으로 데데킨트가 실수체계에 대한 확고한 기초를 확립하는데 2000년보다 더 앞선 에우독소스의 영향을 받았음을 추론하고자 한다.

1. 에우독소스의 비례론과 데데킨트 절단

6) Heath, Thomas, Little. 이무현 역(1998), 기하학원론, 나권 해설서. p.21.
7) 정은실(2003), 비 개념에 대한 역사적, 수학적, 심리적 분석, 대한수학교육학회 <학교수학>, 제5권 제4호.
8) 박정숙(2008), 비와 비례 개념의 의미와 표현에 대한 역사적 발달 과정, 한국수학사학회, 제21권 제3호.

두 선분A 와 B에 대하여 두 선분의 크기를 비교하는 경우에, 선분A 을 p 배하여 선분B을 정확하게 얻을 수 있으면 선분B의 크기를 A로 즉, $B = p \cdot A$로 나타내고, 선분B의 길이는 선분A 을 p 배하여 얻는다고 한다. 그러나 선분B가 선분A 을 정수 배하여 얻을 수 없는 경우에, 두 선분 사이의 길이에 대하여 선분A 을 n 등분하여 길이 $\frac{A}{n}$ 에 대한 m 배하여 선분B을 얻어 $B = \frac{m}{n}A\ (n \neq 0)$처럼 나타낼 수 있는 적당한 양의 정수 m과 n을 잡을 수 있을 때, 선분A 와 B가 선분$\frac{A}{n}$ 라는 공통인 선분이 있어서 여기에 n 배하면 A을 얻고, m 배하면 B을 얻을 수 있으므로 두 선분 A 와 B는 통약가능하다고 말한다. 이와 같이 피타고라스학파는 초기에 임의의 두 선분이 통약가능하다고 믿었다. 그리하여 그들은 정수 비와 비례론을 기꺼이 선분들과 직사각형들처럼 간단한 도형들의 길이와 넓이에 적용하기 위하여 확장하였으나, 이것은 정사각형의 대각선에 적용될 수 없었다는 것을 그들은 또한 발견하였다. 왜냐하면 변을 재는 것으로 단위를 아무리 작게 잡아도 대각선은 이 단위의 "배수"가 될 수 없었기 때문이다. 즉, 무리수에 대응되는 통약불가능한 선분이 존재하였다. 무리수의 출현은 대단히 중요한 과학적 사건이었다. 이러한 사실로부터 수학에 엄밀한 과정을 도입하게 만든 것은 그리스인들의 공헌이라고 할 수 있다. 이와 같은 내용은 그리스 시대부터 오늘날까지 수학과 철학에 많은 영향을 끼쳤다.

통약불가능에 대한 에우독소스의 이론은 유클리드의『원론』에 기하학적인 형태로 들어 있으며, 그의 이론은 그리스 수학의 걸작이라고 말할 수 있다. 이 이론은 19세기 말에 가서야 데데킨트, 칸토어, 바이어슈트라스가 무리수에 관한 엄밀한 이론을 만들어내면서 비로소 빛을 보았다[9].

1.1 피타고라스학파의 비례론

자연에 대한 감각적 느낌으로부터 추상화된 피타고라스학파의 수학적 개념들은 자연에 투시되어 우주를 구성하는 요소로 여겼으므로 별들을 물질적 점들의 단위로 삼으며, 수로 전체 우주를 구성하려고 시도하였다. 후에 그들은 친숙한 정다면체들을 자연에 있는 다른 종류의 실체들과 동일시하였다[10]. 그들에게는 기하학을 자연에 내재하고 있는 것으로 간주하였으며, 그들에게는 이상화된 기하학의 개념들이 물질세계에서 실현되는 것처럼 보였다.

9) Richard Courant, Herbert, Robbins, 박평우외 2명 역(2002), 수학이란 무엇인가, 경문사. p.78

10) 플라톤의 『티마에우스』에서 피타고라스학파의 티마에우스는 쉽게 만들어질 수 있는 네 개의 입체-정4면체, 정8면체, 정20면체, 정6면체-를 엠페도클레스가 모든 만물의 근원으로 주장한 4원소 -불, 공기, 물, 흙-와 신비스럽게 결합시켰다. 다섯 번째 입체인 정12면체를 설명하기 위한 어려움은 그것을 '에워싸인 우주'와 결합시킴으로써 처리했다. -Howard Eves, 이우영, 신항균 역(2005), 수학사, 경문사, p.81.

피타고라스학파의 교훈은 “만물은 수이다(All is number)”라고 전해진다. 그러나 피타고라스학파는 우리가 수라고 이름을 붙인 추상적인 것을 수라는 용어로 이해하지 못하였다. 단지 그들은 단위들의 모임으로서의 수인 정수(whole number) 즉 양의 정수가 기본적인 것이었고, 그들의 기하학적 형태의 경우와 마찬가지로, 정수들이 각각의 위치를 갖고 공간에서 한 장소를 점유하면서 자연에 내재되어 있는 것으로 간주하였다. 기하학적으로 추상화한 것이 실제 사물들의 요소였다면 수는 이러한 추상화한 것의 궁극적 요소이며, 따라서 이것은 물리적 물체와 모든 자연의 궁극적 요소였다. 수를 이렇게 실체화함으로써 피타고라스학파는 직선을 정수개의 단위로 이루어진 것으로 간주하였다. 즉, 자연과 지식의 조화로운 일치에 대한 믿음은 피타고라스학파로 하여금 다양한 수학적 추상화를 통해 자연의 다른 면을 설명하게 했을 뿐만 아니라, 수와 공간적 크기의 영역을 동일시하려는 시도를 하게 하였다[11].

피타고라스학파가 자연과 기하학의 일치에 대하여 추구한 것 중 하나가 비와 비례에 관한 이론이다. 실용적인 산술과 구분하여 그리스의 이론수학에서 우리가 $\frac{a}{b}$ 로 쓰고 있는 분수를 수로 또는 하나의 실체로 간주하지 않고, 양의 정수 a 와 b 사이의 비 $a:b$ 또는 관계로 간주하였다. 다시 말하면, 비 $a:b$ 는 유리수보다 단순히 순서쌍으로 간주하였다. 또한 만약 c 가 d 와 같거나 d 의 부분들 또는 배(倍)인 것처럼, a 가 b 와 같거나 b 의 부분들 또는 배(倍)인 것이라면, 두 비들이 비례 $a:b=c:d$ 한다고 말하였다. 아마 비례 또는 비의 상등에 관한 연구는 처음에 피타고라스학파의 산술 또는 수론의 일부를 형성했을 것이다. 예를 들어, 10이 15의 세 부분들 중 2개인 것처럼, 6은 9의 세 부분들 중 2개이기 때문에, $6:9=10:15$ 라고 말하였다. 현대적 의미로 표현한다면 $a:b=c:d$ 은 $a=mp$, $b=mq$, $c=np$, $d=nq$ 을 만족하는 p, q, m, n 가 존재한다고 규정하였다. 즉, $\frac{a}{b}$ 와 $\frac{c}{d}$ 가 $\frac{p}{q}$ 의 정수배가 된다는 것이다.

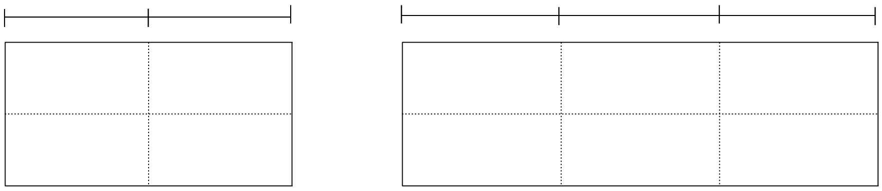

그림 1

이 이론을 바탕으로 피타고라스학파는 초기의 비례론을 발전시켰다. 수와 크기(size)의 이산적인 관점은 기하학적 양들 즉, 공간적 크기들인 길이, 넓이, 부피에 역시 적용될 수 있었다. 특히, 임의의 두 선분이 통약가능하다고 피타고라스학파는 믿었다. 그들은 이 가정에서 정수 비와 비례론을 기꺼이 선분과 직사각형처럼 간단한 도

11) Carl B. Boyer, 김경화 역(2004), 미분적분학사-그 개념의 발달, p.21.

형들의 길이와 넓이에 적용하기 위하여 확장하였다. 예를 들어 그림 1처럼 밑변 2와 3 그리고 같은 높이 2를 갖는 두 직사각형이 주어진다고 하자. 그러면 두 직사각형 넓이의 비 $A:B$ 가 $4:6$ 과 같다면, 두 선분 길이의 비 $a:b$ 는 직사각형 밑변의 정수의 비 $2:3$ 과 같다고 말한다. 그래서 그들은 다른 형태의 기하적인 양인 길이와 넓이의 비 사이에 $a:b=A:B=2:3$ 비례라고 하였다.

통약가능한 간단한 기하학적 도형들에 대하여, 일반적으로 넓이관계 등을 포함하는 결과가 쉽게 성립한다. 예를 들어, 통약가능한 밑변 a 와 b 그리고 같은 높이 h 을 갖는 두 직사각형 R 과 S 가 주어진다면, 그것들의 넓이의 비 $A:B$ 는 그것들의 밑변들의 비 $a:b$ 와 같게 된다. 왜냐하면 만약 m 와 n 이 양의 정수들로 $a=mc$ 와 $b=nc$ 라면, R 은 밑변 c 와 높이 h 을 갖는 m 개의 부분직사각형으로 이루어져 있고, 반면에 S 는 이러한 n 개의 부분직사각형으로 이루어져 있다. 그러면 $A:B=m:n=a:b$ 가 되기 때문이다.

지금까지 그들이 통약가능한 공간적 크기들에 대해서만 비례 이론을 적용하여 기하학에 사용하였음을 알아보았다. 그러나 이것은 정사각형의 대각선에 적용될 수 없었다. 왜냐하면 변을 재는 것으로 단위를 아무리 작게 잡아도 대각선은 이 단위의 "배수"가 될 수 없었다. 즉, 무리수에 대응되는 통약불가능한 선분이 존재하였다.

1.2 에우독소스의 비례론

피타고라스학파의 통약성(通約性)대신에, 두 선분이 통약불가능한 경우에 '두 비들의 같음'을 해결하게 된 것은 에우독소스의 비례론 덕분이었다. 에우독소스의 연구에 기반을 둔 유클리드의『원론』제 5권은 유클리드 기하학의 가장 위대한 업적으로 여겨질 수 있으며, 이것의 내용은 광범위하게 논의되어왔고, 이것의 의미는『원론』의 다른 부분의 의미보다 더욱 심도 있게 고찰되었다. 피타고라스학파는 통약가능한 공간적 크기들, 또는 정수의 비에 의해 표현되어질 수 있는 공간적 크기들에 대하여 비례론 즉, '두 비들의 같음'을 가지고 있었다. 이 이론의 세부적인 것은 전해져 오지 않지만,『원론』제 7권의 내용이 피타고라스학파의 것으로 여기고, 닮은꼴들에 적용되었을 거라고 여긴다. 일반적으로 비례를 사용하였던 에우독소스 이전의 수학자들은 통약불가능한 공간적 크기들에 대한 확실한 기초를 가지고 있지 않았다.『원론』제 5권은 비례론을 무리수를 피하여 통약불가능한 비들로 확장하였다.

여기서 주목해야 할 중요한 아이디어는 유클리드가 '공간적 크기'를 다루고 있다는 것이다. '공간적 크기'는 서로 통약가능한 또는 통약불가능한 양들 또는 실체들을 망라하고자 하였다. 그러므로 길이, 넓이, 부피, 각, 무게, 그리고 시간이 공간적 크기이다. 예를 들어, 공간적 크기인 길이와 넓이는『원론』제 2권에서 이미 제시되었지만 여기까지는 다른 종류의 공간적 크기들을 다루어야 할 필요가 없었으며, 또한 공간적 크기의 비와 비례들을 다루어야 할 필요가 없었다. 그래서 이 시점까지 일반적인 공

간적 크기 개념을 도입하지 않았다. 그가 각별하게 중점을 두는 것은 모든 종류의 공간적 크기들에 대한 비례였다.

유클리드의『원론』에서 정의가 중요함에도 불구하고, 공간적 크기에 대한 정의가 주어져 있지 않는다. 유클리드는『원론』제 5권을 다음과 같이 바로 시작한다.

정의 5.1 : 어떤 작은 공간적 크기가 어떤 큰 공간적 크기를 잴 수 있을 때(큰 공간적 크기가 작은 공간적 크기의 몇 배가 될 때), 작은 공간적 크기가 큰 공간적 크기의 몫이라고 한다(Heath, 1956, p.6)[12].

여기 나오는 '몫'이라는 말은 '부분'이라는 말에다 어떤 제약을 가한 것이다. 7권 정의 7.3에 보면 '몫'이라는 말이 또 나오는데, 그것은 이것과 똑같은 정의이며, 공간적 크기 대신에 수를 넣었을 뿐이다. 예를 들어 1, 2, 3은 6의 몫이나, 4는 6의 부분이지만 6의 몫은 아니다.

그러나 비의 개념은 매우 명확하고 정확한 방법으로 정의하고 있다. 유클리드의『원론』제 5권에 나타난 비와 비례의 정의(정의 3, 4, 5, 6)를 살펴보면 다음과 같다.

정의 5.3 : 비란 같은 종류의 두 공간적 크기들 사이의 크기에 대한 일종의 관계이다(Heath, 1956, p.7).

두 공간적 크기들 사이의 크기 관계란, 한 공간적 크기가 다른 공간적 크기에 들어 있는 개수를 의미한다고 드모건(1841)[13]은 말했다. 어떤 공간적 크기들의 크기 관계를 말로써 표현하려면, 그것들이 상대방 속에 얼마나 들어 있는지 말하지 않으면 안 되기 때문이다. 유클리드의 정의가 전달하려는 것은, 한 공간적 크기가 다른 공간적 크기 속에 몇 개가 들어 있으면, 우리가 그걸 알게 되듯이, 공간적 크기를 가지고 공간적 크기를 표현하는 방법은 그것이 얼마나 있느냐를 이용하는 방법뿐임을 말하고 있다고 드모건은 해석하였다.

다음으로 세 번째 정의와 다음의 정의를 떼어 놓고 생각하는 것은 있을 수 없을 것이다.

정의 5.4 : 두 공간적 크기가 서로 비가 있다고 하는 것은 어느 것에 곱을 하면 다른 것보다 더 크게 할 수 있다(Heath, 1956, p.11).[14]

12) Heath, Thomas, Little. 이무현 역(1998), 기하학원론, 나권 해설서.

13) De Morgan(1841), Penny Cyclopaedia 제 19권. Heath(1956)는 비와 비례의 정의에 대해서 가장 잘 설명된 것으로 간주한다.

14) 아르키메데스의 공리로 알려져 있다. a와 b을 임의의 두 선분이라고 한다면, a는 항상 합 na가 b을 넘을 때까지 몇 번이든지 자기 자신에게 반복해서 더해질 수 있다. 즉, $a < b$일 때, $n \cdot a > b$을 만족하는 정수 n이 존재한다.

에우독소스는 비례론의 핵심적인 가정으로 정의5.4 즉, 아르키메데스 공리를 설정하였다. 즉, a와 b을 임의의 두 선분이라고 한다면, a는 항상 합 na가 b을 넘을 때까지 몇 번이든지 자기 자신에게 반복해서 더해질 수 있다. 이 정의는 모든 공간적 크기들이 비교될 수 있는 정도의 크기를 갖는다는 것, 즉 연속체에 실제적으로 무한히 작거나 무한히 큰 것은 존재하지 않는다는 것을 의미한다. Heath(1956)는 드모건(De Morgan, 1841)의 말을 인용하여 유클리드가 통약가능한 두 공간적 크기들의 비뿐만 아니라 통약불가능한 두 공간적 크기들의 비 역시 인정하고 있다는 사실을 정의 5.4에서 드러내고 있다고 말하고 있다. 또한 정의5.4는 비가 승법적 관계임을 보여주고 있다. 다음의 정의가 에우독소스의 비례론에서 핵심이다.

정의 5.5 : 네 개의 공간적 크기가 있는데, 첫째와 둘째의 비, 셋째와 넷째의 비가 같다는 말은 첫째와 셋째에 같은 수를 곱해 곱을 취하고 둘째와 넷째에 다른 어떤 수를 곱해 곱을 취했을 때, 전자가 후자보다 더 크거나, 전자가 후자와 크기가 같거나, 전자가 후자보다 더 작게 된다는 것이다(Heath, 1956, p.12).

정의 5.6 : 같은 비를 갖는 공간적 크기들을 비례한다고 한다(Heath, 1956, p28).

비의 정의 중 가장 중요한 것은 정의5.5이며 이것은 에우독소스의 비례론을 받아들인 증거로 볼 수 있다. 제 5권의 전체적인 구성 절차를 살펴보면 $a : b$ 그리고 $c : d$ 각각에 의미를 부여하는 것이 아니라 '두 비들의 같음'을 정의할 뿐이다. 정의5.5는 에우독소스가 정의한 것과 동일한 방법으로 '두 비들이 같다'는 것이 무엇을 의미하는지 제시하고 있으며 통약가능한 공간적 크기와 통약불가능한 공간적 크기의 비를 모두 포함한다는 점에서 의미 있는 정의이다(Heath, 1956). 정의5.5를 현재 사용하고 있는 대수 기호를 사용하여 다시 나타내면 다음과 같다.

주어진 양의 정수 m, n에 대해서 $na > mb$일 때는 언제나 $nc > md$가 되고, $na = mb$일 때는 언제나 $nc = md$가 되며, $na < mb$일 때는 언제나 $nc < md$가 된다면 $a : b = c : d$이다.

유클리드의『원론』제 5권은 이후의 수학의 역사에서 아주 중요하다. 고대 그리스인들은 무리수를 도입하지 않았다.『원론』제 1권에서 제 4권까지에서 살펴볼 수 있듯이, 기하학적으로 연구함으로써 이 부분에서 무리수를 피하려고 하였다. 그러나 이러한 기하학의 사용은 모든 종류의 통약불가능한 공간적 크기의 비와 비례들을 다룰

수 없었다. 그리하여 이러한 결여는 일반적인 공간적 크기의 이론으로 시작하는, 제 5권에 의해 보충되어졌다. 이후의 수학자들은 공간적 크기에 대한 유클리드의 이론을 단지 기하학에 적용 가능한 것으로 여겼다. 그리하여 르네상스시대와 이후의 세기에 무리수가 재도입되어 사용되어졌을 때, 이들 수들은 논리적인 기초를 갖고 있지 않기 때문에 많은 수학자들이 반대하였다.

1.3 데데킨트의 절단

데데킨트는 미적분학 교사였던 1858년에 무리수의 문제에 주목하였다. 그는 극한 개념이 엄밀하다면 이 개념은 기하학의 도움을 빌리지 않고 산술만으로 전개되어야 한다고 결론을 내렸다. 그리고 기하학적 연속량이 유리수와 다른 점은 무엇인가에 대해 질문을 던졌다. 그런데 이미 갈릴레이와 라이프니츠는 직선 위에서 점의 '연속성'은 점의 조밀성 즉, 어떤 두 점을 잡더라도 그 사이에는 반드시 또 다른 점이 존재한다는 성질 때문이라고 생각하였다. 그렇지만 유리수는 조밀성의 성질을 가지고 있을지라도 연속체가 아니다. 데데킨트는 이것을 매우 깊이 생각한 끝에, 선분의 연속성의 본질이란 조밀함과 같은 막연한 개념에 기인하는 것이 아니라 이것과 정반대의 성질 -선분은 그 위에 있는 한 점에 의해 두 부분으로 분할 된다- 에 기인한다는 결론에 도달하였다.

데데킨트 이론의 핵심은 아래 글에 담겨 있다[15]. 이 글은 그의 획기적인 시론 『연속과 무리수(Stetigkeit und irrationale Zahlen)』에서 따온 구절이다. 이 시론은 동일한 주제에 관한 칸토어의 시론이 나오기 10년 전인 1872년에 출간되었다.

> 유리수체와 직선을 비교하면 유리수체에 틈이 존재한다는 사실을 알게 된다. 반면에 직선은 아무런 틈이 없이 매끈하게 연결되어 있다. 과연 연속성의 본질은 무엇인가? 이 질문에 대한 답변이 무엇이냐에 따라 모든 것이 결정된다. 그리고 그 답변에 의해 연속체 연구의 과학적 토대가 마련된다. 극미한 부분에서도 연결이 끊어지지 않고 이어져 있는 것이 연속체라는 모호한 답변으로는 아무런 도움이 되지 않는다. 문제는 합당한 연역의 발판이 될 수 있도록 연속의 정확한 특성을 지시해내는 일이다. … 앞 절에서 직선 위의 점은 직선을 두 부분으로 나누는데 여기서 한쪽 부분에 속하는 점은 항상 다른 쪽 부분에 속하는 점의 왼쪽에 위치하게 된다는 사실을 언급했다. 바로 이 명제의 역에서 나는 연속의 본질을 규정하는 원리를 찾아냈다. 그 원리란 다음과 같다. "직선 위의 모든 점들을 두 집합으로 나누되 첫 번째 집합에 속하는 점은 항상 두 번째 집합에 속하는 점의 왼편에 있도록 한다. 그러면 이와 같은 절단을 만들어내는 점이 단 하나 존재한다."

15) R, Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen, Braunschweig, 1872; third edition 1905. Tobias Dantzig, 심재관 역(2007), 과학의 언어 수, 지식의 숲, p.214-215.에서 인용.

… 이 원리를 가정한다는 것은 곧 이 원리가 공리라는 뜻이며, 이 공리를 근거로 직선에 연속성을 부여하고 또 이 연속성을 근거로 연속성의 개념을 정의한다. 공간이 실제로 존재한다는 사실을 인정한다고 해서 반드시 연속성을 가정할 필요는 없다. 공간이 불연속적이라고 해도 그 성질 가운데 상당수는 바뀌지 않고 그대로 남는다. 그리고 설사 공간이 불연속적이라는 확증을 얻는다고 해도 우리의 사고 속에서 그 틈을 채워 넣어 연속체로 탈바꿈시킬 수 있다. 틈을 채워 넣는 일은 곧 새로운 점들을 만들어내는 일이 되는데 이 작업은 위에 언급한 원리에 따라 수행된다.

데데킨트는 실수는 갖고 있지만 유리수는 갖지 않는 성질인 연속성에 대한 명확한 정의를 내리기가 어렵다는 사실을 강의 중에 발견하고는, 실수를 도입하기 위한 방법을 고안하게 되었다. 이 어려움에 대해 상당히 고찰한 뒤에, 직선의 연속성의 본질이 위에서 언급하였던 직선을 두 집합으로 절단하게 만드는 직선 위의 점이 단 하나 존재한다는 성질에 있음을 데데킨트는 발견했다. 이것에 대한 산술화는 유리수에서 절단들을 고려하게 만들었고, 실수 집합 내에서 절단들을 형성하는 연산에 관해 실수 집합이 닫혀 있음을 보장해서 실수 집합의 연속성을 보증하는 실수에 대한 정의를 이끌었다(Eves, 1995)[16]. 이에 대해 데데킨트는 “이 평범한 의견으로 연속성의 비밀은 해명될 것”이라고 썼다. 확실히 위의 기술은 너무 당연할지도 모른다. 그렇지만 데데킨트는 이 의견에 대해서 출판하기까지 몇 해 동안 망설였던 것을 보면 약간은 걱정한 것 같다.

데데킨트 원리를 면밀히 분석해보자. 데데킨트는 유리수체를 출발점으로 삼고 있다. 하지만 그는 실수를 수렴하는 유리수 수열로 보는 칸토어 대신에 유리수의 분할로부터 생성되어 나오는 존재로 파악하였다. 유리수의 이러한 분할 방식을 그는 절단(schnitt)라고 불렀다.

절단은 데데킨트가 직선의 연속성을 정의하면서 사용했던 개념으로, 직선위의 한 점이 서로 인접해 있되 겹쳐지지 않는 두 부분으로 직선을 나누듯이 실수도 유리수를 서로소이고 또 그 합집합이 유리수 전체인 두 개의 집합으로 나눈다. 역으로, 절단 방식이나 혹은 어떤 과정에 의해 유리수체가 위와 같이 둘로 나뉠 때 그 절단 방식이나 혹은 그 어떤 과정은 하나의 수와 동일시되는데, 우리는 바로 그 수를 실수로 정의하며 새로운 수 집합의 원소로 등재한다.

유리수 각각을 하나의 절단 방식으로 생각할 수 있으므로 유리수 집합은 새롭게 구성한 집합의 부분집합이다. 예컨대 유리수 2는 유리수 집합을 둘로 나눈다. 2보다 작거나 혹은 같은 유리수들은 아래쪽 집합에 놓고 2보다 큰 유리수들은 위쪽 집합에 놓는다. 이 두 집합에 공통으로 들어가는 원소는 없으며 또 그 합집합은 유리수 전체 집합이다. 2는 하나의 절단으로 간주할 수 있고 따라서 2는 실수가 된다. 이와 같이

16) Howard Eves, 허민, 오혜영 역(1995) , 수학의 기초와 기본 개념, 경문사, p.339.

유리수로 결정된 데데킨트 절단을 유리수 절단이라 한다.

그러나 이와 같은 간단한 절단이 전부는 아니다. 예컨대 제곱했을 때 2보다 작거나 같은 유리수들의 집합과, 제곱했을 때 2보다 큰 유리수들의 집합을 생각해볼 수 있다. 앞의 경우와 마찬가지로 두 집합은 서로소이다. 그리고 두 집합을 합하면 유리수 집합 전체가 된다. 따라서 이 절단 역시 실수를 정의하는데 이 수가 바로 잘 알고 있는 $\sqrt{2}$ 이다. 이러한 유리수 절단이 아닌 절단을 무리수 절단(irrational cut)이라 한다.

한편, 유리수와 무리수 모두 절단으로 표현해낼 수 있지만 유리수를 절단의 근간으로 삼는 일이 결과에 아무런 영향을 미치지 않는다고 할 수 없다. 유리수 절단과 무리수 절단 사이에 근본적 차이가 있기 때문이다. 한 유리수에 의해 절단이 이루어지면 그 유리수는 아래쪽 집합에 속하게 된다. 그러나 무리수 절단은 어느 쪽으로도 속하지 않는다. 따라서 절단을 만들어낸 무리수는 아래쪽 집합에도 속하지 않고 위쪽 집합에도 속하지 않는다. 다시 말해서 유리수 경우에는 아래쪽 집합에는 최대 원소가 있고 위쪽 집합에는 최소 원소가 없다. 무리수의 경우는 아래쪽 집합에는 최대 원소가 없으며 위쪽 집합에는 최소 원소가 없다.

데데킨트 이론에 따르면 이 성질이 두 가지 유형의 수를 구분하는 유일한 특성이다. 아래쪽 집합에 속하는 성질이 유리수를 규정하며 어떤 집합에도 속하지 않는 성질이 무리수를 규정한다. 데데킨트 절단이 실제로 수라는 사실을 증명하려면 불변의 원리[17]에서 규정하고 있는 조건이 모두 만족된다는 사실을 보여야 한다. 첫 번째 조건이 만족된다는 것은 바로 위에서 언급했다. 나머지 조건들도 모두 만족되는데 그 사실은 어렵지 않게 증명할 수 있다. 대소 기준, 연산의 정의, 그리고 이들 연산이 결합법칙과 교환법칙과 배분법칙을 만족한다는 증명이 성립한다.

실수체를 정의하고 나면 그 다음으로 동일한 원리를 새로 얻는 집합에 적용했을 때 더 큰 집합을 얻는 것은 아닌지를 확인해야 한다. 다시 말해서 실수 집합을 두 집합으로 나누는 절단을 시행했을 때 실수에 속하지 않는 새로운 유형의 수가 생겨나지 않을까? '아니다'가 이 질문에 대한 답이다. 실수체의 절단은 결국 유리수체의 절단으로 환원된다. 유리수 절단들을 모은 집합은 닫혀 있다.

2. 그리스의 비례론과 현대 수학과의 관계

17) 불변의 원리란 1867년에 독일 수학자 헤르만 한켈에 의해 최초로 정식화된 것으로, 무한한 수의 기호로 이루어진 집합을 **수체**로, 그리고 거기에 속하는 원소를 수라고 부른다.
제 1 단계 : 집합의 원소 가운데 자연수 집합을 이루는 원들이 있는지 확인한다.
제 2 단계 : 원소 사이에 대소 관계를 결정하는 기준을 세우되 자연수에 국한하면 보통 사용되는 대소 관계가 되는지 살펴본다.
제 3 단계 : 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙을 만족하는 덧셈 및 곱셈을 정의하되 자연수에 국한했을 때 보통 사용되는 연산이 되는지 살펴본다.

2.1. 그리스 수학에서 양의 범주(수와 공간적 크기)에 대한 철학적 기초

아리스토텔레스에 따르면 수학자들에 의해 연구되는 대상들은 독립적으로 존재하지 않고, 사고에 의해 실체로부터 분리되어지기도 하고, 분리될 수 있는 것이다. 바꿔서 말하자면 수학자에 의해 대상들은 추상화되어진다.[18] 특히, '얼마나 많이(how many)?' 라는 물음에 대답을 하는 수의 특성 또는 속성은 "실체"에 대하여 지정된 단위로 이루어진 여럿(다수)을 갖는다. '양말이 몇 켤레가 있는가?'는 '양말이 얼마나 많이 있는가?'와 다른 대답을 요구한다. 왜냐하면 '양말이 몇 켤레가 있는가?'라는 물음에 대답하는 수는 전체에 몇 개의 단위들이 포함되어 있는가를 의미하기 때문이다.

수가 가지는 추상적 존재는 일찍부터 철학에서 자주 논의되어 왔다. 플라톤은 수가 감각적 물질과는 구별되는 독립적 실재를 가진 것으로 간주하였다. 반면에 아리스토텔레스는 수가 감각적 물질과 구별되며, 동시에 추상적으로 실재하는 이데아와도 구별되는 중간적 존재라 하였다. 그리하여 수에 대해 아리스토텔레스는 하나가 어떤 '여럿'의 척도를 뜻하며, 수가 측정된 여럿과 척도들의 여럿을 뜻한다고 말하였다 (Aristotle, Met., XIV. 1088a5ff). 여기서 "측정된 여럿" 또는 "척도들의 여럿"의 개념은 유한 집합의 개념이 포함되어 있다. 왜냐하면 척도들 또는 단위들은 집합의 원소들이라고 부를 수 있기 때문이다. 그리고 아리스토텔레스는 단위를 "양이라는 개념에서 쪼갤 수 없는 것"이라고 정의하였다. 여기서 '양'이라는 말은, 끊어져 있는 양은 물론 이어져 있는 양도 될 수가 있다. 또한 "양이라는 개념에서, 절대 쪼갤 수 없고 위치도 없는 것이 '단위'이다. 반면에 절대 쪼갤 수 없고 위치가 있는 것이 '점'이다." 이러한 구별에 의해, 아리스토텔레스는 단위를 "위치가 없는 점"이라고 부르기도 하였다[19].

이러한 단위들을 분간하는 필요성은 집합을 단순한 축적 또는 덩어리와 명확하게 구별하기 위한 것이다. "수는 측정된 여럿을 의미한다."는 이 문장은 수들과 유한집합을 동일하게 취급하는 것과 수로 단정되어지는 실체들이 유한집합이라는 것 이렇게 두 가지 의미로 해석될 수 있다. 특히 "수는 단위로 구성된 여럿이다."라는 유클리드의 정의는 전자의 해석을 의미한다.

유클리드는『원론』제 7권 정의1과 2에서 '단위(단위수)란 이것을 가지고 다른 것들을 만드는 것이며, 이것을 1이라고 부른다.' 그리고 '수란 단위로 구성된 여럿이다.'라고 정의하였다. 여기서 단위수란 '얼마나 많이'라는 개념의 최소이자 처음이며, '얼마나 많이'라는 개념의 시작이자 공통부분이다[20]. 또한 유클리드는 2를 시작으로 하여 양의 정수의 이론을 제시하였다. 왜냐하면 1은 단위이고 0은 존재하지 않았기 때문이다. 기

---

18) Aristotle, Metaph, Ⅵ i 1026a8-12, 15; Ⅺ iii 1061a28-b4, iv 1061b22-3, vii 1064a33-4; Nich. Eth. Ⅵ viii 1142a17.
19) Heath, Thomas, Little. 이무현 역(1998), 기하학원론, 나권 해설서. p.194.
20) Heath, Thomas, Little. 이무현 역(1998), 기하학원론, 나권 해설서. p.194.

본적인 결합과 비교는『원론』제 7권에 주어져 있다. 연산의 결과로서 생기는 수가 양수 그리고 배수라는 것을 확실하게 하기 위하여 수들은 더 큰 것으로부터 더 작은 것으로의 덧셈과 뺄셈 하에서 연산되어졌다.

여럿에 대하여 물어보는 “얼마나 많이?(how many?)″와 일치하는 질문은 아리스토텔레스에 의하면, 이산적인 수와 구별되는 연속적인 공간적 크기에 대하여 물어보는 질문 ″얼마나 많이(how much)″다. ‘길이가 얼마인가?’, ‘넓이가 얼마인가?’, ‘부피가 얼마인가?’, ‘무게가 얼마인가?’등의 질문이 이 개념에 해당된다. 수의 경우에서처럼, 공간적 크기도 실체 안에 있다고 할 수 있다. 예를 들면 아리스토텔레스는 “어떤 양들은 서로에 대해 위치를 갖는 부분들로 이루어져 있으나 다른 것들은 위치를 갖는 부분들로 이루어져 있지 않다[21].”라고 하였다. 게다가 그는 전자의 종류로서 직선, 평면, 입체 그리고 시간, 장소를 예로 들었고, 그 결과 이것들을 그에 의해 ″양들″, 더 구체적으로는 ″공간적 크기들″로 간주되었다. 서로에 대하여 위치를 갖는 부분들로 이루어진 것으로 이것들을 말할 때, 그는 각각의 경우에 특정한 공간적인 도형들을 생각하였음에 의심할 여지가 없다. 이것에 대하여『형이상학』제 5권에서 확인할 수 있다.

> 양은 ‘각각이 본래 하나이자 개체인 여러 개의 ‘구성요소들로 분할되는 것’을 뜻한다. 그런데, 양은 셀 수 있을 때에는 여럿이며, 잴 수 있을 때에는 공간적 크기다. 여기서 “여럿”은 연속되지 않은 부분들로 잠재적으로 분할 될 수 있는 것을 뜻하며, “공간적 크기”는 연속된 부분들로 분할될 수 있는 것을 뜻한다. 그리고 공간적 크기 중 한 쪽 방향으로 이어진 것은 선이고, 두 쪽으로 이어진 것은 폭이며, 세 쪽으로 이어진 것은 깊이다. 이것들 가운데, 한정된 여럿은 수이며, 한정된 길이는 선분이며, 한정된 폭[22]은 평면이며, 한정된 깊이가 입체이다(Aristotle, Met., V. 1020a7-14).

여기서 특별한 공간적 크기들을 실제적이고 공간적인 도형들과 동일하게 취급할 뿐만 아니라 속(屬)으로서 여럿을 “길이, 폭, 깊이”로, 그리고 이것들 각각의 속(屬)에 속하는 종(種)으로 수를 “선, 평면, 입체”와 아주 유사한 것으로 간주하였다.

또 다른 주안점으로 무엇보다 먼저 이것과 관련하여 양들의 구체적인 개념에 주목하는 것은 가치가 있을 것 같다. 아리스토텔레스(Cat. vi 6a27)에 의하면 양들의 가장 큰 특징은 양들의 속성으로 단정 지어지는 것으로 동일함(equality)과 동일하지 않음(inequality)의 속성이 있다는 것이다. 사실상 유클리드의 산술학과 기하학에서, “같음(sameness)″은 결코 수, 길이, 넓이, 부피와 각의 속성이 아니다. 예를 들면, 두 넓이들 또는 두 길이들의 비가 같다고 말하지, 동일하다고 말하지는 않는다. 반면에 두 물

21) Aristotle, Cat. vi. 4b20ff.
22) 아리스토텔레스는 ‘폭’이라는 말은 평면의 특징처럼 쓰고 있으며, 평면과 똑같은 뜻으로 이 말을 쓰기도 했다. 그리고 “길이란 길고 짧은 것, 평면이란 넓고 좁은 것, 입체란 깊고 얕은 것”이라고 말했다(Met., Ⅰ. 992a).

체의 넓이가 동일하다고 말하지, 같다고는 말하지 않는다. 현재 생각하는 방법으로는 이 차이점은 상당히 이상하다. 왜냐하면 우리에겐, 다른 두 삼각형의 넓이가 동일하다고 말하는 것은 다른 두 삼각형이 같은 넓이를 가진다고 말하는 것이다. 그러나 그리스 수학에서 삼각형은 넓이를 갖지 않기 때문에, “이 삼각형의 넓이”라고 말하는 것은 부적절하다. 왜냐하면 삼각형은 자체가 넓이 즉, 유한 평면이기 때문이다[23].

2.2. 에우독소스의 비례론 분석

에우독소스는 비례론의 핵심적인 가정으로 유클리드의『원론』제 5권 정의4 즉, 아르키메데스 공리를 설정하였다. 즉, a와 b을 임의의 두 선분이라고 한다면, a는 항상 합 na가 b을 넘을 때까지 몇 번이든지 자기 자신에게 반복해서 더해질 수 있다. 이것은 앞에서 살펴보았듯이, 모든 공간적 크기들이 비교될 수 있는 정도의 크기를 갖는다는 것, 즉 연속체에 실제적으로 무한히 작거나 무한히 큰 것은 존재하지 않는다는 것을 의미한다.

각 기하학적인 양 즉, 공간적 크기의 비들을 특징짓는 것은 무엇인가? 에우독소스는 유클리드의『원론』제 5권 정의5를 통해 답하였다. 이것을 현대적 의미로 표현하면,

> 주어진 양의 정수 m, n에 대해서 (Ⅰ) $na > mb$일 때는 언제나 $nc > md$가 되고, (Ⅱ) $na = mb$일 때는 언제나 $nc = md$가 되며, (Ⅲ) $na < mb$일 때는 언제나 $nc < md$가 된다면 $a : b = c : d$이다.

이것들은 유리수($\frac{m}{n}$)을 3개 부류로 나누게 되는데, (Ⅰ) $\frac{m}{n}$이 양 a와 b의 통약불가능한 비 $\frac{a}{b}$보다 작은 것들로 그리고 (Ⅱ) 같은 것으로 또한 (Ⅲ) $\frac{m}{n}$이 더 큰 것들로 나누는 것에 의해 창조되는 절단이다[24]. 제Ⅱ부류는 공집합이거나, 또는 오직 하나의 분수를 포함한다. 그리하여 Heath(1956)에 의하면, 에우독소스가 ‘두 비들의 같음’을 정의한 것과, 데데킨트가 실수를 현대적으로 정의한 것 사이에는, 밀접한 관계가 있음이 사실이고, 완전히 일치한다고 해도 과언이 아니라고 말하였다.

그래서 비례 개념에 대한 에우독소스의 설명과 실수에 대한 데데킨트의 잘 알려진 구조와의 관계를 분석하는 것은 어렵지 않다[25]. a와 b을 유클리드의 정의5.4에서 규정하고 있는 의미에서 비를 갖는 양들이라고 하자. 또한 $mb \leq na$을 만족하는 모든

23) Howard Stein(1990), Eudoxos and Dedekind, Synthese, 84(2) p.165.
유클리드의 『원론』제 2권에서 면적에 대해서 다루고 있지만 이것은 산술적이지 않고, 기하학적 대수에 의해서 기하학적으로 다루고 있다.
24) Hermann, Weyl, 김상문 역,(1987), 수리철학과 과학철학, 민음사, p.51.
25) Howard Stein(1990), Eudoxos and Dedekind, Synthese, 84(2) pp.170-172.

양의 정수들의 순서쌍(m, n)들에 대하여, 이들 순서쌍(m, n)들 각각에 대하여 유리수 $\frac{m}{n}$을 고려하자. 만약 (m', n')이 양의 정수들의 다른 순서쌍이고, $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$ 이라면 $mb \le na$은 $m'b \le n'a$이 된다. 따라서 모든 양의 유리수들의 집합을 두 부분집합인 "위쪽 집합"(기호로 S^*)와 "아래쪽 집합"(기호로 S_*)로 분할이 된다. 왜냐하면 $mb \le na$인 경우에 $\frac{m}{n}$이 S_*에 속하고, $mb > na$인 경우에 $\frac{m}{n}$이 S^*에 속하기 때문이다. 또한 정의5.4는 a와 b가 비를 갖는다면, S^*와 S_* 어느 것도 공집합이 아니라는 것을 보장한다. 마찬가지로 비를 갖는 양들의 순서쌍(a, b)에 대하여, S_*에 속하는 각각의 유리수는 S^*에 속하는 각각의 수보다 작은 수이다. 그러므로 비를 갖는 양들의 순서쌍에 의해 결정되는 아래쪽 집합과 위쪽 집합으로의 분할은 정확하게 양의 유리수 체계에서 "데데킨트 절단"이다. 따라서 데데킨트의 의미에서 양의 실수를 정의한 것이라 할 수 있다. 유클리드의 정의5.4의 의미에서 비를 갖는, 또한 더구나 정의5.5의 의미에서 같은 비를 갖는 양들의 순서쌍(a, b)은 위의 구조에 의해 같은 데데킨트 절단과 그 결과로 같은 양의 실수를 결정한다. 그러므로 모든 에우독소스의 비의 체계와 양의 실수 체계 사이에 잘 정의된 대응을 갖는다.

하지만 위에서의 대응은 필연적으로 일대일 대응이 아니다. 양의 유리수들의 분할을 계속 할 때, 사실상 에우독소스의 비례론에 담겨 있는 정보 중 몇몇을 포기해야만 한다. 에우독소스의 비례론은 세 개의 유리수의 집합으로 분할된다. 그들 중 하나인 가운데 것은 공집합이거나, 많아야 하나의 원소를 포함한다. (가운데 집합이 공집합이 아닐 경우, 현대 수학에서는 이것의 원소를 아래쪽 집합에 포함시킨다.) 이것이 어떤 조건에서 하나 이상의 에우독소스의 비들에게 같은 실수를 지정할 수 있는지 살펴보자.

양들 a, b가 비를 갖고, 같은 위쪽 집합을 정하는 다른 종류에 속하는 양들 c, d가 있다고 가정하자. 그러면 임의의 양의 정수 m, n에 대하여 $mb > na \Leftrightarrow md > nc$가 성립한다. 그렇다면 동시에 $jb \neq ka$이지만 $jd = kc$인 양의 정수들 j, k가 존재할 수 있는가? 이것이 존재하기 위하여, 앞의 조건의 관점에서 $jb < ka$이어야 한다. 차 $ka - jb$을 o라고 부르자.

그런데 $jd = kc$이기 때문에 모든 양의 정수 N에 대하여 $Njd = Nkc$이다. 그래서 $(Nj+1)d > Nkc$이 성립하고, 또한 $(Nj+1)b > Nka$가 성립한다. 이것으로 부터 $N(ka - jb) < b$가 성립한다. 즉, 양o에 대한 모든 곱은 b보다 작다. 따라서 o와 b는 비를 갖지 않는다. (o는 b에 관하여 "무한소"라 부른다.)

역으로, a에 관하여 o의 무한소를 갖는, 같은 종류의 두 양들 o와 a라 하자. 그러면 m과 n이 $ma > na$ 즉 $m > n$을 만족하는 양의 정수들이라고 가정하기 때문에, 고려중인 현상은 실제로 같은 종류 내에서 일어난다는 것을 쉽게 보여 진다. 따라서 b에 관하여 o의 무한소에 의하여, $(m-n)a > no$ 즉, $ma > n(a+o)$이 된다. 한

편, 마지막 부등식이 명백하게 $m > n$을 수반하기 때문에 비 $a : a$와 $a+o : a$가 같은 위쪽 집합을 결정하고 그 결과로 같은 실수를 결정한다. 그러나 이 비들은 임의의 양의 정수 n에 대하여 $na = na$이지 $n(a+o) \neq na$이기 때문에, 에우독소스의 관점에서는 같지 않다. 따라서 에우독소스의 비들의 집합으로부터 실수들의 집합으로 일대일 대응이기 위한 필요충분조건은 양들의 모든 순서쌍이 비를 갖는 것이다.

그런데 에우독소스의 비례론이 데데킨트가 실수를 현대적으로 정의한 '데데킨트 절단'과 일치한다고 해도 과언이 아니라고 하는데, 에우독소스의 비례론이 무리수를 포함하는, 실수의 이론에 대한 논리적 기초를 확립했는지 의문이 생긴다. 그래서 에우독소스의 연구에 기반을 둔 유클리드의『원론』제 5권을 중심으로 살펴보고자 한다. 유클리드는 『원론』제 5권의 정의들과 증명들에서 기하학을 사용하지 않았으나, 단지 교육적으로 정리들과 증명들에서 그는 선분을 사용하였다. 그렇지만, 유클리드가 비례론에서 무리수 이론을 실제로 제시했다면, 가능한 두 가지 해석 중 어느 것이든 결과로서 생겨났을 것이다. 첫 번째는 공간적 크기들 그 자체가 무리수로 취급되어졌을 것이다. 그리고 두 번째는 두 공간적 크기들의 비들이 무리수이었을 것이다.

공간적 크기들 그 자체가 무리수가 될 수 있다고 한다면 유클리드의 엄밀함으로 이것에 대한 논박을 무시할지라도 현대의 기준으로 판단할 때, 다음의 어려움들이 내재하고 있다. 유클리드는 공간적 크기, 또는 공간적 크기의 동등 또는 동치에 의해 의미하는 것을 결코 정의하지 않았다. 더욱이, 유클리드는 공간적 크기 그자체로가 아닌 비례로 연구하였다. 두 공간적 크기들a와 b의 곱은 a와 b가 길이일 때 가능하다. 그것에 의하여 유클리드가 공간적 크기들의 곱을 넓이로 간주하였다. 그래서 곱ab가 유클리드에게 일반적인 의미를 갖지 않았으므로, 수가 될 수 없었다. 한층 나아가서 유클리드는 제 5권에서 그 자체로 대수적인 정리들로 기꺼이 다시 진술되어질 수 있는 많은 비례들에 대한 정리들을 증명하였다. 그러나 제 5권의 정리18[26]을 증명하기 위하여, 그는 주어진 세 개의 공간적 크기들에 대하여 이들에 비례하도록 네 번째 공간적 크기를 찾을 수 있다고 가정하고 있다. 6권 정리12[27]에 가서야 비로소, 세 개의 공간적 크기들 모두가 직선인 특별한 경우에 대해서, 유클리드는 네 번째 공간적 크기가 존재함을 작도해 보이고 있다. 그런 까닭에, 일반적인 공간적 크기에 대한 그의 이론은 불완전할 뿐만 아니라 그가 길이들에 대하여 확립한 것은 기하학에 의존한 것이다. 더욱이 유클리드는 정의 5.3에서 비는 단지 같은 종류의 공간적 크기들에 대하여 형성되어질 수 있다고 강조하였다. 분명하게 공간적 크기들이 수들이었다면 이러한 제한은 무의미했을 것이다. 공간적 크기에 대한 그의 개념은 그 정의에 집착해서 기하학에 의존하였다. 다른 어려움은 무리수 이론이 추가되어질 수 있는 유리수 체계가 없었다는 것이다. 정수의 비들은 단지 비례의 일부로서 발생하였으며, 심지어 이러한 비들은 분수로 간주되지 못하였다. 마지막으로, 네 개의 양들이 모두 정수들일지라

26) 『원론』제 5권 정리18 : 어떤 공간적 크기에 대하여 뺀 비례식이 성립하면, 더한 비례식도 성립한다.
27) 『원론』제 6권 정리12 : 세 직선을 주었을 때, 그에 비례하도록 네 번째 직선을 잡으시오.

도 $\frac{a}{b}$ 와 $\frac{c}{d}$ 의 곱은 존재하지 않았고, 단지 공간적 크기들로 간주하였다.

공간적 크기에 대한 유클리드 비들을 수로 해석하는 것을 고려해보자. 그 결과, 통약불가능한 비들은 무리수가 될 것이고 통약가능한 비들은 유리수가 될 것이다. 이들 비들이 수라면 적어도 그것들을 곱하거나 나누거나 하는 것이 가능할 것이다. 그러나 유클리드의 『원론』 어디에서도 $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\,(a,b,c,d:$ 공간적 크기들)이 의미하는 것을 찾을 수 없다. 유클리드의 용법에서 비들은 단지 비례의 원소들로서 존재하므로, 전혀 일반적인 의미를 가지고 있지 않았다. 마지막으로 위에서 확인한 것처럼, 유클리드는 무리수 이론을 확립할 유리수의 개념을 갖고 있지 않았다. 그래서 19세기가 될 때까지, 기하학적 기저위에서 아주 엄격하게 연속적인 양들을 다루었던 과정은 필연적이었다. 유클리드의 『원론』에 관한 한, 무리수에 대한 기초가 없었다.

2.3 에우독소스와 데데킨트

지금까지 에우독소스의 비례론이 데데킨트가 실수를 정의한 “데데킨트 절단”과 일치하나 근본적인 차이가 있음을 살펴보았고, 에우독소스의 연구에 기반을 둔 유클리드의 『원론』제 5권을 연구함으로써 “그리스 수학에서 실수의 체계의 개념에 과연 도달할 수 있었을까?”라는 의문에 대하여 살펴보았다. 그리스 수학이 사실 그 개념에 도달하지 않았다는 것은 의심할 여지가 없다. 수와 공간적 크기사이의 그리스인들의 구별이, 그리고 수는 더할 수도 곱할 수도 있는 반면에, 공간적 크기는 오직 더할 수만 있다는 사실이 근본적인 장애를 만들어 냈다고 볼 수 있을 것이다. 그래서 이 절에서는 지금까지 살펴본 것을 기반으로 에우독소스의 비례론과 데데킨트 절단사이의 “근본적인 차이‘에 대하여 자세히 알아보고자 한다.

자연과 지식의 조화로운 일치에 대한 널리 퍼져있는 믿음은 피타고라스학파로 하여금 다양한 수학적 추상화를 통해 자연의 다른 면을 설명하게 했을 뿐만 아니라, 수와 공간적 크기의 영역을 동일시하려는 시도를 하게 하였고, 수와 크기의 이산적인 관점을 기하학적인 양 즉 공간적 크기들인 길이, 넓이, 부피들에 역시 적용하도록 하였다. 특히, 임의의 두 선분은 통약가능하다고 피타고라스학파는 믿었다. 그들은 이 가정에서 정수 비와 비례론을 기꺼이 선분들과 직사각형들처럼 간단한 도형들의 길이와 넓이에 적용하기 위하여 확장하였다. 그러나 이것은 정사각형의 대각선에 적용될 수 없었다. 왜냐하면 변을 재는 것으로 단위를 아무리 작게 잡아도 대각선은 이 단위의 "배수"가 될 수 없었기 때문이다. 이것은 “만물의 근원은 수이다.”라고 하였던 피타고라스학파의 신조와 어긋나는 위협적인 사건이었다. 왜냐하면 그 당시에 인정하고 사용한 수는 정수들 만이었기 때문에, 그들이 발견한 $\sqrt{2}$ 와 같은 실체는 받아들일 수가 없었다. 이러한 무리‘수’를 추방함으로써 그 딜레마를 해결할 수 있었는데, 동시에 선

분에 수치를 부여하는 것이나 마찬가지로 평면, 입체에 수치를 부여하는 생각을 버리게 되었다. 그리하여 현대 수학에서는 공간적 크기들을 수로 쉽게 표현되지만, 그들은 수와 공간적 크기가 서로 다른 형태로 간주하였으며, 서로 구별하여 별도로 다루어야만 하였다. 이 결과로, 김용운(1986)[28]은 통약불가능한 비들(무리수)의 발견이 기본적으로는 수로부터 공간적 크기로 옮기는 계기가 되었고, 내재적으로는 '수의 학문'으로부터 '공간적 크기의 학문'으로의 전환을 가져온 결과가 되었다고 하였다. 또한 그 결과가 기하학 우위라는 형태로 나타난 것이라고 하였다.

통약불가능의 발견은 기하학적 양들의 비의 비교에 대한 피타고라스학파의 정수 비례론을 쓸모없게 만들었고, 그것에 의하여 비례항 개념을 이용하였던 그들의 기하학적 증명은 무용지물이 되었다. 기하학의 기초에서의 이 위기는 에우독소스에 의해 해결되었다. 그리스인들에게 통약불가능한 비들의 발견은 불가피하게 그들의 수를 직시할 수밖에 없었다. 사실상 그들에게 수가 존재하였는가? 정수와 정수의 비들이 기하와 일반적인 공간적 크기에 대한 연구에 기원을 둘 수 있다는 사실로 미루어, 수는 기하학적 논증들에 기원을 둘 수 있다. 더욱이, 어떻게 통약가능한 직선, 평면, 그리고 입체들에 행하였던 기하학의 증명들을 통약불가능한 것들로 확장할 수 있었을까?

에우독소스는 공간적 크기의 개념을 도입하였다. 이것은 수가 아니고, 연속적으로 변할 수 있는 각, 직선, 평면, 입체 그리고 시간과 장소와 같은 실체들을 의미하였다. 공간적 크기는 4에서 5로 이산적으로 옮겨가는 것처럼 하나의 값에서 다른 값으로 이산적으로 옮겨가는 수와 구별되어진다. 수량적인 값이 결코 공간적 크기에 부여되지 않았다. 그래서 에우독소스는 통약가능한 비들과 통약불가능한 비들을 망라하는 공간적 크기들의 비와 비례 즉, '두 비들의 같음'을 정의하였다. 그러나 역시, 그는 이러한 비들을 전혀 수로 나타내지 않았다. 에우독소스의 비와 비례의 개념은 기하학에 의존하는 이론이었다.

에우독소스가 성취한 것은 수로서 무리수를 피하는 것 이였다. 사실상, 그는 직선의 길이, 각의 크기, 그리고 다른 공간적 크기들에 수치적인 값을 부여하는 것을 피하였다. 또한 공간적 크기들의 비에 수치적인 값을 부여하는 것을 피하였다. 통약불가능한 비들에 대하여 필수적인 논리적 기초를 제공함으로써 그리스 수학자들은 에우독소스의 이론 덕분으로 기하학에서 엄청난 발전을 가져왔지만, 이것은 여러 불행한 결과를 초래했다.

한 가지 예로, 수와 기하학 사이에 엄격한 구분이 생겨난 것인데, 이는 기하학만이 통약불가능한 비를 다룰 수 있었기 때문이었다. 유클리드시대 이후로 수학의 이 같은 두 분야는 엄격히 구분되어야만 하였다, 또, 기하학은 수학의 태반을 포함하므로 최소한 1600년까지 기하학은 거의 모든 "엄밀한" 수학의 기본이 되었다. 그 흔적으로 영어에서 여전히 x^2 과 x^3 을 x 제곱, x 세제곱이라 부르는 대신 x square, x cube라 부르는 것은 일반적인 양 x^2 와 x^3 이 한 때는 기하학적 의미만을 가졌었기 때문이다.

28) 김용운, 김용국(1986), 수학사대전, 우성문화사. p. 119.

통약불가능한 길이들 또는 무리수를 취급하는 문제에 대한 에우독소스의 해결은 실제적으로 에우독소스이전 수학의 주안점을 바꾸어 놓았다. 초기 피타고라스학파는 확실하게 기본적인 개념으로서 수를 강조하였고, 심지어 에우독소스의 스승인 타렌툼의 아르키타스도 기하학이 아닌, 단지 산술학이 만족스러운 증명을 제공할 수 있을 거라고 언급하였다. 그러나 통약불가능한 비들을 다루기 위하여 기하학으로 전환하였으므로, 고대 그리스인들은 이것으로 인해 대수학과 무리수를 포기해야만 하였다[29].

이에 반해, 데데킨트는 연속적인 공간적 크기를 수 개념으로 확장하여, 기하학적 직관에 의존하지 않고 무리수의 도입을 근거 짓는 방법으로 "유리수 절단"이라는 개념을 도입하였다. 앞에서 살펴보았듯이, 무리수를 유리수 절단을 통해서 도입할 수 있다는 데데킨트의 절묘한 생각은 실은 매우 단순한 사실에 기초하는 바, 어떤 유리수 a가 유리수 집합 Q을 양분할 때 생기는 유리수 절단은 역으로 그 유리수 a을 완전히 규정할 수 있다는 점에서 동일시하여도 무방하다는 점이다. 여기서 한 걸음 더 나아가 유리수에 의해 생기지 않은 유리수 절단 역시 단 하나의 수를 완전히 규정할 것이며, 따라서 기존의 유리수 집합으로부터 전혀 새로운 수 무리수를 구성할 수 있다는 것이다. 즉, 데데킨트는 어떤 유리수 a에 의한 절단의 경우 역으로 절단이 그 유리수 a을 완전히 규정하듯이, 유리수에 의하지 않은 절단의 경우에도 그 어떤 수, 즉 무리수를 완전히 규정한다는 것이다.

데데킨트 절단 전체의 집합에 연산을 정의하여 실수체로 정의한다. 이에 따라 데데킨트는 극한에 관한 기본 정리를 기하학에 기대지 않고도 엄밀히 증명할 수 있다고 지적하였다. 연속성을 적절히 정의하는 데 길을 안내한 것은 기하학이었지만 이것은 결국 연속성의 개념을 형식적이며 산술적으로 정의하는 데에서는 배제되고 말았다. 또한 철학적으로 볼 때, 데데킨트의 무리수 정의는 그의 정의가 두 집합을 정의하는 수학적 성질에 대하여 아무런 제약도 하지 않기 때문에 더욱 고차원의 추상적인 내용을 담고 있다고 할 수 있다. 그리하여 유리수 체계에서 데데킨트의 절단은 기하학적인 공간적 크기를 대신하여 해석학의 핵심이 되었고, 데데킨트의 수 개념에 의해 해석학은 기하학으로부터 완전히 독립할 수 있었다.

3. 맺는말

피타고라스학파는 수와 크기의 이산적인 관점을 공간적 크기인 길이, 넓이, 부피들에 적용하여 초기 비례론을 발전시켰으나, 통약불가능한 것의 발견으로 기하학적인 양들의 비의 비교에 대한 피타고라스학파의 정수 비례론은 쓸모없게 되었고, 또한 이산적인 수와 연속적인 공간적 크기는 서로 다른 형태로 간주되었으며, 서로 구별하여 별도로 다루어져야만 하였다. 기하학 기초위에서의 이 위기는 에우독소스에 의해 해

29) Morris Cline(1972), Mathematical Thought from ancient to modern times, p.49.

결되었다. 클라인(1980)[30]에 의하면, 유클리드의『원론』제 5권에서 상세히 설명되고 있는 에우독소스의 비례론에서, 에우독소스는 공간적 크기에 대한 비례 이론을 세웠는데, 그것은 무리수의 이론이 아닌, 기하학과 결부된 이론이었다. 즉, 에우독소스는 모든 공간적 크기를 기하학적으로 생각하였다. 수로 표현한다면 무리수가 될 수 있는 길이, 각, 넓이, 부피 등이 기하학적으로 다루어졌다. 이에 반해, 데데킨트는 연속적인 공간적 크기를 수 개념으로 확장하여, 기하학적 직관에 의존하지 않고 무리수의 도입을 근거 짓는 방법으로 "유리수 절단"이라는 개념을 도입하였다. 그리하여 그는 에우독소스가 해결하지 못한 실수의 연속성을 해결할 수 있었다. 유리수 체계에서 데데킨트의 절단은 기하학적인 공간적 크기를 대신하여 해석학의 핵심이 되었고, 데데킨트의 수 개념에 의해 해석학은 기하학으로부터 완전히 독립할 수 있었다. 그래서 우리는 에우독소스의 비례론과 데데킨트가 실수를 현대적으로 정의한 '데데킨트 절단' 사이에 밀접한 관계가 있다고 말할 수 있다.

19세기 후반에 실수 체계에 논리적인 구조의 문제가 정면으로 직면하게 되었다. 그것의 가장 큰 어려움이라는 것은 무리수였다. 이상하게도, 이것을 해결한 데데킨트는 무리수 이론을 수립하는데 새로운 관점이 필요로 하지 않았다. 에우독소스는 유클리드『원론』제 5권에서, 공간적 크기들의 통약불가능한 비들을 다루었고 그러한 비들의 같음과 같지 않음을 정의하였다. '두 비들의 같음'의 정의는 유리수($\frac{m}{n}$)을 3개의 부류로 나누게 되는데, 이것들은 $\frac{m}{n}$이 공간적 크기a와 b의 통약불가능한 비 $\frac{a}{b}$보다 작은 것들로 그리고 같은 것으로 또한 $\frac{m}{n}$이 더 큰 것들로 나누는 것이다. 에우독소스가 직접 통약불가능한 비를 정의하지 않았다는 점에서는 에우독소스의 논리는 불완전하다고 볼 수 있다. 더욱이, '두 통약불가능한 비들의 같음'인 비례론에 대한 에우독소스의 발전은 단지 기하학에만 적용할 수 있는 것이었다. 그럼에도 불구하고, 그는 무리수를 정의할 수도 있었던 근본적인 아이디어를 가지고 있었다고 볼 수 있다.

데데킨트는 『The Nature And Meaning Of Numbers』의 서론[31]에서 "만약 무리수를 측정 가능한 두 양들의 비로 간주한다면, 이 방법은 에우독소스가 '두 비들의 같음'을 정의하였던 유명한 정의(『원론』제 5권 정의5)안에 가장 명확하고 가능한 방법으로 이미 설명되었으며, 동일한 고대의 이 확신은 나의 이론의 원천이 되었다."고 하였다. 실제적으로 데데킨트는 에우독소스의 아이디어를 재형식화하여 사용하였고, 이 은혜에 감사한다고 언급하고 있다[32]. 따라서 우리는 데데킨트가 2000년보다 더 앞선 에우독소스의 방법을 거슬러 올라가 조사함으로써 실수체계에 대한 확고한 기초를 확립하였다고 추론할 수 있을 것이다.

30) Morris Cline, 박세희 역(1980), 수학의 확실성, 민음사, p.142.
31) Richard Dedekind(1901), Essays on the theory of numbers, p.40.
32) Morris Kline(1972), Mathematical Thought from ancient to modern times, p.983.

참 고 문 헌

1. 김용운, 김용국, 수학사대전, 우성문화사, 1988.
2. 김종명, 수학의 위기와 그 극복 과정, 한국수학사학회, 제15권, 제2호, 2002.
3. 권석일, 홍진곤, 초·중등 수학교과서에서 기하 양 사이의 비례관계의 전개 방식에 대한 역사적 분석, 한국수학사학회, 제19권, 제2호, 2006.
4. 박정숙, 비와 비례 개념의 의미와 표현에 대한 역사적 발달 과정, 한국수학사학회, 제21권 제3호, 2008.
5. 백현화, 데데킨트 절단을 이용한 실수의 구성, 부산대 석사학위논문, 2007.
6. 이병창, 헤겔의 수 개념 - 미분 계산의 정당화, 경남대학교 철학과 논문집, 1997.
7. 장경윤, 실수의 통약성에 관한 수학사적 논의, 한국수학사학회, 제8권 제1호, 1995.
8. 정은실, 비 개념에 대한 역사적, 수학적, 심리적 분석, 대한수학교육학회 <학교수학>, 제5권 제4호, 2003.
9. 한대희, 미적분의 역사 발생적 전개에 관한 연구, 서울대 석사학위논문, 1997.
10. Aristotle, 김진성 역, 『형이상학』, 이제이북스, 2007.
11. ________, 김진성 역, 『범주론·명제론』, 이제이북스, 2005.
12. Carl B. Boyer, 양영오, 조윤동 역, 수학의 역사, 경문사, 2000.
13. ________ , 김경화 역, 미분적분학사-그 개념의 발달, 교우사, 2004.
14. Heath, Thomas Little, 이무현 역, 유클리드 기하학 해설서 나권, 교우사, 1998.
15. Hermann, Weyl, 김상문 역, 수리철학과 과학철학, 민음사, 1897.
16. Howard Eves, 이우영, 신항균 역, 수학사, 경문사, 2005.
17. Howard Eves, 허민, 오혜영 역, 수학의 기초와 기본 개념, 경문사, 1995.
18. Morris Cline, 박세희 역, 수학의 확실성, 민음사, 1980.
19. Tobias Dantzig, 심재관 역, 과학의 언어 수, 지식의 숲, 2007.
20. Richard Courant, Herbert, Robbins, 박평우외 2명 역, 수학이란 무엇인가, 경문사, 2002.
21. C. H. Edwards, Jr., The Historical Development of the Calculus, springer-verlag, 1979.
22. Fowler, D. H, Ratio and Proportion in Early Greek Mathematics, Sources and Studies in the History and Philosophy of Classics(2), p.98-11, 1986.
23. Heath, Thomas Little, History of Greek Mathematics, 1,2. Oxford University, 1921.
24. Howard Stein, Eudoxos and Dedekind : On the ancient Greek theory of Ratios and its Relation to Modern Mathematics. Synthese, 84(2), p.163-211, 1990.
25. Margaret E. Baron, The Origins of the Infinitesimal Calculus, Dover, 1969.

26. Morris Cline, Mathematical thought from ancient to modern times, Oxford university press, 1972.
27. Richard Dedekind, Essays on The Theory of Numbers, Dover, 1901.

A study on the relation between the real number system of Dedekind and the Eudoxus theory of proportion

Sunchon Isu Middle School, Kang, Dae Won
Sunchon National University, Department of Mathematics Education, Kim, KwonWook

The Eudoxean theory of Proportion is correlated with 'Dedekind cut' with which Dedekind defined the real number system in modern usage.

Dedekind established a firm foundation for the real number system by retracing some of Eudoxus' steps of over two thousand years earlier.

Thus it should be quite worthy that we separate Greek inheritance from the definition of Dedekind,

However, there is a fundamental difference between Eudoxean theory of proportion and Dedekind cut.

Basically, it seems impossible for Greeks to distinguish between the distinction between number and magnitude.

In this paper, we will consider how the Eudoxean theory of proportion was related to Dedekind cut introduced to prove the Dedekind's real number completion and how it influenced Dedekind cut by looking at the relation between Eudoxos's explication of the notion of ratio and Dedekind's well-known construction of the real numbers.

Key words: Eudoxus, Dedekind, ratio and proportion, Dedekind cut, incommensurable
2000 Mathematics Subject Classification : 97-03
ZDM Subject Classification : A30

접수일 : 2009년 7월 19일 수정일 : 2009년 8월 17일 게재확정일 : 2009년 8월 19일